Physik II Ergänzung 1. Vorlesung 28.4.2006

Notiztitel 27.04.2006

Inhalt

Hinweise auf Vorträge

- Kolloquium (Di 17^{00} HS Kernphysik)
- Physik am Samstag (29.4.–27.5., 9^{30}–12^{30} HS 20)
- Stiftungsprofessur Zeilinger (Di 18^{30} RW1)
- Proseminar (Di 13^{15} Seminarraum Quantum)

CT1: Feldliniendichte proportional zu Stärke des E-Felds nur, falls $\vec{E} = \vec{E}(x,y)$, d.h. translationsinvariant in z-Richtung. Dazu notwendig: $\rho = \rho(x,y)$

CT2: E-Feld eines dünnen Stabes

Coulomb-Gesetz, Gaußscher Satz und 1. Maxwell-Gleichung

CT3: Gradient und Divergenz, insbesondere $\vec{\nabla} r$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$, $\vec{\nabla} f(r)$ und $\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$

Elektrisches Feld eines dünnen Stabes

Aufgabenstellung: CT2 (HR Kap. 23 Aufg. 24)

Ideen: (i) Ladungsdichte $\lambda = \frac{q}{L}$

(ii) Die infinitesimale Ladung dq am Ort x liefert bei P einen Feldbeitrag

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \text{ mit Relativvektor } \vec{r} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) $E = |\vec{E}| = E_y$ aus Symmetriegründen

Also: $$E = \int_{-L/2}^{L/2} dx \, \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Nebenrechnung: $$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} \overset{*}{=} \left[\frac{x}{y^2(x^2+y^2)^{1/2}}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$= \frac{L/2 + L/2}{y^2 \left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2L}{y^2\sqrt{L^2+4y^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{q/L}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2Ly}{y^2\sqrt{L^2+4y^2}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{y\sqrt{L^2+4y^2}}}$$

---

* Check der Stammfunktion:

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{y^2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{x^2+y^2-x^2}{y^2(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Grenzfall: Punkt P nah am Stab bzw. langer Stab: $\frac{r}{L} \ll 1$

$$\sqrt{L^2+4r^2} = L\sqrt{1+4\left(\frac{r}{L}\right)^2} = L\left[1+2\left(\frac{r}{L}\right)^2+\mathcal{O}\left(\left(\frac{r}{L}\right)^4\right)\right] \overset{\frac{r}{L}\ll 1}{\approx} L$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r\sqrt{L^2+4r^2}} \approx \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r_\perp}$$

Das E-Feld um einen (unendlich) langen dünnen Draht mit konstanter linearer Ladungsdichte λ fällt also $\propto \frac{1}{r_\perp}$ mit dem Abstand $r_\perp$ vom Draht ab – wie in den Abb. von CTI dargestellt!

Ausblick: Häufig ist es praktischer, aus einer gegebenen Ladungsverteilung zunächst das Potential zu berechnen (und dann daraus $\vec{E}$).

Coulomb-Gesetz, Gaußscher Satz und 1. Maxwell-Gleichung

1) Coulomb-Gesetz: $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} (\widehat{r_1 - r_2})$

Kraft auf Teilchen 1 durch Coulomb-WW mit Teilchen 2

$$\Leftrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$ (Ladung q im Ursprung)

2) „Physikalischer Gaußscher Satz"

$$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \equiv \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V d^3r \, \rho(\vec{r})$$

eingeschlossene Ladung (Q)

3) 1. Maxwell-Gleichung in differentieller Form

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

4) „Mathematischer" Gaußscher Satz

$$\iiint_V d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \oiint_{\partial V} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

Ziel: (i) Verständnis aller Ausdrücke
(ii) Zusammenhang herstellen
$\Rightarrow$ Mathem. Exkurse

Gradient und Divergenz

CT 3

$$\vec{\nabla} \underset{\|\vec{r}\|}{r} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \frac{1}{2} (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\vec{r}}{r} \equiv \hat{r}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\vec{\nabla} \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

Dyadisches Produkt

nicht in Vorlesung

$$\left(\vec{\nabla} f(r)\right)_x = \frac{\partial f(r(\vec{r}))}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r(\vec{r})}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(r) = f'(r) \vec{\nabla} r = f'(r) \hat{r}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \overset{r>0}{=} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3}$$

$$\frac{1}{r^3} + x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r^3} = \frac{1}{r^3} + x \frac{\partial}{\partial x} (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{r^3} + x \cdot 2x \cdot \left(-\tfrac{3}{2}\right) (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{1}{r^3} - 3 \frac{x^2}{r^5}$$

$$= \frac{3}{r^3} - 3 \frac{x^2+y^2+z^2}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0$$

Ende 1. Vorl.

Andererseits: Gaußscher Satz für Kugel mit Radius r:

$$\int_V d^3r \ \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \oint_{\partial V} \frac{d\vec{F} \cdot \vec{r}}{r^3} = \oint_{\partial V} \frac{dF}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi \delta(\vec{r})}$$