Physik I Ergänzung - 7. Vorlesung 16.12.2005

Notiztitel 09.12.2005

Inhalt

- Drehungen und Rotationsmatrizen (Buch-Beispiel)
- Trägheitsmoment und Steinerscher Satz
  I für Hohlzylinder, Quader, dünnen Stab
- Experiment: Fallbrett
- Rotation um beliebige Achse – Trägheitstensor
- Kurzwiederholung Physik I (V+E)

Drehung Bücher:

$y \to -x$, $x \to y$ $\quad$ $z \to -y$, $y \to z$ $\quad$ $y \to x$, $x \to -y$

$$R = R_z^{-1} R_x R_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_y$$

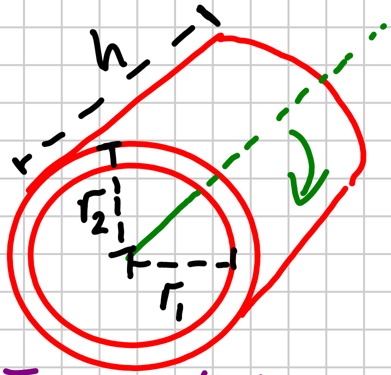
$z \to x$, $x \to -z$

Trägheitsmoment und Steinerscher Satz

Allgemein: $I = \int \rho^2 \, dm$ (ρ: "$r_\perp$" Abstand von Dreh-

$= \int r_\perp^2 \, dm$ achse $\hat{=}$ Zylinderkoordinaten)

Beispiele a) Hohlzylinder (um Symmetrieachse)



$$I = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} r_\perp dr_\perp \; r_\perp^2 \rho_0$$

$$= h \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4}(r_2^4 - r_1^4)\, \rho_0$$

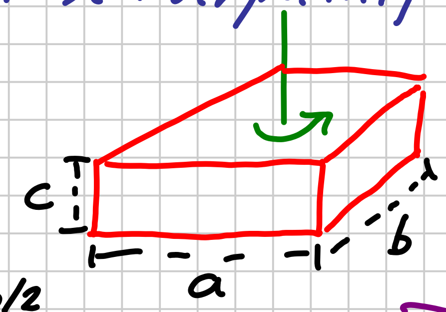
$$M = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} r_\perp dr_\perp \, \rho_0$$

$$= h \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\, \rho_0$$

[vgl. Halliday Tabelle 11-2 b ($\rightsquigarrow$ c, a)]

$$\Rightarrow \frac{I}{m} = \frac{1}{2} \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2)$$

b) Quader (um Achse $\perp$ Oberfläche durch Schwerpunkt)



$$I = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \; \rho \, (x^2 + y^2)$$

$$= c\rho \left(\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \; x^2 + \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \; y^2 \right)$$

$$= c\rho \left(b \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2} + a \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} \right)$$

$$= c\rho \left(b \frac{a^3}{12} + a \frac{b^3}{12} \right)$$

$$= \underbrace{abc}_{=V} \rho \, \frac{a^2 + b^2}{12} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

(vgl. Halliday, Tab. 11-2 i)

Spezialfall: dünner Stab ($L \equiv a \gg b$) um Schwerpunkt: $I = \frac{1}{12} M L^2$ (vgl. Halliday, Tabelle 11-2 e)

Dünner Stab um Ende?

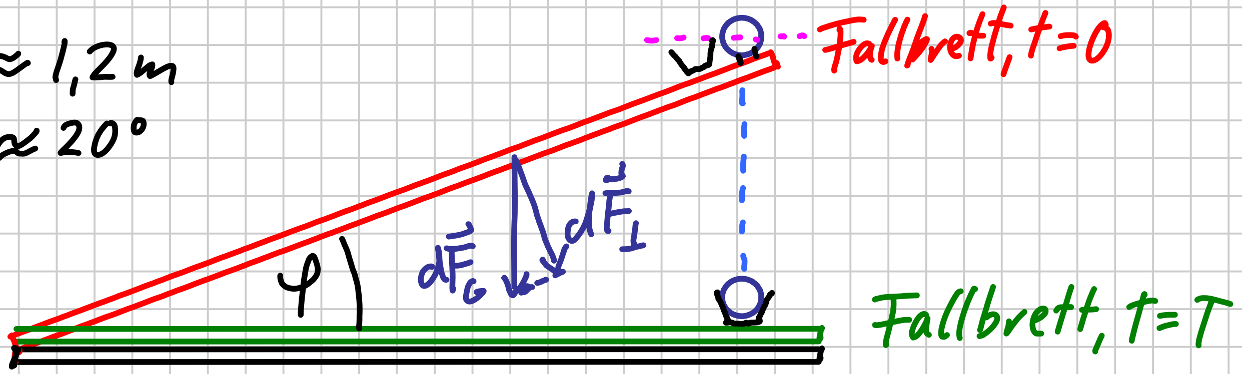
(i) direkt: $I = \int_0^L dx \frac{M}{L} x^2 = \frac{M}{L} \left[\frac{1}{3} x^2\right]_0^L$
$= \frac{1}{3} M L^2$

(ii) mit Steinerschem Satz:

$$I = \frac{1}{12} M L^2 + M \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M L^2$$

Experiment: Fallbrett

$L \approx 1{,}2\,m$
$\varphi_0 \approx 20°$



Beobachtung: Die Kugel landet im Becher, obwohl ihr Unterrand anfangs unter der Becherkante war.

Folgerung: Becher (und Brettende) fallen schneller als die Kugel – wieso?

Drehmoment: $\tau = \int_0^L r\, dF_\perp = \int_0^L r \underbrace{dm}_{\frac{M}{L} dr} g \cos(\varphi)$

$= \frac{M g \cos(\varphi)}{L} \int_0^L r\, dr$

$= \frac{1}{2} L M g \cos(\varphi) \approx \underbrace{\frac{1}{2} L M g}_{\text{konstant}}$

Fehlerabschätzung:
$\varphi \leq \varphi_0 \approx 20° \approx 0{,}3$ (rad)
$\cos(\varphi) = 1 - \underbrace{\frac{\varphi^2}{2}}_{\approx 0{,}05} + \mathcal{O}(\varphi^4)$

Trägheitsmoment (s.o.): $I = \frac{1}{3} M L^2$

Winkelbeschleunigung: $\tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \alpha t = \frac{3}{2}\frac{g}{L} t$

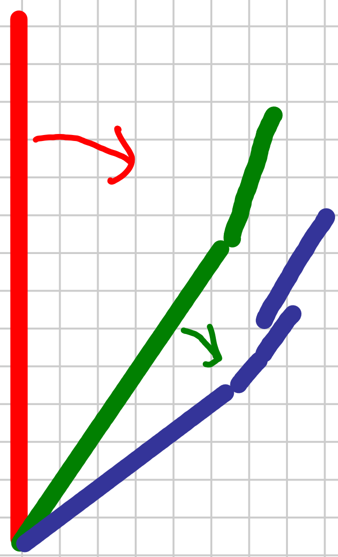
$$v_{Becher,z} = v_{Becher}\cos(\varphi) \approx v_{Becher} \approx v_{Brettende} = \omega L = \frac{3}{2} g t$$

Also: $\boxed{v_{Becher,z}(t) \approx \frac{3}{2} g t > g t = v_{Kugel}(t)}$

Lineare Beschleunigung von Becher/Brettende:

$$\boxed{a_{Becher,z} \approx \frac{3}{2} g > g}$$

Das Brett zwingt also den an seinem Ende fixierten Massen eine um 50% erhöhte Beschleunigung auf (dagegen ist die Beschleunigung für $r < \frac{2}{3} L$ geringer)!



Aus diesem Grund zerbrechen Schornsteine oft beim Umfallen (nach einer Sprengung).

Rotation um beliebige Achse

Trägheitsmoment → Trägheitstensor

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \longrightarrow K = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I}\,\vec{\omega}$$

(allgemeines Skalarprodukt)