Physik I Ergänzung – 10. Vorlesung 20.1.2005

Notiztitel 13.01.2006

Inhalt:
- Fortsetzung Herleitung Kepler-I
- Math. Exkurs: Ellipsen
- Herleitung Kepler-III
- Schwingungen

1e) Auswertung des Integrals für Kepler-Problem

substituiere $s = \frac{1}{r'}$ $\Rightarrow ds = -\frac{dr'}{r'^2}$

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \mp \int_{r_0^{-1}}^{r^{-1}} \frac{ds}{\sqrt{\underbrace{2\mu E/L^2 - s^2 + 2\underbrace{\frac{G\mu^2 M}{L^2}}_{s_0} s}_{-(s-s_0)^2 + 2\mu E/L^2 + s_0^2 \, = \, c - \tilde{s}^2}}}$$

Standard-Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos(x)$

$$\varphi - \varphi_0 \overset{\downarrow}{=} \pm \arccos\left[\frac{r^{-1} - G\mu^2 M/L^2}{\sqrt{(G\mu^2 M/L^2)^2 + 2\mu E/L^2}}\right]$$

$$= \pm \arccos\left[\frac{(L^2/G\mu^2 M) r^{-1} - 1}{\sqrt{1 + 2L^2 E/G^2\mu^3 M^2}}\right]$$

Wähle pos. Vorzeichen, definiere

$$p = \frac{L^2}{G\mu^2 M}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + 2L^2 E/G^2\mu^3 M^2}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi - \varphi_0 = \arccos\left[\frac{p/r - 1}{\varepsilon}\right]$$

oder $\quad \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{p}{r} - 1$

bzw. $\quad \boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}}$

Fallunterscheidung:

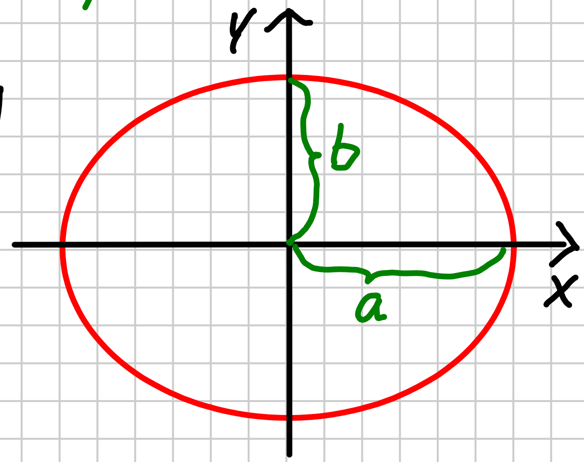
$E < 0$:	$0 < \varepsilon < 1$	Ellipse
$E = 0$:	$\varepsilon = 1$	Parabel
$E > 0$:	$\varepsilon > 1$	Hyperbel

Planetenbahnen (und Kometenbahnen) sind gebunden ($E<0$), also folgt das 1. Keplersche Gesetz.

Mathematischer Exkurs: Ellipsen

Motivation: Wir werden Gleichungen für Kepler-Bahnen erhalten, denen man nicht ohne weiteres ansieht, dass sie (u.a.) Ellipsen beschreiben.

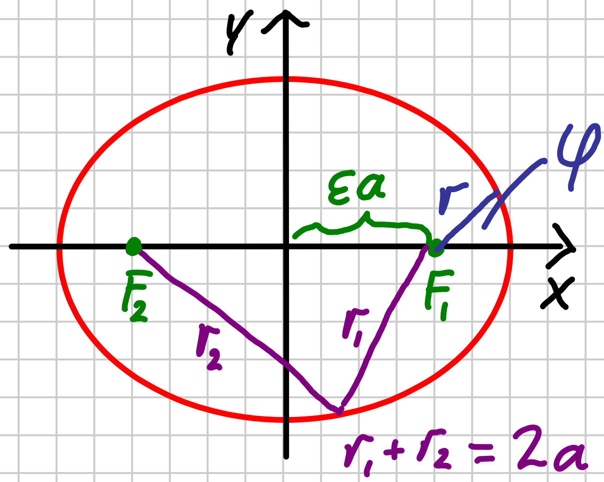
Äquivalente Definitionen für Ellipsen:



(i) (x,y) mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

für Halbachsen a, b

(für $a = b \equiv R$: $x^2 + y^2 = R^2$ Kreisg.)



(ii) Menge von Punkten, deren Abstandssumme zu 2 Brennpunkten F_1, F_2 konstant ist:

$$r_1 + r_2 = 2a$$

(für $F_1 = F_2$: Abstand konstant $2a/2 = a \equiv R$)

(iii) Punkte (r, φ) mit $\boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}}$; $0 \leq \varepsilon < 1$

(Abstand r von Brennpunkt F_1, Winkel zur Hauptachse)

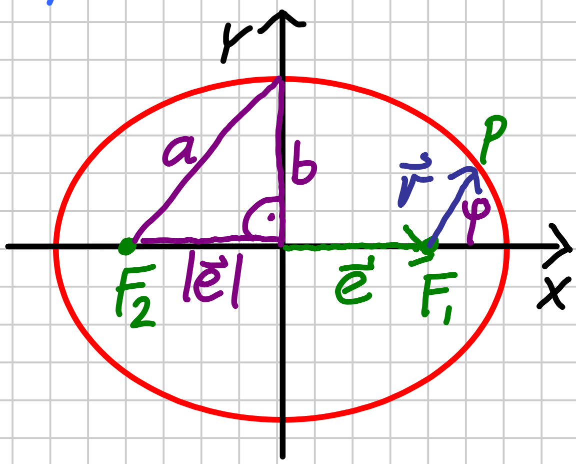
dabei: Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ $\quad (b \leq a)$

semilatus rectum ≡ „Parameter" $\quad p = \frac{b^2}{a}$

($\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p \equiv R$ konstant, also Kreis)

Bemerkung: $r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi)}$ beschreibt allgemeinere Klasse von Kegelschnitten: auch Parabel (für $\varepsilon = 1$) und Hyperbel (für $\varepsilon > 1$).

Beweis der Äquivalenz der Definitionen:



(ii)$\Leftrightarrow$(iii): $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{|\vec{r}|}_{= r} + |\vec{r} + 2\vec{e}| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \quad (\vec{r} + 2\vec{e})^2 = (2a - r)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 + 4\,\vec{r}\cdot\vec{e} + 4|\vec{e}|^2 = 4a^2 - 4ar + r^2$$

$$\overset{*}{\Leftrightarrow} \quad ar + \vec{r}\cdot\vec{e} = b^2 \qquad (*\ a^2 = b^2 + |\vec{e}|^2)$$

$$\overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \quad ra + r\varepsilon a\cos(\varphi) = b^2 \qquad (\Delta\ |\vec{e}| = \varepsilon a)$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{b^2/a}{1+\varepsilon\cos(\varphi)} = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi)} \qquad \text{q.e.d.}$$

(iii)$\Leftrightarrow$(i): $\frac{x}{a} = \frac{\varepsilon a + r\cos(\varphi)}{a} = \ldots = \frac{\varepsilon + \cos(\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\varphi)}$

$$\frac{y}{b} = \frac{r\sin(\varphi)}{b} = \ldots = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sin(\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\varphi)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{[\varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)] + (1-\varepsilon^2)[1-\cos^2(\varphi)]}{[1+\varepsilon\cos(\varphi)]^2} = 1$$

q.e.d.

(weiteres Rüstzeug für 9. Ergänzungsvorlesung: Kosinussatz, Integration in Kugelkoordinaten, HR 14.7-9)

3) Kepler-II $\rightsquigarrow$ $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu}$ konstant

$\Rightarrow T = \frac{2\mu A}{L} = \frac{2\mu \pi a b}{L}$ (a, b: große / kleine Halbachsen)

Oben hatten wir definiert: $p = b^2/a$

$\Rightarrow T = \frac{2\pi\mu}{L} a\sqrt{pa} = \frac{2\pi\mu}{L} a^{3/2} \frac{L}{\mu\sqrt{GM}}$

$\Rightarrow \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3}$ mit $M = m_S + m_P \approx m_S$

Also haben wir auch das 3. Kepler-Gesetz bewiesen.

Schwingungen

A Die freie Schwingung mit Reibung

$$\underbrace{m\ddot{x}}_{F_{ges}} + \underbrace{b\dot{x}}_{-\text{Reibungskraft}} + \underbrace{kx}_{-\text{Federkraft}} = 0 \qquad (x \equiv x(t))$$

Standardform: $\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

Lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Bemerkung: 1-dimensionale Behandlung ist keine Einschränkung, da die Bewegung in der verallgemeinerten Form $m\ddot{x}_i + b_i\dot{x}_i + k_i x_i = 0$ für jede Raumrichtung separat gelöst werden kann.

Lösungsansätze: (i) Rückführung auf ungedämpften harm. Oszillator: $x(t) = \tilde{x}(t)\,e^{-\delta t}$ (Vorteil: reelle Funktionen, HR 16-8)

(ii) Allgemeine Lösung durch komplexen Ansatz (cf. Korsch, 7.1.1)

Allgemeiner Ansatz: $\boxed{x(t) = e^{\lambda t}; \quad \lambda \in \mathbb{C}}$

(dieser Ansatz muss bei mehrfachen Nullstellen des charakteristischen Polynoms – s.u. – ergänzt werden)

$$x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}\,;\quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

einsetzen

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)}_{\text{charakteristisches Polynom}} \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Fallunterscheidung: (a) $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$ Schwingfall

(b) $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$ Kriechfall

(c) $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$ aperiodischer Grenzfall

Fall a) $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ komplex!

genauer: $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$$\Rightarrow \quad \lambda_\pm = -\gamma \pm i\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Die allgemeine Lösung lautet also:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_+ e^{+i\omega t} + c_- e^{-i\omega t}\right) \quad (c_\pm \in \mathbb{C})$$

$$= e^{-\gamma t}\left(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)\right)$$

$$\boxed{x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha)}$$

(nur reell für passende Wahl von $c_\pm$)

Fall (b) Im Kriechfall lautet die allgemeine reelle Lösung:

$$\boxed{x(t) = a_+ e^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t} + a_- e^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t}}$$

$(a_+, a_- \in \mathbb{R})$

Also keine Schwingungen, sondern 2 verschieden schnell exponentiell abklingende Komponenten.

Fall c) Für $\gamma^2-\omega_0^2=0$ hat das charakteristische Polynom nur die Nullstelle $\lambda=-\gamma$, so dass obiger Exponentialansatz nur eine Lösung liefert:

$$x_1(t) = a\, e^{-\gamma t}$$

Eine 2. Lösung gewinnt man durch den Ansatz

$$x_2(t) = b\, t\, e^{-\gamma t}$$

hier $\omega_0=\gamma$ nach Vor.

Beweis: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2 x = 0$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)x(t)=0$$

$$\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)x_2(t) = b\,(1-\gamma t+\gamma t)\,e^{-\gamma t} = b\,e^{-\gamma t}$$

aber $\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right) b\,e^{-\gamma t} = b\,(-\gamma+\gamma)\,e^{-\gamma t} = 0$

Damit ist allg. Lösung: $\boxed{x(t) = (a+bt)\,e^{-\gamma t}}$