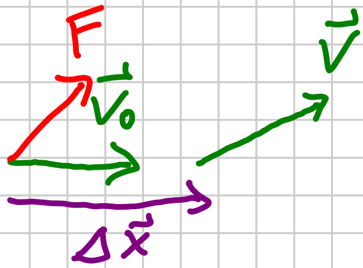
Physik I Ergänzung - 4. Vorlesung 25.11.2005

Notiztitel 24.11.2005

Inhalt

- Allgemein von Kraft geleistete Arbeit ($\vec{v} \not\parallel \vec{a}$)
- Vorbereitung: Matrixmultiplikation, Rotation
- Galilei-Transformation
- Coriolis-Kraft, Zentrifugalkraft

Differentielle Arbeit/Leistung einer allg. Kraft



$$\vec F = m \vec a$$

$$\vec v(t+\Delta t) = \vec v(t) + \vec a(t)\Delta t$$

$$|\vec v(t+\Delta t)|^2 = |\vec v(t)|^2 + |\vec a(t)\Delta t|^2 + 2\,\vec v(t)\cdot\vec a(t)\Delta t$$

$$\vec x(t+\Delta t) = \vec x(t) + \vec v(t)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{K(t+\Delta t) = K(t) + \left(\vec x(t+\Delta t) - \vec x(t)\right)\cdot \vec F}$$

$$K(t) = \frac{1}{2} m |\vec v(t)|^2$$

$$\frac{d}{dt} K(t) = m\,\vec v(t)\cdot\vec a(t) = \vec v(t)\cdot\vec F(t) = \frac{d\vec x}{dt}\cdot\vec F(t)$$

$$dW = dK = \vec F\cdot d\vec x$$

konstante Kraft: $W = \Delta K = \vec F\cdot\Delta\vec x = \vec F\cdot\vec d$

Vorbereitung: Matrixmultiplikation

Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \sum_i x_i y_i$

Vektoren als 3-Tupel von Zahlen aufgefasst (Spalte)

Matrix: 2-dim Tabelle von Zahlen

$n \times m$-Matrix

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Matrix-Vektor-multiplikation: $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{Mult. mit } n\times m\text{-Matrix}} \mathbb{R}^n$

$$\vec{y} = A\vec{x} \iff y_i = \sum_j A_{ij} y_j$$

Matrix-Matrix-Multiplikation:

$$A \in \mathbb{R}^{n \times m},\ B \in \mathbb{R}^{m \times o} \Rightarrow AB \in \mathbb{R}^{n \times o} \text{ mit}$$

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

Transponierte Matrix: $B = A^T \iff b_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j$

Orthogonale Matrix: lässt Skalarprodukte (also Längen und Winkel) invariant

$$(A\vec{x}) \cdot (A\vec{y}) = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} x_j\Big)\Big(\sum_k a_{ik} y_k\Big)$$

$$= \sum_{ijk} x_j a_{ij} a_{ik} y_k$$

$$= \sum_{jk} x_j \left(\sum_i a_{ij} a_{ik}\right) y_k \overset{!}{=} \sum_j x_j y_k = \vec{x} \cdot \vec{y} \quad \forall \vec{x}, \vec{y}$$

$$\Leftrightarrow \sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \Leftrightarrow A^T A = \mathbb{1}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = A^T \quad \forall A \in O(n)$$

Beispiele: • $\mathbb{1}$ ist orthogonal: $\mathbb{1}^T \mathbb{1} = \mathbb{1}\mathbb{1} = \mathbb{1}$

• $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (Spiegelung an xy-Ebene, d.h. $z \leftrightarrow -z$ ist orthogonal)

• $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (Punktspiegelung am Ursprung)

• $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Rotation 90° um z-Achse; $y \to x$, $x \to -y$

• $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Rotation Winkel φ um z-Achse)

orthogonale Transformationen / Matrizen bilden Gruppe: $A, B \in O(3) \Rightarrow (AB)^T AB = B^T A^T A B$

$$= B^T B = \mathbb{1}$$

nicht-kommutativ!

Allgemeine Rotation $R \in SO(3)$ auszudrücken als Produkt von Rotationen um x, y, z-Achse ($\rightsquigarrow$ Euler-Winkel)
3 Parameter: α, β, γ

Allgemeine Galilei-Transformation

vermittelt zwischen Inertialsystemen

Teiltransformationen:

$$\left.\begin{array}{l} t \to t' = t + t_0 \\ \vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} + \vec{x}_0 \end{array}\right\} \text{Homogenität}$$

$$\vec{x} \to \vec{x}' = R\,\vec{x} \qquad \text{Isotropie}$$

R: Drehmatrix

$$\vec{x} \to \vec{x}' = -\vec{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}_0 t \\ \vec{v} \to \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0 \end{array}\right\} \text{Rel. der Geschwindigkeit}$$

Folgerungen:

$$t_1 - t_2 = t_1' - t_2'$$

$$|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = |\vec{x}_1' - \vec{x}_2'|$$

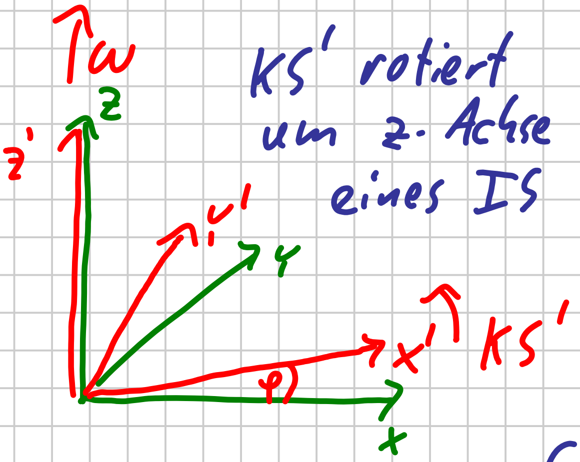
$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = |\vec{v}_1' - \vec{v}_2'|$$

allg. Galilei-Trafo:

$$\vec{x}, t \longrightarrow \vec{x}' = R\vec{x} - \vec{v}_0 t - \vec{x}_0 , \quad t' = t - t_0$$

10 Parameter

Rotierendes Bezugssystem: Coriolis-Kraft, Zentrifugalkraft

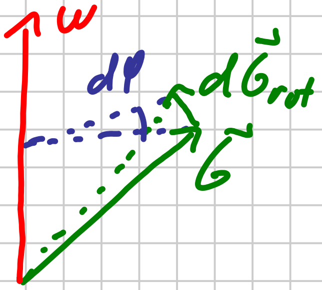


KS' rotiert um z-Achse eines IS

Vektorkomponenten entlang $\vec{\omega}$ invariant:

$$\vec{\omega}\cdot\vec{x} = \vec{\omega}\cdot\vec{x}\,' \Leftrightarrow x_{\parallel} = x_{\parallel}'$$

Infinitesimale Drehung:



Sei $\vec{G}$ konstant in KS'

$$(d\vec{G})_{rot} = d\vec{\varphi}\times\vec{G} = \vec{\omega}\times\vec{G}\,dt$$

$$(dG)_{IS} = \vec{\omega}\times\vec{G}\,dt + (dG)_{KS'} \quad \text{für } \vec{G} \text{ bel.}$$

$\Rightarrow$ Zeitableitung $\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{IS} = \left(\frac{dG}{dt}\right)_{KS'} + \vec{\omega}\times\vec{G}$

für beliebige Vektoren, d.h. Operatorgleichung

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{IS} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{KS'} + \omega\times$$

Anwendung auf Ortsvektoren, Koordinatensysteme sollen zum Zeitpunkt t_0 übereinstimmen: $\vec{r}(t_0) = \vec{r}\,'(t_0)$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{IS} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{KS'} + \vec{\omega}\times\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega\times\vec{r}\,' \qquad (t=t_0)$$

definiere $\dot{\vec{r}} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{IS}$; $\dot{\vec{r}}\,' = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{KS'}$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}\,' + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{IS} = \left(\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{KS'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right]\right)_{IS}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{KS'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right]\right)_{KS'} + \omega\times\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)_{KS'} + \omega\times\vec{r}\right]$$

$$= \left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)_{KS'} + \omega\times\left(\frac{dr}{dt}\right)_{KS'} + \omega\times\left(\frac{dr}{dt}\right)_{KS'} + \omega\times\omega\times\vec{r}'$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Kräftefreies Teilchen: $\ddot{\vec{r}} = 0$

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{-2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis-Kraft}} \underbrace{-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}}$$

$$= m\omega^2(\vec{r} - r_{\parallel}\hat{\omega})$$

Coriolis-Kraft nicht bestimmend für Drehrichtung von Wasserwirbeln!