Physik I Ergänzung – 6. Vorlesung 9.12.2005

Notiztitel 05.12.2005

- Ankündigung: (i) Befragung am 15.12.
  (ii) Kurzwiederholung am 16.12.
- Abstimmung: Wie viel Relativitätstheorie?
- Ende Wegintegrale
- Raketengleichung

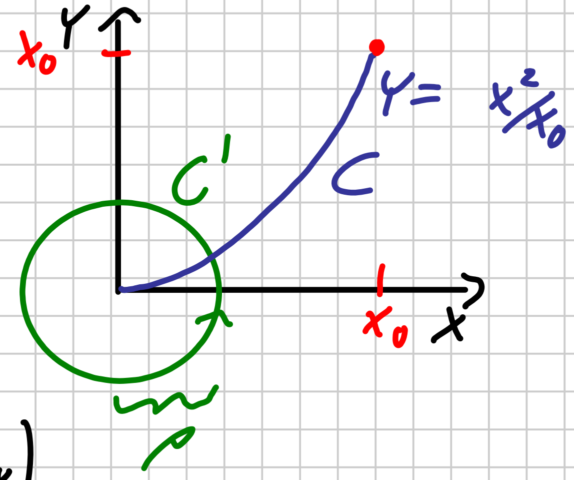
  Kraftstoß: $dp = F\,dt$

  Kontaktzeit – mittlere Kraft (Bsp: Ball)

  Rakete: diskreter + kontinuierlicher Masseausstoß

Nachlese Linienintegrale und Verschiebungsarbeit

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{k}\times\vec{r} = \frac{1}{2}k\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} \quad \text{für } \vec{k} = k\,\hat{e}_z$$



a) Berechne $W_C = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$

$$\vec{r}(x) = \begin{pmatrix}x\\x^2/x_0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dx} = \begin{pmatrix}1\\2x/x_0\\0\end{pmatrix}$$

$$W_C = \int_0^{x_0} dx\ \frac{1}{2}k\begin{pmatrix}-x^2/x_0\\x\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2x/x_0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{x_0} dx\ \frac{1}{2}k\left[-x^2/x_0 + 2x^2/x_0\right]$$

$$= \frac{1}{6}k\,x_0^2$$

b) Berechne $W_{C'} = \oint_{C'} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$

$y(x)$ keine Funktion mehr (sondern Relation)

$\rightsquigarrow$ wähle Parametrisierung $\quad \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix}\rho\cos(\varphi)\\\rho\sin(\varphi)\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \rho\begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\\cos(\varphi)\\0\end{pmatrix}; \quad \vec{F}(\varphi) = \frac{1}{2}k\begin{pmatrix}-\rho\sin(\varphi)\\\rho\cos(\varphi)\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W_{C'} = \int_0^{2\pi} d\varphi\ \vec{F}(\vec{r}(\varphi))\cdot\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \frac{1}{2}k\rho^2\int_0^{2\pi} d\varphi\begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\\cos(\varphi)\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\\cos(\varphi)\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}k\rho^2\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)\right] = k\pi\rho^2$$

Kraftstoß und Raketengleichung

Newtons 2. Gesetz: $\vec{F} = m\vec{a}$

allgemeiner (gilt auch relativistisch mit $t \to \tau$): $\boxed{\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}}$

(nichtrelativistisch: $\vec{p} = m\vec{v} \overset{m\text{ konst.}}{\Longrightarrow} \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a}$)

$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ gilt sowohl für einzelnes Teilchen (mit $\vec{F} \equiv \vec{F}_{ges}$) als auch für beliebige Teilsysteme mit $\vec{F} \equiv \sum_i \vec{F}_{i,ges} = \vec{F}_{i,\text{äußere}}$ (Summe der Gesamtkräfte oder Summe der äußeren Kräfte – die inneren heben sich (laut Newton-III weg).

Kraftstoß: Aus $\vec{F}dt = d\vec{p}$ folgt für konstante Kraft: $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$.

Allgemeiner: $\Delta\vec{p} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt'\,\vec{F}(t')}_{=:J} = \Delta t\,\overline{\vec{F}(t)}$ $\quad \overline{\vec{F}(t)} \equiv \vec{F}_{gem}$

ConceptTest: Wie groß sind mittlere Normal-Kraft und -Beschleunigung auf einen hüpfenden Ball (Masse 50g)

a) gemittelt über die volle Periode $T = 1s$

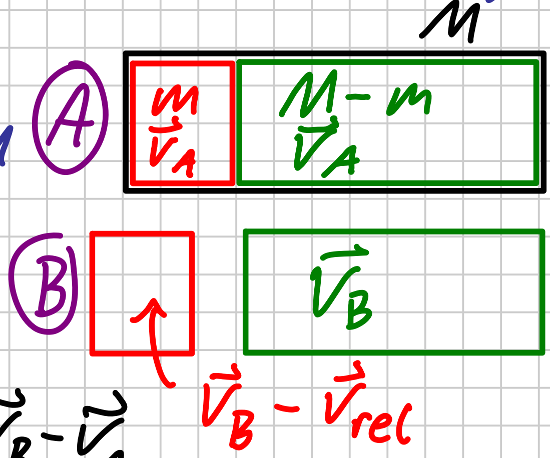
b) gemittelt über die Kontaktzeit $T_{Kontakt} = 0{,}1s$?

zu a) $\Delta\vec{P}_{gem,T} = 0 = (-mg + \overline{F}_N)\hat{e}_z \Rightarrow \overline{F}_N = mg,\ \overline{a}_N = g$

zu b) $-mgT + \overline{F}_N T_{Kontakt} = 0 \Rightarrow \overline{F}_N = mg\frac{T}{T_{Kontakt}} = 10mg$

Jetzt: Rakete ohne äußere Kraft (Gravitation, Reibung)

a) zunächst allgemein: Abstossen eines Massenteils m von Gesamtmasse M mit Relativgeschwindigkeit v_{rel}:



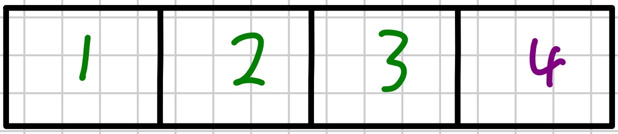
$$M\vec{v}_A = m(\vec{v}_B - \vec{v}_{rel}) + (M-m)\vec{v}_B$$

Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v} := \vec{v}_B - \vec{v}_A$

$$\cancel{M\vec{v}_A} = m(\cancel{\vec{v}_A} + \Delta\vec{v} - \vec{v}_{rel}) + (M-m)(\cancel{\vec{v}_A} + \Delta\vec{v})$$

$$\vec{0} = m(\cancel{\Delta\vec{v}} - \vec{v}_{rel}) + (M - \cancel{m})\Delta\vec{v}$$

$$\boxed{\Delta\vec{v} = \frac{m}{M}\vec{v}_{rel} = -\frac{\Delta M}{M}\vec{v}_{rel}} \qquad (\Delta M = -m)$$



b) diskretes Modell:

Stufen 1, 2 und 3 werden nacheinander mit Relativgeschwindigkeit v_{rel} abgestoßen (Teil 4: Kapsel) mit $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$, Anfangsbed. $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = 0$

Impulserhaltung: $\sum_{i=1}^{4} m_i \vec{v}_i = \vec{p}_{ges}$ ist erhalten.

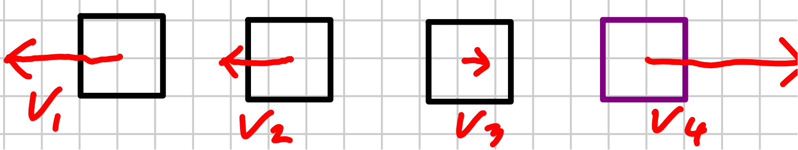
1-dim Bewegung und Anfangsbedingung $v_i = 0$:

nach 1. Trennung: $v_1 = -\frac{3}{4}v_{rel}$; $v_2 = v_3 = v_4 = \frac{1}{4}v_{rel}$

nach 2. Trennung: $v_2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right)v_{rel}$; $v_3 = v_4 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)v_{rel}$

nach 3. Trennung: $v_3 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)v_{rel}$; $v_4 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)v_{rel}$

i	1	2	3	4
v_i/v_{rel}	$-\frac{9}{12}$	$-\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{13}{12}$



b) Realistischeres Modell: Verbrennunggase strömen mit konstanter Relativgeschwindigkeit aus

Betrachte infinitesimale Massenpakete:

$$M d\vec{v} = -dM \, \vec{v}_{rel}$$

$$\boxed{M \frac{d\vec{v}}{dt} = M\vec{a} = -\vec{v}_{rel} \frac{dM}{dt}}$$ 1. Raketengleichung

Frage: was ist $\vec{v}(t)$?

Betrachte (der Einfachheit halber) 1-dim Bewegung:

$$dv = -v_{rel} \frac{dM}{M}$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{rel} \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_i = -v_{rel} \left[\ln(M) \right]_{M_i}^{M_f} = -v_{rel} \left[\ln(M_f) - \ln(M_i) \right]$$

$$\boxed{v_f - v_i = v_{rel} \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)}$$ 2. Raketengleichung

Für beliebigen Zeitpunkt: $\boxed{v(t) = v_i + v_{rel} \ln\left(\frac{M_i}{M(t)}\right)}$

Vergleich: $\frac{v_f}{v_{rel}} = \frac{13}{12} \approx 1{,}08$ diskret; $\frac{v_f}{v_{rel}} = \ln(4) \approx 1{,}39$ kont.

Frage: Bewegungsgleichung unter Einfluß der Gravitation?

allg: $M(t)\, \vec{a}(t) = -\vec{v}_{rel} \frac{dM(t)}{dt} + \vec{F}_G(\vec{r}(t))$ integrieren.

Spezialfall $F_G = -Mg$, d.h. G-Beschleunigung konstant:

$$v(t) = v_i + v_{rel} \ln\left(\frac{M_i}{M(t)}\right) - gt$$