Physik I Ergänzung - 9. Vorlesung 13.1.2006

Notiztitel 15.12.2005

Inhalt: Nachtrag: Hagen-Poiseuille-Gesetz

Kugelschalen theorem

Herleitung Kepler-Gesetze

dazu: ConceptTests 2-5

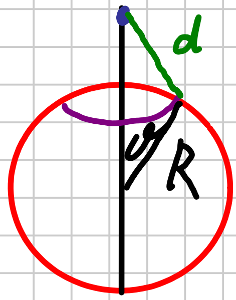
$\approx$

Gravitationsfeld der Erde (allgemeiner: Feld von kugelsymmetrischen Ladungs/Massenverteilungen)

Potential von Punktmasse M an Stelle $\vec{r}_0$: $\phi(\vec{r}) = -\frac{GM}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

$\left(\phi(\vec{r}) = \frac{1}{m} U(\vec{r}) \right)$ Superpositionsprinzip $\rightsquigarrow$

Potential von Massenverteilung: $\phi(\vec{r}) = -\int d^3r' \, \frac{G\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$



Jetzt: Potential der Erde

Rotationssymmetrie Massenverteilung

$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \phi(r) \Rightarrow$ wähle $\vec{r}$ auf z-Achse

Newtons Kugelschalentheorem

Betrachte Ring um z-Achse auf Kugelschale der Dicke dR! mit Radius R

Kosinussatz: $d^2(z,\vartheta) = z^2 + R^2 - 2zR\cos(\vartheta)$

Massenelement $dM = \rho_R \, dV = \rho_R \, d\varphi \, d\cos(\vartheta) \, R^2 dR$

$$\Rightarrow d\phi = -\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} 2\pi R^2 dR \, \frac{d\cos(\vartheta)}{\sqrt{z^2+R^2-2zR\cos(\vartheta)}} \, \rho_R G$$

$$= -2\pi R^2 dR \, \rho_R \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{z^2+R^2-2zRx}} \, \rho_R G$$

$$= -2\pi R^2 dR \left[-\frac{2}{2zR} \sqrt{z^2+R^2-2zRx} \right]_{-1}^{1} \rho_R G$$

$$= -\frac{2\pi R \, dR}{z} \left[|z+R| - |z-R| \right] \rho_R G$$

$$\boxed{\phi(\vec r) = \begin{cases} -\frac{4\pi R^2 dR}{z}\rho G = -\frac{d\tilde M}{z} G \equiv -\frac{d\tilde M}{r} G & \text{für } r > R \\ -4\pi R dR\,\rho G = -\frac{\partial M}{R} G & \text{für } z < R \end{cases}}$$

$d\tilde M$: Masse der betrachteten Schale

Berechne noch zugehörige Kräfte:

$$\vec F(\vec r) = -m\vec\nabla\phi(\vec r) = -m\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}\hat r$$

$$\boxed{d\vec F(\vec r) = \begin{cases} -mG\frac{d\tilde M}{r^2}\hat r & \text{für } r > R \\ 0 & \text{für } r < R \end{cases}}$$

Newton's Kugelschalentheorem: Kraft außerhalb wie von gleichschwerer Punktladung, innerhalb 0.

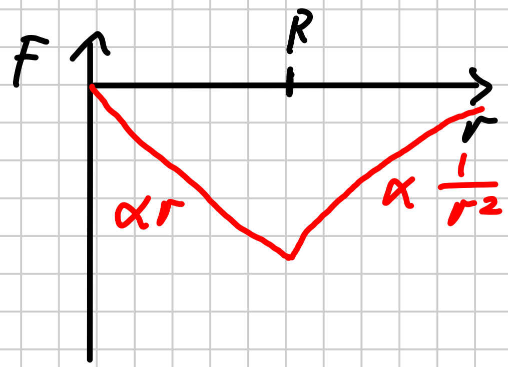
$\Rightarrow$ Kraft außerhalb einer kugelsymetrischen Ladungsverteilung: $F(\vec r) = -mG\frac{M}{r^2}\hat r$

Kraft innerhalb einer kugelsymm. Ladungsverteilung:

$$F(\vec r) = -mG\frac{M(r)}{r^2}\hat r$$

$$\left.\begin{aligned} &= -mG\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{r^2}\hat r \\ &= -\frac{4}{3}\pi m G\rho\,\vec r \end{aligned}\right\}\text{ für homogene Kugel}$$

(vgl. HR Kap. 14-5)



Kepler-Gesetze (cf. HR Kap. 14-7)

1. **Gesetz der Planetenbahnen:** Alle Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.

2. **Flächengesetz:** Die Verbindungslinie („Fahrstrahl") von der Sonne zu einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3. **Gesetz der Umlaufzeiten:** Das Quadrat der Umlaufzeit jedes Planeten ist proportional zur 3. Potenz der großen Halbachse seiner Umlaufbahn.

Herleitung: 2. aus Drehimpulserhaltung (siehe HR)

1.a) Betrachte Schwerpunktsystem und Relativkoord.:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{G\mu M}{r^2}\hat{r}\,; \quad \vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_s\,; \quad M = m_p + m_s\,;$$

$$\mu = \frac{m_p m_s}{m_p + m_s}\,,$$ also effektives 1-Teilchenproblem.

1b) Drehimpulserhaltung $\Rightarrow$ Bahn ist planar (2dim.) $\rightsquigarrow$ verwende Polarkoordinaten (r, φ).

1c) Herleitung eines effektiv 1-dimensionalen Problems:

(i) Energie $E = K + U_{eff}$

$$= -\frac{G\mu M}{r} + \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$ ist erhalten.

(ii) Drehimpuls $L = \mu r^2 \dot{\varphi}$ ist erhalten.

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G\mu M}{r}}_{U_{eff}}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U_{eff}(r)\right)}$$

(Separation der Var. $\rightsquigarrow t(r)$)

1d) Elimination der Zeitabhängigkeit

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \pm\frac{r^2}{L}\sqrt{2\mu\left(E - U_{eff}(r)\right)}$$

$$\boxed{\varphi - \varphi_0 = \pm\frac{L}{\sqrt{2\mu}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2\sqrt{E - U_{eff}(r')}}}$$

allg. Lösung für Bahnkurve

Fortsetzung: nächste Woche!