5 Elektronen im Magnetfeld

Wir betrachten nun (weiter nicht-wechselwirkende) Elektronen, auf die (neben einem skalaren Potential $V(\vec{r})$) auch ein Magnetfeld B wirkt, das wir als statisch und homogen annehmen. Damit wird in minimaler Kopplung zum einen der Impuls modifiziert:

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r})$$

Zum anderen ist mit dem Spin $\vec{S}$ des Elektrons ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$ verbunden, das zu einem Dipol-Term führt: $H_{dipol} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -g\frac{e}{2mc}\vec{S}\cdot\vec{B} \approx \mu_B\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$ *

mit dem Bohr-Magneton $\mu_B = \frac{e|\hbar|}{2mc}$, dem g-Faktor $g = 2{,}002... \approx 2$ und dem Vektor von Pauli-Matrizen

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

5.1 Pauli-Paramagnetismus

Im ersten Schritt zeigen wir, dass der Spin-Anteil * zu einer paramagnetischen Antwort führt.

Wir wählen $\vec{B} = B\hat{e}_z$ als Quantisierungsachse und erhalten als Einteilchen-Energien modifizierte Dispersionen:

$$\varepsilon_{n\sigma}(\vec{k}) = \varepsilon_n(\vec{k}) + \sigma\mu_B B \qquad (\sigma \in \{1,-1\})$$

Großkanonische Zustandssumme und Potential lauten dann (mit der Fugazität $z = e^{\beta\mu}$):

$$Z_{gk} = \prod_{\vec{k}n\sigma} \left[1 + z\, e^{-\beta\varepsilon_{n\sigma}(\vec{k})}\right]$$

$$\Omega = -\frac{1}{\beta}\sum_{\vec{k}n\sigma} \ln\left[1 + z\, e^{-\beta(\varepsilon_n(\vec{k}) + \sigma\mu_B B)}\right]$$

Die Magnetisierung $\vec{m} = m\hat{e}_z$ folgt als Ableitung:

$$m = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial B}\right)_{T,V,\mu} = -\mu_B \sum_{\vec{k}n}\left[f_F(\varepsilon_n(\vec{k}) + \mu_B B) - f_F(\varepsilon_n(\vec{k}) - \mu_B B)\right]$$

$$= -2\mu_B^2 B \sum_{\vec{k}n} f_F'(\varepsilon_n(\vec{k})) + \mathcal{O}(B^3)$$

$$= -2\mu_B^2 B \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, \bar{\nu}(\varepsilon)\, f_F'(\varepsilon) + \mathcal{O}(B^3)$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} 2\mu_B^2 B \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, \bar{\nu}'(\varepsilon)\, f_F(\varepsilon) + \mathcal{O}(B^3)$$

Aus der Sommerfeld-Entwicklung folgt mit

$$\mu(T) = \varepsilon_F - \frac{\pi^2}{6}\frac{\nu'(\varepsilon_F)}{\nu(\varepsilon_F)}(k_B T)^2 + \mathcal{O}(T^4)$$

(112) für das magnetische Moment:

$$m = 2\mu_B^2 B\left[\int_{-\infty}^{\mu} d\varepsilon\, \bar{\nu}'(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6}\bar{\nu}''(\varepsilon)(k_B T)^2 + \mathcal{O}(B^2) + \mathcal{O}(T^4)\right]$$

$$= 2\mu_B^2 B\,\bar{\nu}(\varepsilon_F)\left\{1 + \frac{\pi^2}{6}\left[\frac{\nu''(\varepsilon_F)}{\nu(\varepsilon_F)} - \left(\frac{\nu'(\varepsilon_F)}{\nu(\varepsilon_F)}\right)^2\right](k_B T)^2 + \dots\right\}$$

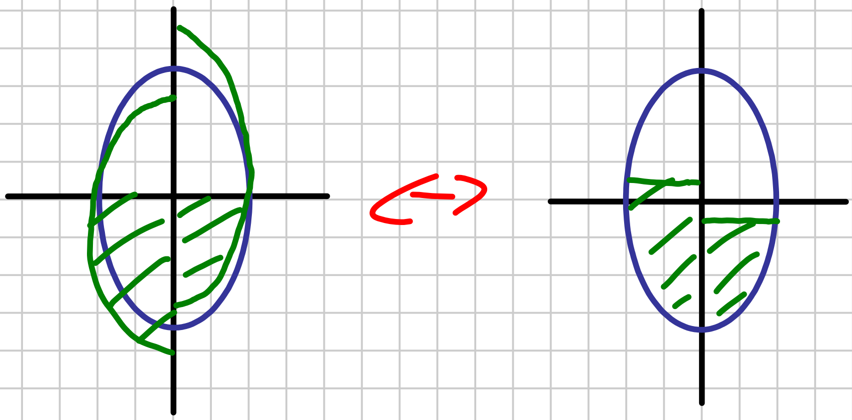
$$= 2\mu_B^2 B\,\bar{\nu}(\varepsilon_F)\left\{1 + \frac{\pi^2}{6}\left[\frac{\nu''(\varepsilon_F)}{\nu(\varepsilon_F)} - \left(\frac{\nu'(\varepsilon_F)}{\nu(\varepsilon_F)}\right)^2\right](k_B T)^2 + \dots\right\}$$

Damit ist der Spinanteil der isothermen magnetischen Suszeptibilität gegeben durch

$$\chi_{T,V,N} = \left(\frac{\partial m}{\partial B}\right)_{T,V,N} = 2\mu_B^2\bar{\nu}(\varepsilon_F)\left\{1 + \frac{\pi^2}{6}\frac{d^2(\ln(\nu))}{d\varepsilon^2}(\varepsilon_F)(k_B T)^2 + \dots\right\}$$

1. Interpretation: nur Elektronen nahe der Fermi-Kante, mit Dichte $2\bar{\nu}(\varepsilon_F) k_B T$ tragen zur Suszeptibilität bei, und zwar mit einem Faktor $\mu_B^2 / k_B T$ pro Spin (Curie-Gesetz).

2. Interpretation:



Spezialfall freie Elektronen:

$$\chi_{T,V,N} = \mu_B^2\bar{\nu}(\varepsilon_F)\left[1 - \frac{(d-2)\pi^2}{12\,\varepsilon_F^2}(k_B T)^2 + \dots\right]$$

(113) $$= V\frac{\mu_B^2\sqrt{\varepsilon_F}}{2\pi^2}\left(\frac{2m_0}{\hbar^2}\right)^{3/2}\left[1 - \frac{\pi^2}{12(\beta\varepsilon_F)^2} + \dots\right] \quad (d=3)$$