Theorie der Kondensierten Materie I

Notiztitel 15.02.2011

5.2 Landau-Diamagnetismus freier Elektronen

Wir betrachten weiter ein Magnetfeld in z-Richtung und wählen die Landau-Eichung:

$$\vec{A} = (0, Bx, 0) \Rightarrow \vec{B} = (0,0,B); \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{p}\cdot\vec{A} = \vec{A}\cdot\vec{p}$$

Außerdem vernachlässigen wir jetzt den Spin (siehe 5.1) und betrachten (weiterhin) ein einziges Elektron:

$$H_i = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - \frac{eB}{mc} p_y x + \frac{e^2B^2}{2mc^2} x^2$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \left(x - \frac{p_y}{m\omega_0}\right)^2 + \frac{p_z^2}{2m}$$

mit der Zyklotron-Frequenz $\omega_0 = \frac{eB}{mc}$

Da p_y, p_z mit H vertauschen, können wir für diese Richtungen ebene Wellen ansetzen:

$$\psi(\vec{r}) = c\, \varphi(x)\, e^{ik_y y} e^{ik_z z}$$

Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung liefert:

$$H\psi(\vec{r}) = \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_0^2\left(x - \frac{\hbar k_y}{m\omega_0}\right)^2 + \frac{\hbar k_z^2}{2m}\right) c\,\varphi(x) e^{ik_y y} e^{ik_z z}$$

$$= E\, c\, \varphi(x)\, e^{ik_y y} e^{ik_z z}$$

114 Dies entspricht gerade der SG eines verschobenen

eindimensionalen harmonischen Oszillators. Wenn wir eine unendliche Ausdehnung in x-Richtung annehmen, folgt: $\varphi(x) = \underset{\uparrow \text{Hermite-Polynome}}{\phi_n}\left(\frac{x-x_0}{\lambda}\right)$ mit $x_0 = \frac{\hbar k_y}{m\omega_0} = \frac{\hbar c k_y}{eB}$

und der magnetischen Länge $\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$

Die Energie-Eigenwerte $\underbrace{E_{n,k_y,k_z}}_{\equiv \varepsilon_\alpha} = \hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$

sind bezüglich der Quantenzahl k_y entartet, womit die durch die Eichung gebrochene Symmetrie $^{x\leftrightarrow y}$ wieder hergestellt ist. Der Entartungsgrad im endlichen System bestimmt sich aus der Forderung, dass die Mittelpunkte x_0 im System liegen: $0 \leq x_0 = \frac{\hbar k_y}{m\omega_0} \leq L_x$

Bei periodischen Randbedingungen in y-Richtung gilt außerdem: $k_y = \frac{2\pi l_y}{L_y}$; $l_y \in \mathbb{N}$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{2\pi\hbar l_y}{m\omega_0 L_y} \leq L_x \quad \Leftrightarrow \quad l_y \leq \frac{m\omega_0 L_x L_y}{2\pi\hbar} = \frac{eB}{c}\frac{L_x L_y}{h}$$

Entartungsgrad eines Landau-Niveaus

Thermodynamik: für das großkanonische Potential ergibt sich: $\phi = -2k_BT \sum_\alpha \ln\left(1+e^{-\beta(\varepsilon_\alpha-\mu)}\right)$

$$= -2k_BT \frac{L_z}{2\pi\hbar} \int dk_z \, \frac{eB}{c} \frac{L_xL_y}{2\pi\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(1+e^{-\beta(\varepsilon_\alpha-\mu)}\right)$$

$$= -\frac{k_B T V}{2\pi^2\hbar^2}\frac{|e|B}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\int dk_z\ \ln\left[1+e^{-\beta\left(\hbar\omega_0(n+\frac{1}{2})+\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}-\mu\right)}\right]}_{\equiv g(\mu-\hbar\omega_0(n+\frac{1}{2}))}$$

mit $g(\mu-x) = \int dk_z\ \ln\left(1+e^{\beta\left(\mu-x-\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}\right)}\right)$

Die Summe über die diskreten Landau-Niveaus nähern wir mit der verallg. Euler-McLaurin-Summenformel

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n+\tfrac{1}{2}) \approx \int_0^{\infty} F(x)dx + \frac{1}{24}F'(0)$$

(für eine genauere Behandlung siehe von-Dongen-Skript 5.2)

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} g(\mu-\hbar\omega_0(n+\tfrac{1}{2})) = \int_0^{\infty} g(\mu-\hbar\omega_0 x)dx + \frac{1}{24}\frac{d}{dx}g(x)\Big|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega_0}\int_{-\infty}^{\mu}dy\, g(y) - \frac{\hbar\omega_0}{24}\frac{d}{dy}g(y)\Big|_{\mu}$$

mit $y=\mu-\hbar\omega_0 x$. Für das großkanonische Potential folgt:

$$\phi = \frac{k_B T m}{2\pi^2\hbar^3}V\left[\int_{-\infty}^{\mu}dy\, g(y) - \frac{(\hbar\omega_0)^2}{24}\frac{d}{dy}g(y)\Big|_{\mu}\right]$$

Da der erste Term magnetfeldunabhängig ist, muss er dem freien Fall entsprechen:

$$\phi = \phi_0(T,\mu) - \frac{\hbar^2e^2B^2}{24m^2c^2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\phi_0(T,\mu)$$

116 mit $\phi_0(T,\mu) = \frac{k_B T m}{2\pi^2\hbar^3}V\int_{-\infty}^{\mu}dy\, g(y)$

$$= \frac{k_B T m}{2\pi^2 \hbar^3} V \int_{-\infty}^{\mu} dy \int dk_z \, \ln\left(1 + e^{\beta\left(y - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right)}\right)$$

Die Magnetisierung lässt sich nun berechnen als:

$$M = -\frac{\partial \phi}{\partial B} = \frac{e^2\hbar^2}{12 m^2 c^2} B \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \mu^2}$$

womit für die Suszeptibilität gilt:

$$\chi_{Landau} = \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{1}{3} \mu_B^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \mu^2}$$

Zur Auswertung der 2. Ableitung verwenden wir den freien Ausdruck für ϕ_0:

$$\phi_0 = -2 k_B T \sum_{\vec{k}} \ln\left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi_0}{\partial \mu} = -2 \sum_{\vec{k}} \frac{e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}}{1 + e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}} = -2 \sum_{\vec{k}} f(\varepsilon_{\vec{k}})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \mu^2} = -2 \sum_{\vec{k}} \left.\frac{df}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon_{\vec{k}}} \xrightarrow{T \to 0} -2 \nu_0(\varepsilon_F)$$

Die Landau-Suszeptibilität ist also negativ, d.h. diamagnetisch. Für $T \to 0$ gilt: $\chi_{Landau} = -\frac{1}{3} \chi_{Pauli}$

$$\Rightarrow \chi_{gesamt} = \chi_{Landau} + \chi_{Pauli} = \frac{2}{3} \chi_{Pauli}$$

Volle Berücksichtigung der diskreten Struktur $\rightarrow$

117 Oszillationen in $\frac{1}{B}$: de Haas-van-Alphen-Effekt!