Physik I Ergänzung - 11. Vorlesung 27.1.2005

Notiztitel 25.01.2006

Inhalt:
- Erzwungene Schwingungen
- gekoppelte Systeme - Schwebung
- Wellengleichung:
  - transversale Schwingung (Saite)
  - Schall in Gasen
- Schallintensität?

Nachtrag: erzwungene Schwingungen

Vorlesung / Halliday: $$X_m(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

x_m maximal $\Leftrightarrow \frac{f_0}{x_m^2}$ minimal, d.h.

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{d\omega}\left[(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]$$

$$= 2(\omega^2-\omega_0^2)2\omega + 4\gamma^2(2\omega)$$

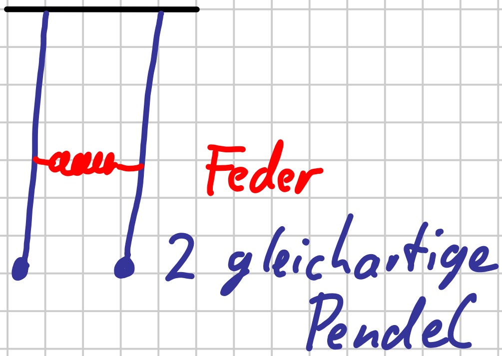
$$0 = \omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2$$

$$\boxed{\omega_{Resonanz} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}} \xrightarrow{\gamma \to \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}} 0$$

$$\boxed{X_{m,Resonanz} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}}$$

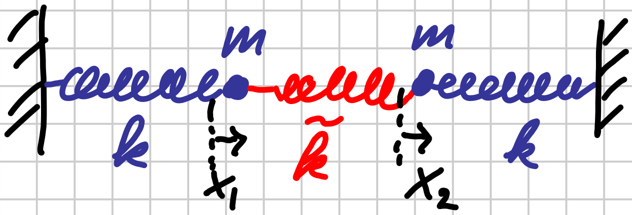
Gekoppelte Systeme – Schwebungen

Experiment: 2 durch Feder gekoppelte Pendel:



Analyse in Kleinwinkel-Näherung möglich ($\sin(\varphi_i) \approx \varphi_i$)

Äquivalentes System: Symmetrische 1-dimensionale Anordnung von Massen und Federn:



Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + \tilde{k}(x_2 - x_1)$$
$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 + \tilde{k}(x_1 - x_2) \qquad (*)$$

Suche Eigenmoden mit $\ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{x}$

hier direkt durch Addition und Subtraktion von (*):

$$m(\ddot{x_1 + x_2}) = -k(\underbrace{x_1 + x_2}_{x_+})$$
$$m(\ddot{x_1 - x_2}) = -(k + 2\tilde{k})(\underbrace{x_1 - x_2}_{x_-})$$

d.h.: $\ddot{x}_+ = -\omega_+^2 x_+$; $\omega_+ = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $\ddot{x}_- = -\omega_-^2 x_-$; $\omega_- = \sqrt{\frac{k+2\tilde{k}}{m}}$

allg. Lösung $\boxed{x_{1/2}(t) = a_+\cos(\omega_+ t + \varphi_+) \pm a_-\cos(\omega_- t + \varphi_-)}$

Spezialfall: $a_+ = a_- = \frac{x_0}{2}$; $\varphi_+ = \varphi_- = 0$

$$\Rightarrow x_{1/2}(t) = \frac{x_0}{2}\left[\cos(\omega_+ t) \pm \cos(\omega_- t)\right]$$

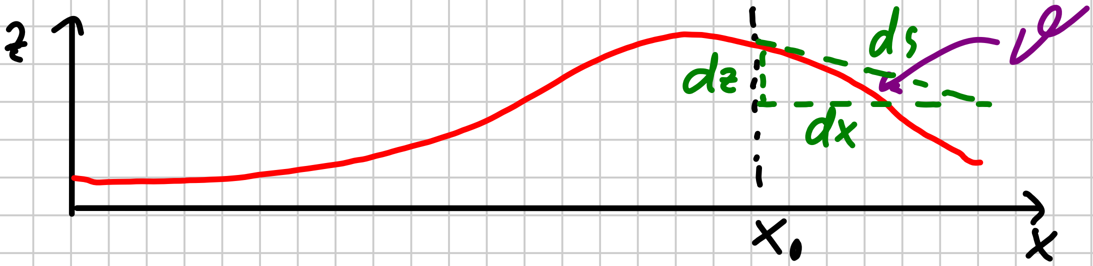
$$x_1(t) = x_0 \cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t\right)$$

$$x_2(t) = x_0 \underbrace{\sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right)}_{\text{schnelle Schw.}} \underbrace{\sin\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t\right)}_{\text{Einhüllende - Schwebung}}$$

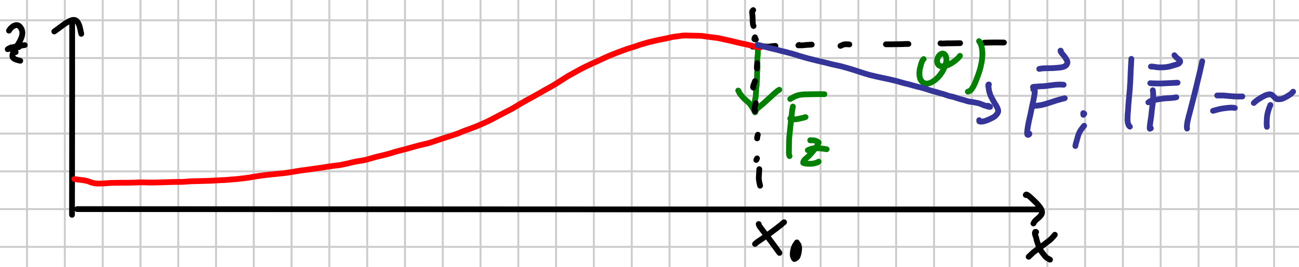
Transversale Wellen entlang gespannter Saite

(cf. Demtröder Kap 11.5.9d)

Wir betrachten eine Saite mit Spannung τ bei geringer Auslenkung (übertrieben gezeichnet):



An jedem Punkt kann man sich das Seil aufgeschnitten denken und die Seilspannung durch äußere Kräfte aufrecht erhalten:



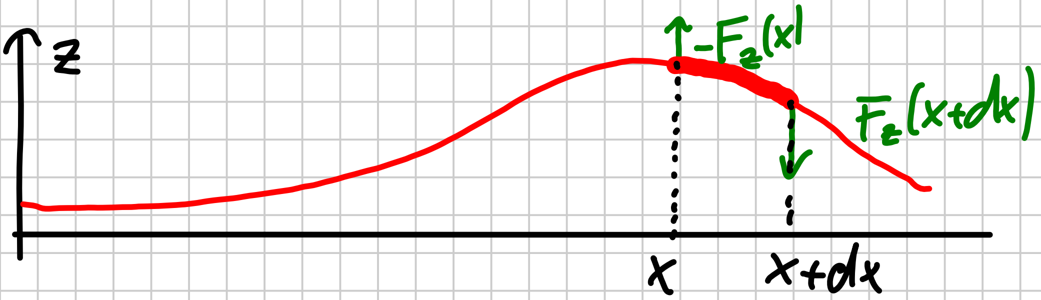
z-Anteil der Kraft auf linkes Seilstück: $F_z = \tau \sin(\vartheta)$

Andererseits (s.o.): $\frac{\partial z}{\partial x} = \tan(\vartheta) \approx \sin(\vartheta)$ ← kleine Steigungen

$$\Rightarrow F_z \approx \tau \frac{\partial z}{\partial x}$$

(entsprechend ist Kraft auf rechtes Seilstück
$-\vec{F}$ mit z-Anteil $-F_z = -\tau \frac{\partial z}{\partial x}$)

Betrachte nun Seilabschnitt zwischen x und $x+dx$:



$$dm = \mu\, dx$$

lineare Dichte

$$dm \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} = dF_{z,ges} = F_z(x+dx) - F_z(x)$$

$$= \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dx$$

$$\Rightarrow \quad \mu \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}$$

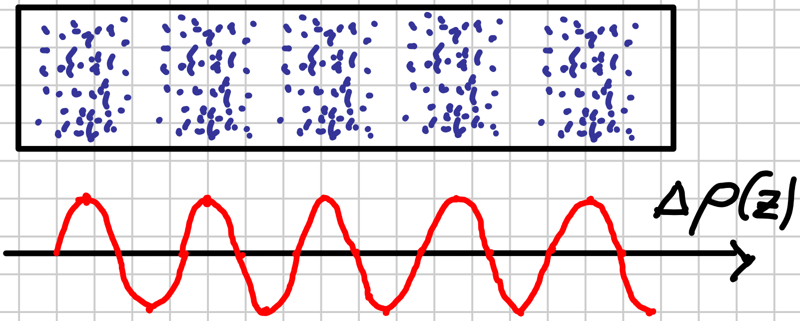
$$\boxed{\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\tau}{\mu} \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} = 0}$$

Wellengleichung

Ebene Schallwellen in Gasen

(cf. Demtröder Kap. 11.5.9c)

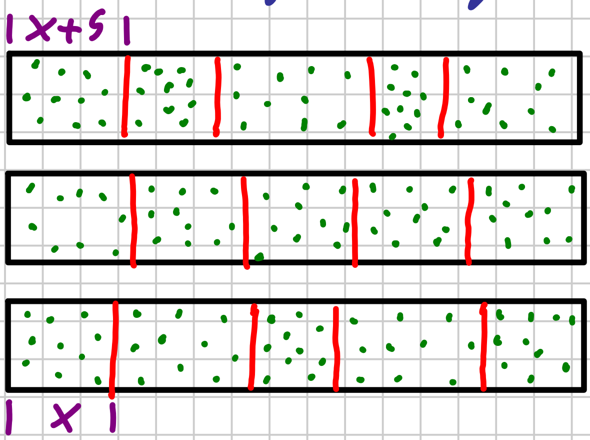
Schall: Dichteschwankungen, z. B. in Gasen.



Im Festkörper: Auslenkung jedes Gitteratoms von wohldefiniertem Gitterplatz:

$$\vec{R}_i(t) = \vec{R}_{i,0} + \vec{\xi}_i(t) \qquad \text{(für Gitteratom } i\text{)}$$

Im Gas: Atome/Moleküle haben keine individuelle Ruhelage, füllen aber im zeitlichen Mittel den Raum gleichmäßig aus. Speziell ist bei einem mindestens einseitig (z. B. mit einer Membran) verschlossenen Rohr der Durchfluss durch jeden Querschnitt im zeitlichen Mittel Null. Man kann also gedanklich Trennflächen einführen, durch die netto keine Teilchen treten, und sie als Begrenzung von Luftscheibchen betrachten:



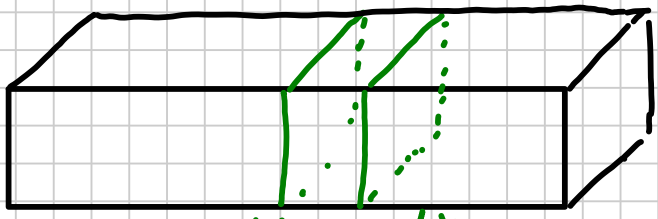
zwischen 2 Trennflächen befinden sich hier je 10 Teilchen

Im Grenzübergang dünner Luftschichten kann man damit jedem Ort eine Auslenkung zuordnen:

$$x \to x + s(x,t)$$

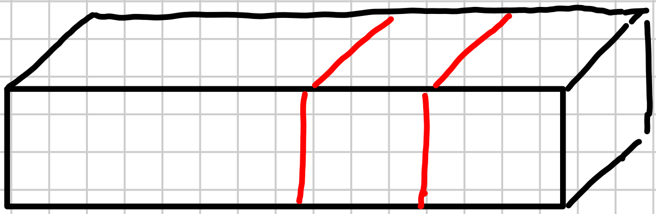
Herleitung der Wellengleichung:

(i) Druckverteilung aus Auslenkungen:



$x \quad x+dx$

$$dV_0 = A\,dx$$



$x+s(x,t)$ ↖ $x+dx+s(x+dx,t)$

$$\approx x+dx+s(x,t)+\frac{\partial s(x,t)}{\partial x}dx$$

$$dV = A\left(1+\frac{\partial s(x,t)}{\partial x}\right)dx$$

$$\frac{\Delta V}{V}(x,t) = \frac{dV-dV_0}{dV_0} = \frac{\partial s(x,t)}{\partial x}$$

andererseits: $$K := -\frac{dp}{dV/V}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p = -K\frac{\Delta V}{V} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2\right) \approx -K\frac{\Delta V}{V}$$

$$\boxed{\Delta p(x,t) = -K\frac{\partial s(x,t)}{\partial x}}$$

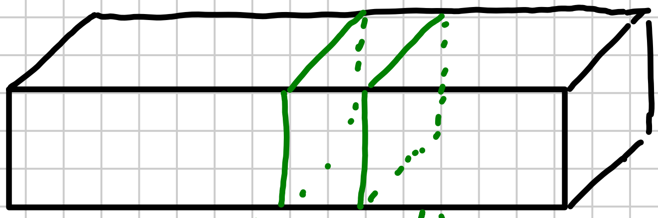
Ideales Gas: $$pV = N k_B \underset{\text{absolute Temperatur}}{T}$$

fehlt in Demtröder (11.80)

adiabatisch, f Freiheitsgrade: $$K = \frac{f+2}{f}\,p$$

monoatomar: $f=3$, 2atomig, hohes T: $f=5$

(ii) Berechnung der lokalen Beschleunigung



$$dm = \rho\, dV = \rho A\, dx \approx \rho_0 A\, dx$$

$$dF_{ges} = -A\left(p(x+dx) - p(x)\right)$$
$$= -A\left(\Delta p(x+dx) - \Delta p(x)\right)$$
$$= -A \frac{\partial \Delta p(x,t)}{\partial x} dx$$

$$dF_{ges}(x,t) = dm \frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2}$$

$$-\cancel{A} \frac{\partial \Delta p(x,t)}{\partial t} \cancel{dx} = \rho_0 \cancel{A}\, \cancel{dx} \frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2}$$

$$K \frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0} \frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2}}$$

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} = 0; \qquad v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$$

homogenes Gas: $\rho_0 = \frac{Nm}{V} \underset{\text{für ideales Gas}}{=} \frac{p}{k_B T} m$

D.h. für ideales Gas gilt: $\boxed{v = \sqrt{\frac{f+2}{f} \frac{k_B T}{m}}}$

Lösung der allgemeinen 1-dim. Wellengleichung

Schreibe Wellengleichung in Produktform:

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) s(x,t)$$

$$\overset{\text{Schwarz}}{=} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + v\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) s(x,t)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right) s(x,t)$$

$$\overset{\text{Schwarz}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right) s(x,t)$$

Lösung (i) $\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right) s(x,t) = 0$

$\iff s(x,t) = f_1(x - vt)$

Lösung (ii) $\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right) s(x,t) = 0$

$\iff s(x,t) = f_2(x + vt)$

Allgemeine Lösung: $s(x,t) = \underbrace{f_1(x - vt)}_{\text{rechtslaufende Welle}} + \underbrace{f_2(x + vt)}_{\text{linksl. Welle}}$