Mathematische Vorbereitung: Ellipsen

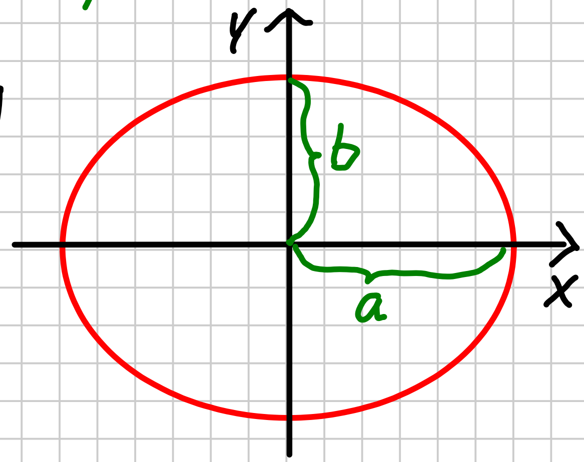
Motivation: Wir werden Gleichungen für Kepler-Bahnen erhalten, denen man nicht ohne weiteres ansieht, dass sie (u.a.) Ellipsen beschreiben.

Äquivalente Definitionen für Ellipsen:

(i) (x,y) mit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

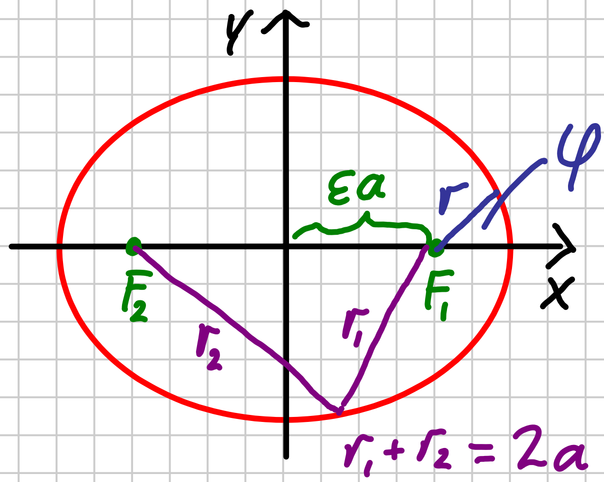
für Halbachsen a, b

(für $a = b \equiv R$: $x^2 + y^2 = R^2$ Kreisg.)



(ii) Menge von Punkten, deren Abstandssumme zu 2 Brennpunkten F_1, F_2 konstant ist:

$$r_1 + r_2 = 2a$$



(für $F_1 = F_2$: Abstand konstant $2a/2 = a \equiv R$)

(iii) Punkte (r, φ) mit $\boxed{r(\varphi) = \dfrac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi)}}$; $0 \leq \varepsilon < 1$

(Abstand r von Brennpunkt F_1, Winkel zur Hauptachse)

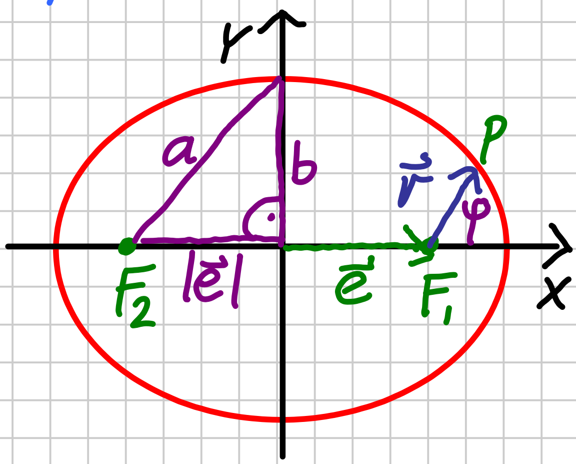
dabei: Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ $(b \leq a)$

semilatus rectum ≡ „Parameter" $p = \dfrac{b^2}{a}$

($\varepsilon = 0 \Rightarrow r(\varphi) = p \equiv R$ konstant, also Kreis)

Bemerkung: $r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi)}$ beschreibt allgemeinere Klasse von Kegelschnitten: auch Parabel (für $\varepsilon = 1$) und Hyperbel (für $\varepsilon > 1$).

Beweis der Äquivalenz der Definitionen:



(ii)⇔(iii): $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{|\vec r|}_{=r} + |\vec r + 2\vec e| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \quad (\vec r + 2\vec e)^2 = (2a - r)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 + 4\,\vec r\cdot\vec e + 4|\vec e|^2 = 4a^2 - 4ar + r^2$$

$$\overset{*}{\Leftrightarrow} \quad ar + \vec r\cdot\vec e = b^2 \qquad (*\ a^2 = b^2 + |\vec e|^2)$$

$$\overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \quad ra + r\varepsilon a\cos(\varphi) = b^2 \qquad (\Delta\ |\vec e| = \varepsilon a)$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{b^2/a}{1+\varepsilon\cos(\varphi)} = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi)}$$

q.e.d.

(iii)⇔(i): $$\frac{x}{a} = \frac{\varepsilon a + r\cos(\varphi)}{a} = \ldots = \frac{\varepsilon + \cos(\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\varphi)}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{r\sin(\varphi)}{b} = \ldots = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sin(\varphi)}{1+\varepsilon\cos(\varphi)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{[\varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)] + (1-\varepsilon^2)[1-\cos^2(\varphi)]}{[1+\varepsilon\cos(\varphi)]^2} = 1$$

q.e.d.

(weiteres Rüstzeug für 9. Ergänzungsvorlesung: Kosinussatz, Integration in Kugelkoordinaten, HR 14.7-9)