Physik I Ergänzung - 13. Vorlesung 10.02.2006

Notiztitel 09.02.2006

Inhalt:

Nachtrag: Schallgeschwindigkeit immer adiabatisch

Organisation:
- Vorlesung im SS 2006 auf Fr 8-10 verschieben (statt 10-12) wegen Kollision mit Linearer Algebra?
- Wiederholungswünsche für nächste Vorlesung? Bis Mittwoch melden!

Fortsetzung Relativitätstheorie

Das Zwillingsparadoxon

Gedankenexperiment: Ein Zwilling fliegt mit hoher Geschwindigkeit zu einem weit entfernten Stern, kehrt instantan um und kehrt auf die Erde zurück.
Aussage der Relativitätstheorie: der reisende Zwilling ist hinterher jünger als der zurückgebliebene Zwilling.

Beispiel: Reisestrecke je 3 Lichtjahre, $v = 0.6c$

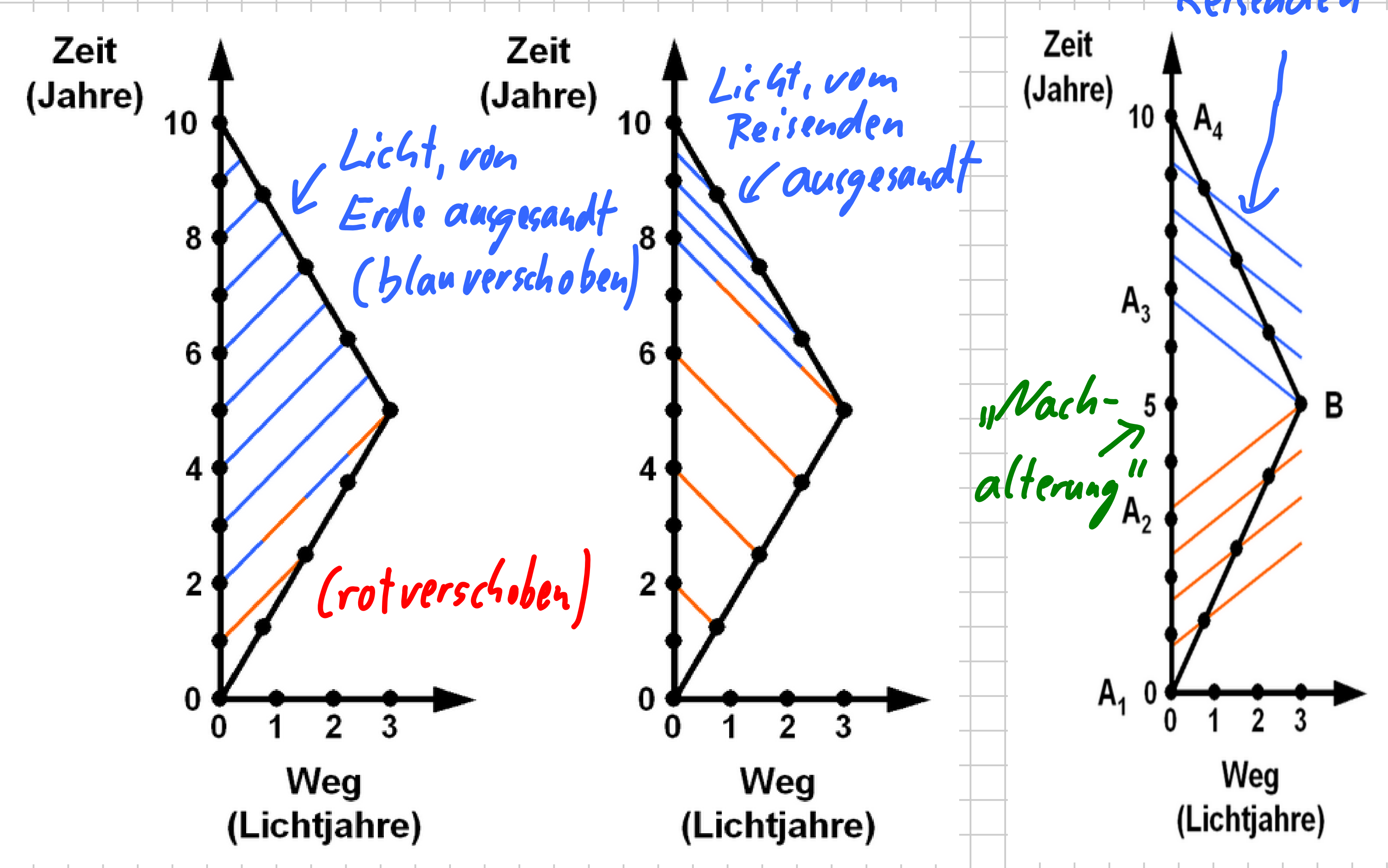
Reisezeit aus Erdsicht: $2 \times \frac{3}{0.6} = 10$ Jahre

Zeitdilatation bei Reisendem: $\Delta\tau \equiv t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = 8$ Jahre

Warum? Wieso wirkt Zeitdilatation asymmetrisch?

Minkowski-Diagramme

Linien der Gleichzeitigkeit aus Sicht des Reisenden



http://de.wikipedia.org/wiki/Zwillingsparadoxon

Formalismus: Lorentz-Transformation

Bekannt: Galilei-Transformation

- Translation in Raum (3 Parameter) und Zeit (1 Parameter)
- Rotation im Raum (3 Parameter)
- relative Geschwindigkeit (3 Parameter) ← Dynamik

Betrachte speziell ein Inertialsystem IS', das sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ gegenüber IS bewegt, mit $\vec{r}'(0) = \vec{r}(0)$:

$$t' = t, \qquad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \qquad (*)$$

Neu: fasse Zeit und Raum als verschiedene Komponenten eines einzigen Vektors auf:

$$t, \vec{r} \longrightarrow \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \left(\text{für } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

Damit lässt sich obige Galilei-Trafo $*$ in Matrixform schreiben:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_x}{c} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v_y}{c} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v_z}{c} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{(nicht-relativistisch)}$$

Speziell für „Galilei-Boost" in x-Richtung mit $\beta = \frac{v}{c} \equiv \frac{v_x}{c}$:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Jetzt relativistisch: Lorentz-Boost in x-Richtung:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad \beta = \frac{v}{c} ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

In Koordinaten: $ct' = \gamma ct - \beta\gamma x \qquad y' = y$

$$x' = -\beta\gamma ct + \gamma x \qquad z' = z$$

Nichtrelativistischer Grenzfall: $c \to \infty \Rightarrow \gamma \to 1$

$\Rightarrow x' = \gamma(x - vt) \to x - vt ; \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \to t$ o.k.

Transversale Raumkomponenten (hier y, z) sind unverändert, können also im Folgenden weggelassen werden: $\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$

Umkehrtransformation: $v \to -v$, also $\beta \to -\beta$:

$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$. Damit muss für die Verkettung $KS \leftarrow KS' \leftarrow KS$ die Identität folgen:

$$\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}}_{\det = 1} = \underbrace{\gamma^2}_{= \frac{1}{1-\beta^2}} (1-\beta^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\det = 1}$$

Bemerkung: Boosts in x-Richtung bilden Gruppe.

Betrachte nun ein Teilchen, das sich in KS' mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung bewegt:

$$x'(t) = u't' \qquad \text{(Teilchen im Ursprung für } t=0\text{)}$$

$$\frac{dx'(t)}{dt'} = u' \qquad \text{Geschwindigkeit in KS'}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ u't' \end{pmatrix} = \gamma t' \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ u' \end{pmatrix} = \gamma t' \begin{pmatrix} c+\beta u' \\ \beta c + u' \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit u in KS?

$$\boxed{u = \frac{dx}{dt} \overset{\text{hier}}{=} \frac{x}{t} = c\,\frac{\beta c + u'}{c + \beta u'} = \frac{v + u'}{1 + \frac{v u'}{c^2}}}$$

Relativistische Addition der Geschwindigkeiten

Grenzfall $u' \to c$ (ultrarelavistische Teilchen bzw. Licht):

$$u = \frac{v + c}{1 + \frac{v}{c}} = c\,\frac{v+c}{c+v} = c$$

Also erhält der Lorentz-Boost die Lichtgeschwindigkeit.

allgemeiner Lorentz-Boost (spezielle Lorentz-Transformation):

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{r}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\vec{v}^T}{c}\gamma \\ -\frac{\vec{v}}{c}\gamma & 1 + \frac{\vec{v}\vec{v}^T}{v^2}(\gamma - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Lorentz-Boosts bilden eine Gruppe (Untergruppe der Lorentz-Transformationen, die auch Raumdrehungen einschliessen).

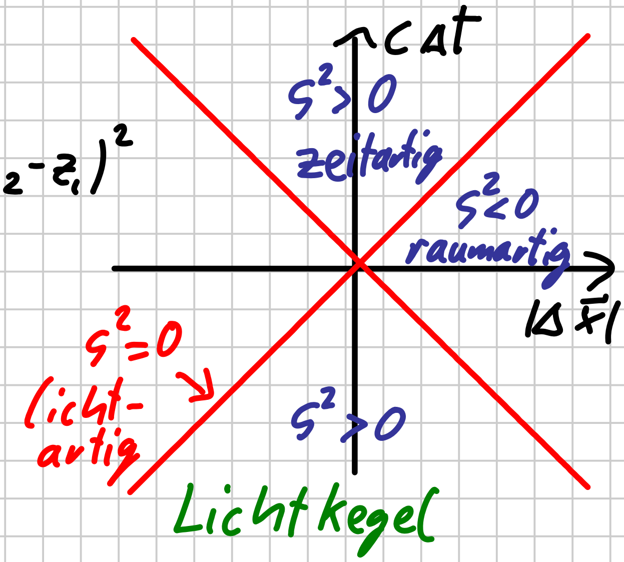
Minkowski-Raum, invarianter Abstand

Der Minkowski-Raum der Vierervektoren $x^\mu \equiv \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}$ ist ein nicht-euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt

$$x_\mu x'^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{metrischer Tensor}} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Entsprechend wird das Abstandsquadrat zwischen 2 Ereignissen definiert als:

$$s_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2$$
$$= c^2(\Delta t)^2 - |\Delta \vec{x}|^2$$



Speziell gilt für jedes Ereignispaar Emission / Absorption eines Photons: $s_{12}^2 = c^2(\Delta t)^2 - c^2(\Delta t)^2 = 0$

Lorentz-Transformationen lassen alle Abstandsquadrate invariant: $s'^2_{12} = s_{12}^2$. Für Lorentz-Boosts besteht eine starke Analogie zu Rotationen (die $|\vec{x}|^2$ invariant lassen): $\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}$; $\alpha = \operatorname{artanh}\left(\frac{v}{c}\right)$