Physik I Ergänzung - 2. Vorlesung 11.11.2005

Notiztitel 10.11.2005

Inhalt:

- Nachtrag Exp. Fallbeschleunigung
- Vektoren, Vektorraum (mit Skalarmultiplikation)
  (Halliday: · Vektorgröße: Richtung + Betrag
  · Dimensionen / Einheiten
- Skalarprodukt, Winkel
  Halliday: · Effektivgeschwindigkeit
  · Einheitsvektor
- Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

3 Arten Multiplikation

- (· Koordinatendrehung)
- Basis, Dimension
  (Wieso Wurfbahn in 2d?)
- Fallbeschleunigung: Auswertung ✓
- Kreisbewegung ($\vec{a}$, $\overline{\vec{v}}$, $\overline{|\vec{v}|}$) ✓
  Verallg.: Spirale
  Dimensionsanalyse: $R \propto \frac{v^2}{a}$
- nicht-glm Beschleunigung: Wasserski ✓
  (Durchschnitts- vs. Effektivgeschwindigkeit, Beschleunigung) ✓

Nachtrag: Auswertung Fallexperiment

Δx	Δt	$g = \frac{2\Delta x}{(\Delta t)^2}$
0.1	0.141	10.06
0.4	0.284	9.92
0.9	0.425	9.97

(etwas zu groß, vermutlich Strecken überschätzt)

1.1 Vektorräume

Definition Vektorraum: Sei K ein Körper. Eine Menge V heisst **K-Vektorraum**, falls gilt:

(i) $(V,+)$ ist abelsche Gruppe

(ii) Es existiert eine **Skalarmultiplikation**

$$\cdot : K \times V \to V : (a, X) \mapsto aX \quad \text{mit}$$

$$(a\cdot b)\cdot X = a\cdot(b\cdot X) \quad \forall\, a,b \in K,\ X \in V$$

$$a\cdot(X+Y) = a\cdot X + a\cdot Y \quad \forall\, a \in K,\ X,Y \in V$$

$$(a+b)\cdot X = a\cdot X + b\cdot X \quad \forall\, a,b \in K,\ X \in V$$

$$1\cdot X = X \quad \forall\, X \in V$$

Bem: $0\cdot X = \vec{0} \quad \forall X \in V$

$-X = (-1)X \quad \forall X \in V$

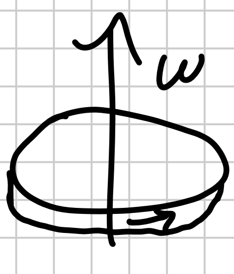
Beispiele für Vektorräume:

1. jeder Körper
2. (n-tupel von Körperelementen (n-faches direktes Produkt)

   $K^N = \{X = (x_1, \dots, x_n)\},\ +$)
3. Verschiebungsvektoren / Pfeile: Aneinanderhängen, Strecken
4. Beispiele aus der Physik: $\vec{r},\ \vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r},\ \vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}$

   $\vec{p},\ \vec{F}$

   $\vec{\omega}$ Winkelgeschwindigk. (Pseudovektor)



Definition lineare Unabhängigkeit: Sei V ein K-VR. Ein n-Tupel $(X_1, \dots, X_n)$ mit $X_i \in V$ heisst **linear unabhängig**, falls aus

$$\underbrace{a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = 0}_{\text{Linearkombination}} \text{ mit } a_i \in K$$

folgt: $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, andernfalls **linear abhängig**.

Definition lineares Erzeugnis: Die Menge aller Linearkombinationen einer Menge $\{X_1, \dots, X_n\}$ von Vektoren mit $X_i \in V$ heisst **Erzeugnis** $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$

Definition Basis: Sei V K-Vektorraum. $(X_1, \dots, X_n)$ mit $X_i \in V$ heisst eine **Basis** von V, falls
(i) $V = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ und (ii) $(X_1, \dots, X_n)$ ist linear unabhängig.
Dann heisst n die **Dimension** von V.

Bemerkung: Sei $B = (X_1, \dots, X_n)$ Basis von V. Dann lässt sich jeder Vektor $X \in V$ eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren schreiben: $X = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$, d.h. (für gegebene Basis) ist die **Komponentenabbildung** $k_B : V \to K^n : X \to (a_1, \dots, a_n)$ eindeutig.

Definition Skalarprodukt: Sei V VR, K Körper.

Eine Abbildung $\phi: V \times V \to K,\ (X,Y) \mapsto \phi(X,Y)$ heisst **symmetrische Bilinearform** oder **Skalarprodukt**, falls

(i) $\phi(X,Y) = \phi(Y,X) \quad \forall X,Y \in V$

(ii) $\phi(aX+Y, Z) = a\,\phi(X,Z) + \phi(Y,Z) \quad \forall a \in K,\ X,Y,Z \in V$

Ab jetzt: Spezialisation auf Körper $\mathbb{R}$

Definition Euklidischer Vektorraum: Sei V endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\phi: V \times V \to \mathbb{R}$ ein **positiv definites** Skalarprodukt, d.h. $\phi(X,X) > 0 \ \forall X \in V \setminus \{0\}$.

Dann heisst (V,ϕ) ein **Euklidischer Vektorraum** oder **reeller, endlichdimensionaler Hilbert-Raum.**

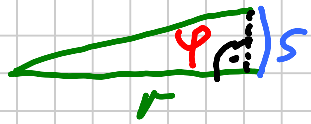
Definition Norm (Betrag), Abstand, Winkel: Sei (V,ϕ) Euklidischer Vektorraum. Für $X,Y \in V$ heisst

(i) $|X| := \sqrt{\phi(X,X)}$ die **Norm** oder der **Betrag** von X.

(ii) $|X-Y|$ der **Abstand** von X und Y.

(iii) für $X,Y \in V \setminus \{0\}$ ist der **Winkel** zwischen X und Y definiert als $\quad \varphi = \arccos\left(\frac{\phi(X,Y)}{|X|\,|Y|}\right)$

Bemerkung: obige Definition des Winkels entspricht für das Standard-Skalarprodukt der geometrischen Definition $\varphi = \frac{s}{r}$ über den Kreisbogen



Definition Orthonormalbasis: Sei (V, ϕ) Euklidischer VR. Eine Basis $B = (B_1, \dots, B_n)$ heisst **Orthonormalbasis** von V (bzgl. ϕ), falls $\phi(B_i, B_j) = \delta_{ij} \quad \forall\ 1 \le i, j \le n$.

Beispiel: $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ist Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$

Weitere Basis: $\vec{e}_x, \vec{e}_x + \vec{e}_y, \vec{e}_z$ mit Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Trägheitstensor mit

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{J} \vec{\omega}$$

Definition Vektorprodukt (Kreuzprodukt in 3 Dimensionen)

Das **Vektorprodukt** ist eine antisymmetrische, bilineare Abbildung $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \times \vec{y}$ mit

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

bzw in Koordinaten:
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

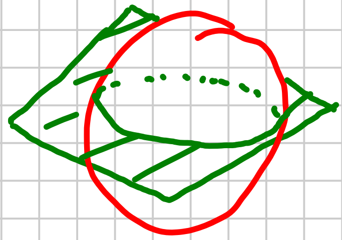
Bemerkung: $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin\varphi$; $\quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

Die Kreisbewegung

(cf. Halliday 4-7)

Betrachte Kreisbahn in xy-Ebene:

$$\vec r^{\,2}(t) = r^2 \text{ konstant}, \qquad z(t) = 0 \quad \forall t$$



(Schnitt von Kugel mit xy-Ebene)

Bilde Ableitungen von $\vec r^{\,2}$:

$$\frac{d}{dt}\vec r^{\,2} = \dot{\vec r}^{\,2} = 2\,\vec r\cdot\dot{\vec r} = 2\,\vec r\cdot\vec v$$

$$\frac{d}{dt} r = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec r\cdot\vec v = 0, \qquad \vec r\perp\vec v \qquad (*)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec r^{\,2} = \ddot{\vec r}^{\,2} = 2(\vec v\cdot\vec v + \vec r\cdot\vec a) = 0 = \frac{d^2}{dt^2} r$$

$$\Rightarrow \quad \vec r\cdot\vec a = -v^2$$

$$a_{\parallel} = -\frac{v^2}{r} \qquad (**)$$

Zentripetalbeschleunigung

Im Fall gleichförmiger Kreisbewegung ist zusätzlich $\vec v^{\,2}(t) = v^2$ konstant

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\vec v^{\,2} = \dot{\vec v}^{\,2} = 2\,\vec v\cdot\vec a = 0 = \frac{d}{dt} v^2$$

$$\Rightarrow \quad \vec v\perp\vec a$$

Da $\vec r, \vec v, \vec a$ alle in 2dimensionaler Ebene und

$\vec v\perp\vec a$ sowie $\vec r\perp\vec v$

folgt $\vec a \parallel \vec r \overset{(**)}{\Longrightarrow} \vec a = -\frac{v^2}{r}\,\hat r; \quad \hat r = \frac{\vec r}{r}$

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Durchschnittsgeschw: $\overline{\vec v} = 0$

Effektivgeschw.: $\overline{|\vec v|} = \bar v = v \neq 0$

2. Ableitung mit Parametrisierung:

$$\vec{r}(t) = r\,[\cos(\omega t)\,\vec{e}_x + \sin(\omega t)\,\vec{e}_y]$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \omega r\,[-\sin(\omega t)\,\vec{e}_x + \cos(\omega t)\,\vec{e}_y]$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \omega^2 r\,[-\cos(\omega t)\,\vec{e}_x - \sin(\omega t)\,\vec{e}_y] = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{r}^{\,2}(t) = r^2; \quad \vec{v}^{\,2}(t) = \omega^2 r^2 \equiv v^2 \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = -\frac{v^2}{r^2}\vec{r} = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$$

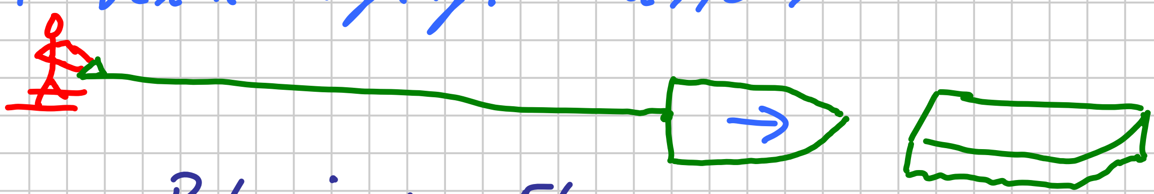
Wichtig: alle Winkel in rad $\in [0, 2\pi]$ einheitenlos

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Mögl. Verallgemeinerung: $\varphi = \varphi(t)$ nichtlinear

z. B. $\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2$

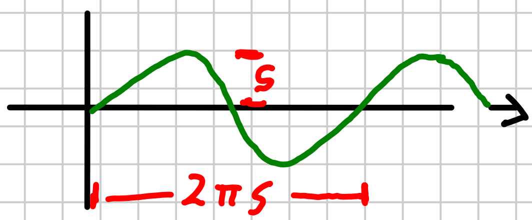
Nicht-glm. Beschleunigung: Wasserski



Modellierung: Bahn in xy-Ebene

mit $v_x = v_{Boot}$ konstant

$$y(x) = s\sin\left(\frac{x}{s}\right)$$



Berechne a) $\vec{x}(t)$

b) $\vec{v}(t)$, $v(t)$, $\overline{v}$

c) $\vec{a}(t)$

$$\vec{x}(t) = v_B \cdot t\,\vec{e}_x + s\sin\left(\frac{v_B t}{s}\right)\vec{e}_y$$

$$\vec{v}(t) = v_B\,\vec{e}_x + v_B\cos\left(\frac{v_B t}{s}\right)\vec{e}_y$$

$$v^2(t) = v_B^2\left(1 + \cos^2\left(\frac{v_B t}{s}\right)\right)$$

$$v(t) = v_B\sqrt{2\left(1 + \cos\left(\frac{2 v_B t}{s}\right)\right)}$$

$$\vec{a}(t) = -\frac{v_B^2}{s}\sin\left(\frac{v_B t}{s}\right)\vec{e}_y$$

$$\overline{v} = v_B$$