Physik I – Übungsaufgabe Physiker

Notiztitel 29.11.2005

Coriolis-Kraft

a) Betrachten Sie ein rotierendes Bezugssystem KS', das mit einem Inertialsystem IS durch die Transformation

$$\underset{\text{IS}}{\vec r(t)} = R(t)\,\underset{\text{KS}'}{\vec r\,'(t)} \qquad R(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verbunden ist. Rechnen Sie durch explizite Differentiation nach, dass für eine kräftefreie Masse in KS' gilt: $m\ddot{\vec r}\,' = -2m\,\vec\omega \times \dot{\vec r}\,' - m\,\vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r\,')$.
Dabei dürfen Sie am Ende $t=0$ setzen (damit $R=0$).

b) Ein Torwart schiesst beim Abschlag in Mainz ein Tor (Abstand 100 m, Flugzeit 4 s). Schätzen Sie ab, welche horizontale Abweichung die Coriolis-Kraft verursacht.

Musterlösung:

a) Ableitungen mit Kettenregel:

$$\dot{\vec r} = \dot R\,\vec r\,' + R\,\dot{\vec r}\,'$$

$$\vec 0 = \ddot{\vec r} = \ddot R\,\vec r\,' + 2\dot R\,\dot{\vec r}\,' + R\,\ddot{\vec r}\,'$$

Setze nun $t=0$

$$\dot R(t) = \omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) & -\cos(\omega t) & 0 \\ \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot R(t) = -\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\ \dot R(0)=\omega\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\ \ddot R(0)=-\omega^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\ddot x'\\\ddot y'\\\ddot z'\end{pmatrix}=-2\omega\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot x'\\\dot y'\\\dot z'\end{pmatrix}+\omega^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}m\ddot x' &= 2m\omega\,\dot y' + m\omega^2 x'\\ m\ddot y' &= -2m\omega\,\dot x' + m\omega^2 y'\\ m\ddot z' &= 0\end{aligned}\right\}\ (1)$$

Andererseits: $\vec\omega=\omega\,\vec e_z$

$$\Rightarrow\quad \vec\omega\times\dot{\vec r}'=\begin{pmatrix}\omega_y\dot z'-\omega_z\dot y'\\\omega_z\dot x'-\omega_x\dot z'\\\omega_x\dot y'-\omega_y\dot x'\end{pmatrix}=\omega\begin{pmatrix}-\dot y'\\\dot x'\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)=\vec\omega\times\begin{pmatrix}-y'\\x'\\0\end{pmatrix}=-\omega^2\begin{pmatrix}x'\\y'\\0\end{pmatrix}$$

Also: $m\begin{pmatrix}\ddot x'\\\ddot y'\\\ddot z'\end{pmatrix}=-2\omega\begin{pmatrix}-\dot y'\\\dot x'\\0\end{pmatrix}+m\omega^2\begin{pmatrix}x'\\y'\\0\end{pmatrix}$ wie (1).

b) $v_{\parallel}=\frac{s}{t}=25\,\frac{m}{s}$; $\varphi_{Mainz}=50°$

$\omega_{\perp}=\frac{2\pi}{24h}\cdot\cos(\varphi)\approx 7{,}3\cdot10^{-5}s^{-1}\cdot 0{,}64\approx 4{,}7\cdot10^{-5}s^{-1}$

$a_{hor}=\omega_{\perp}\cdot v_{\parallel}\approx 1{,}2\cdot10^{-3}\,\frac{m}{s^2}$; $\Delta x=\frac{1}{2}a_{hor}t^2\approx 10^{-2}\,m$

Also kommt der Ball mit ca. 1cm Abweichung (nach rechts) ins Tor