Physik I Ergänzung - 5. Vorlesung 2.12.2005

Notiztitel 29.11.2005

Inhalt

- Ende Coriolis-Kraft: o Wirbelstürme

  rot. System nicht homogen, nicht isotrop!

- Koordinatensysteme im $\mathbb{R}^3$:

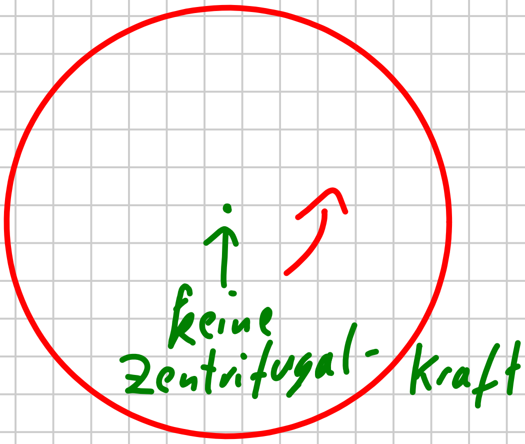
  kartesische Koordinaten, Zylinder- und Kugelkoordinaten

- Kraftfeld → Energie: Linienintegral

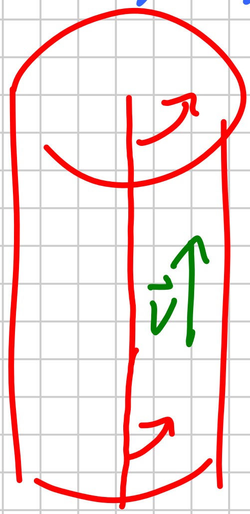
  Berechnung der Verschiebungsarbeit bei kons. Kraft

  Bsp: nicht konservative Kraft: $\frac{1}{2}\vec{k} \times \vec{r}$

Abschluss rotierende Bezugssysteme



Verletzung der Homogenität



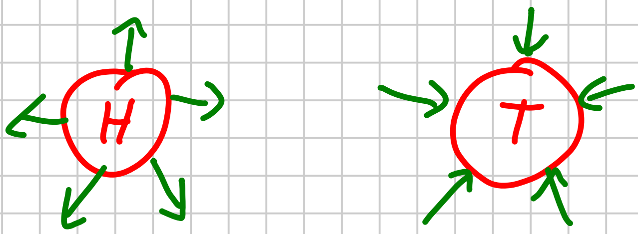
keine Coriolis-Kraft für $\vec{v} \parallel \vec{\omega}$

Verletzung der Isotropie

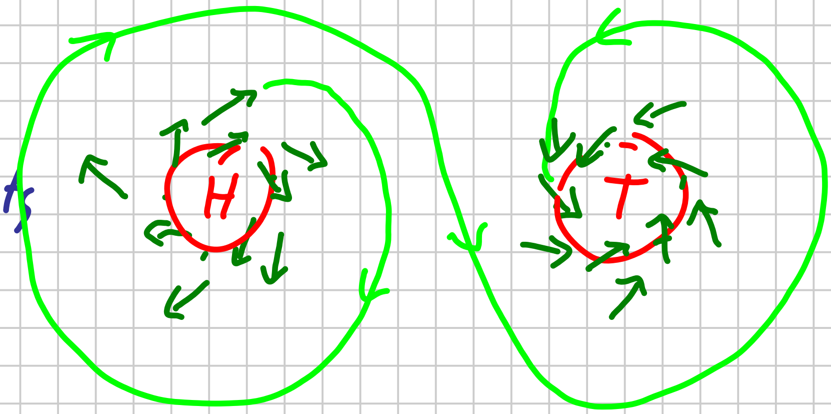
Drehachse zeichnet aus:
- eindimensionale Punktmenge
- Richtung

Wichtigste Konsequenz der Coriolis-Kraft: Windwirbel

a) ohne Coriolis-Kraft: Strömung entlang Druckgefälle



b) auf Nordhalbkugel: Ablenkung nach rechts
⇝ Stabilisierung der Luftdruckunterschiede



Extrembeispiel: Hurrikane (Fotos)

Koordinatensysteme in $\mathbb{R}^3$

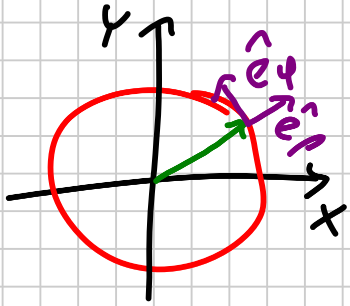
a) kartesische Koordinaten

x, y, z : $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Einheitsvektoren: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ fest

$= x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$

Volumen: $\underbrace{\int dV}_{= d^3r} = \int dx \int dy \int dz$

b) Zylinder Koordinaten ρ, φ, z:



$$\vec{r} = \rho\,\hat{e}_\rho + z\,\hat{e}_z$$

$$d\vec{r} = \hat{e}_\rho\, d\rho + \rho\,\hat{e}_\varphi\, d\varphi + \hat{e}_z\, dz$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Volumen: $\int dV = \int \rho\, d\rho \int d\varphi \int dz$

c) Kugelkoordinaten r, ϑ, φ

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r$$

$$d\vec{r} = \hat{e}_r\, dr + \hat{e}_\vartheta\, r\, d\vartheta + \hat{e}_\varphi\, r \sin\vartheta\, d\varphi$$

Volumen: $\int dV = \int r^2 dr \int \sin\vartheta\, d\vartheta \int d\varphi$

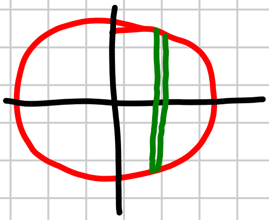
Wahl des KS hängt von Randbedingungen und Integranden ab.

Anwendungsbeispiele: Integration in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

Fläche Kreis: a) $A = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \; 1$

$x = R\sin(\varphi)$

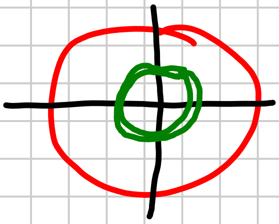
$dx = R\cos(\varphi)\, d\varphi$



a)

$$= 2 \int_{-R}^{R} dx \sqrt{R^2-x^2}$$

$$= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\cos(\varphi) d\varphi \; R\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}$$



b)

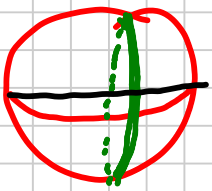
$$= 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \underbrace{\cos^2(\varphi)}_{\frac{1}{2}[1+\cos(2\varphi)]} = \pi R^2$$

b) Einfacher in Zylinderkoordinaten:

$$A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\, dr \; 1 = 2\pi \, \tfrac{1}{2} R^2 = \pi R^2$$

Jacobi-Determinante

Fläche Kugel: a) Zylinder-Koordinaten:



$$\rho^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{R^2 - z^2}$$

$$V = 2 \int_0^R \pi \rho^2(z) dz = 2 \int_0^R \pi (R^2 - z^2) dz$$

$$= 2\pi R^3 - 2\pi \cdot \tfrac{1}{3} R^3 = \tfrac{4}{3} \pi R^3$$

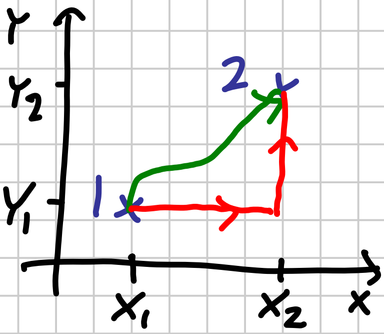
Jacobi-Det.

b) einfacher: Kugelkoordinaten: $V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(\vartheta) d\vartheta \int_0^R r^2 dr \; 1$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d\cos(\vartheta) \int_0^R r^2 dr \; 1 = 4\pi \int_0^R r^2 dr = \tfrac{4}{3} \pi R^3$$

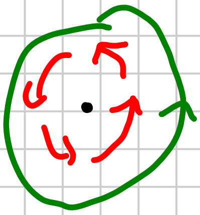
Linienintegral und Kraftfeld

Berechnung Arbeit bei konservativer Kraft



$$W_{1\to2} = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F_x(x, y_1) + \int_{y_1}^{y_2} dy\, F_y(x_2, y) \quad \text{(roter Weg)}$$

Beispiel für nichtkonservative Kraft: $\vec F(\vec r) = \frac{1}{2}\, \vec k \times \vec r$



Für Kreisbahn: $\Delta W = \oint \vec F(\vec r)\cdot d\vec r$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi\, \tfrac{1}{2} k \rho\, \hat e_\varphi \cdot \rho\, \hat e_\varphi\, d\varphi$$

$$= \pi k \rho^2$$

$$\vec\nabla \times \vec F = \frac{1}{2} \overset{A}{\vec\nabla} \times (\overset{B}{\vec k} \times \overset{C}{\vec r}) =$$

Anwendung BAC-CAB-Regel: $\vec A \times (\vec B \times \vec C) = \vec B(\vec A\cdot\vec C) - \vec C(\vec A\cdot\vec B)$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec k(\vec\nabla\cdot\vec r) - \partial_i \vec r\,(\hat e_i\cdot\vec k)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\vec k - \hat e_i\,(k_i)\right) = \vec k \qquad \text{konstant!}$$

Satz von Stokes: Linienintegral über Vektorfeld entlang geschlossenem Pfad = Integral der Rotation über eingeschlossene orientierte Fläche:

$$\iint_S d\vec A\cdot(\vec\nabla\times\vec F) = \oint_{\delta S} d\vec r\cdot\vec F$$

Beispiel von oben: Pfad in xy-Ebene, $\vec A = A\,\hat e_z$

$$\rightsquigarrow \oint_C = k\cdot \text{Fläche}_C$$