Aufgabenblatt 07, Abgabe: 11. 01. 2011

Aufgabe 11. Freie Elektronen in d Dimensionen und die Sommerfeld-Entwicklung (20 Punkte)

Betrachten Sie freie Elektronen mit Dispersion

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\sum_{i=1}^{d} k_i^2\right)$$

in d Dimensionen.

(a) Bestimmen Sie den Zusammenhang von Fermi-Wellenzahl k_F und der Fermi-Energie ε_F mit der Teilchen-Dichte $n = N/V$ (N Gesamt-Elektronenzahl, V “Volumen” des d-dimensionalen Systems) bei $T = 0$.

(b) Bestimmen Sie die Zustandsdichte $\nu(\varepsilon)$ zunächst allgemein und zeigen Sie dann für die Zustandsdichte an der Fermikante $\nu(\varepsilon_F) = \frac{d}{4}\frac{N}{\epsilon_F}$ (hier $N = N(T = 0)$).

Die Sommerfeld-Entwicklung läßt Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) f_F(\varepsilon),$$

wo $f_F(\varepsilon) = [\exp(\beta(\varepsilon - \mu)) + 1]^{-1}$, und $g(\varepsilon)$ eine mehrfach stetig differenzierbare und integrierbare Funktion (mit $g(\varepsilon \to -\infty) \to 0$) ist, als eine Temperatur-Reihe umformulieren:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon\, g(\varepsilon) f_F(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon\, g(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (k_B T)^{2n} \left.\frac{d^{2n-1} g(\varepsilon)}{d\varepsilon^{2n-1}}\right|_{\varepsilon=\mu}.$$

Hier ist $a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)}$. Speziell gilt $a_1 = \pi^2/6$, $a_2 = 7\pi^4/360$.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Sommerfeld-Entwicklung die Temperatur-Abhängigkeit des chemischen Potentials $\mu(T) = \varepsilon_F + b_2(k_B T)^2 + b_4(k_B T)^4$ bei konstanter Teilchenzahl.

(d) Bestimmen Sie die innere Energie $U(T)$ und die spezifische Wärme bei konstantem Volumen und konstanter Teilchenzahl $c_{V,N}(T)$ in quartischer bzw. kubischer Ordnung in T für $d = 3$ und $d = 2$.

(e) **Zusatzaufgabe:** Berechnen Sie $c_{V,N}(T)$ numerisch für $d = 2$, 3 und vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus (d).