Physik II Ergänzung 11. Vorlesung 14. 7. 2006

Notiztitel 08.07.2006

Inhalt

Maxwell-Gleichungen in Materie

Verhalten von E- und B-Feldern an Grenzflächen

Snellius-Brechungsgesetz: Herleitung

Fresnel-Formeln: Herleitung

Maxwell-Gleichungen in Materie

mikroskopische Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{J}$$

Diese Gleichungen sind immer gültig, aber nicht direkt anwendbar, wenn unbekannte Influenzladungen und induzierte Ströme auftreten.

Unter Benutzung von linearer Antworttheorie geht man häufig zu einer effektiven vergröberten Beschreibung über, die höchstens auf Skalen oberhalb atomarer Abstände (d.h. 10^{-10} m) begründet werden kann:

magnetische Flußdichte $\vec{B}$ → magn. Feldstärke $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu_r}$

elektrische Feldstärke $\vec{E}$ → el. Flussdichte $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$

mit effektiven Materialparametern

ε_r relative Permitivität
μ_r relative Permeabilität

} i.A. frequenzabhängig!

(nichtisotrope Medien: $\vec{D} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon_r}\vec{E}$; $\vec{B} = \mu_0\overleftrightarrow{\mu_r}\vec{H}$)

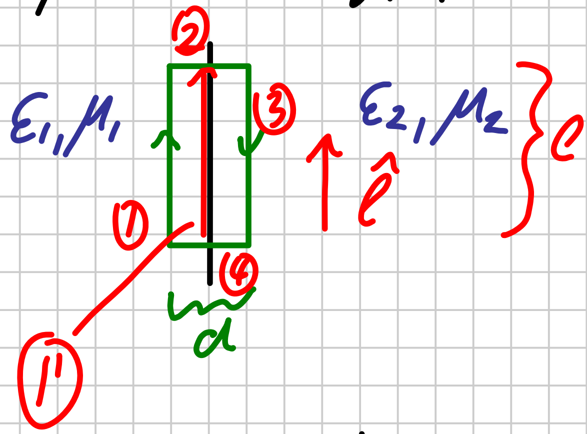
effektive MG in Materie:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{frei} & \vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_{frei} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \end{array}}$$

Verhalten von E- und B-Feldern an Grenzflächen

Für die Ausbreitung elm. Wellen im Vakuum oder durch Isolatoren gilt: $\rho_{frei} = 0 \; ; \; \vec{j}_{frei} = \vec{0}$

Betrachte nun Grenzfläche zwischen homogenen Medien:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} + \dot{\phi}_B = 0$$

Für $d \to 0$

- nicht-singuläres B-Feld $\rightsquigarrow$ $\dot{\phi}_B \to 0$
- Pfade 2 + 4 tragen nicht bei

$$\Rightarrow 0 = \int_{1'} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot d\vec{s} = \int_{\ell'=0}^{\ell} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \hat{\ell} \, d\ell'$$

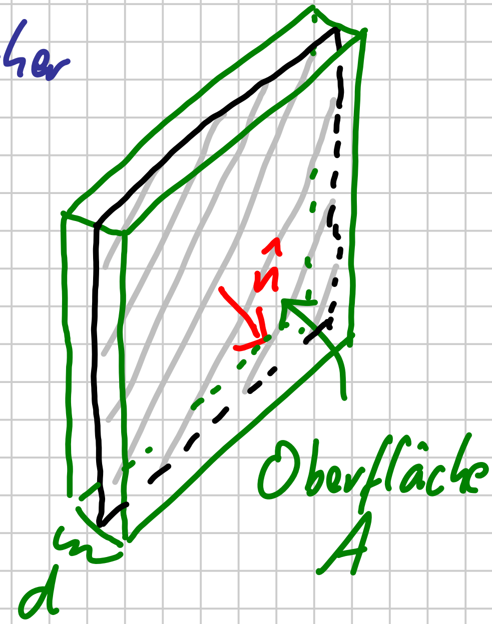
$$\xRightarrow{\ell \to 0} \quad (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \hat{\ell} = 0$$

Wähle $\hat{\ell}$ beliebig parallel zu Grenzfläche

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\parallel,1} = \vec{E}_{\parallel,2} \iff \vec{E}_{\parallel} \text{ stetig an Grenzfläche}}$$

Analog: $\boxed{\vec{H}_{\parallel} \text{ stetig an Grenzfläche}}$

Betrachte jetzt Volumina: z.B. flacher Quader (Volumen $V = d\,A$)



$$0 = \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{A} \overset{d\to 0}{\longrightarrow} \iint (\vec{B}_1 - \vec{B}_2)\,\hat{n}\, dA$$

$$\overset{A\to 0}{\Longrightarrow} \quad (\vec{B}_1 - \vec{B}_2)\,\hat{n} = 0$$

$$B_{\perp 1} = B_{\perp 2}$$

$$\boxed{B_\perp \text{ ist stetig an Grenzfläche}}$$

Analog: $\boxed{D_\perp \text{ ist stetig an Grenzfläche}}$

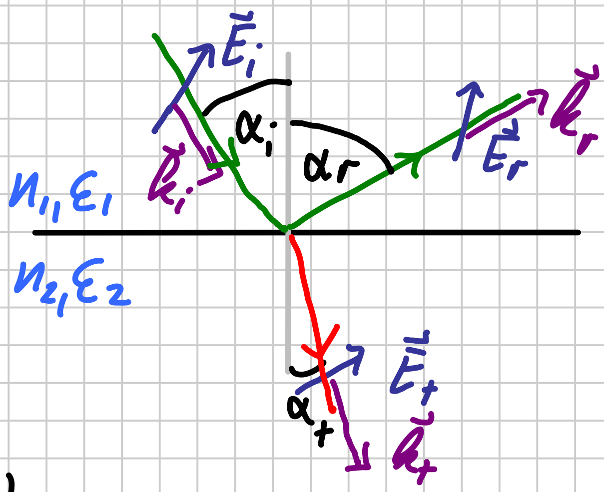
Beachte: $E_\perp$ i.a. unstetig: $\varepsilon_1 E_{\perp 1} = \varepsilon_2 E_{\perp 2} \iff \frac{E_{\perp 1}}{E_{\perp 2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

$B_\parallel$ i.a. unstetig: $\frac{B_{\parallel,1}}{\mu_1} = \frac{B_{\parallel,2}}{\mu_2} \iff \frac{B_{\parallel,1}}{B_{\parallel,2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

aber: bei nichtmagnetischen Materialien (d.h. in der Regel) ist $\mu_r \approx 1 \Rightarrow \vec{B}$ und $\vec{H}$ stetig.

Herleitung des Snellius - Brechungsgesetzes

Ebene periodische Welle $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$ treffe auf planare Grenzfläche und werde dort reflektiert und (i.A.) gebrochen:



$$\vec{E}_i(\vec{r},t) = \vec{E}_{0i} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)$$

$$\vec{E}_r(\vec{r},t) = \vec{E}_{0r} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r)$$

$$\vec{E}_t(\vec{r},t) = \vec{E}_{0t} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varphi_t)$$

Parallelkomponente von $\vec{E}$ ist stetig:

$$\vec{E}_{0i}^{\parallel} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) + \vec{E}_{0r}^{\parallel} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r)$$

$$= \vec{E}_{0t}^{\parallel} \cos(k_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varphi_t) \quad \forall \vec{r} \in \text{Grenzfläche}, \forall t$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_i = \omega_r = \omega_t \equiv \omega}$$ alle Frequenzen gleich!

$$\boxed{\vec{k}_i^{\parallel} = \vec{k}_r^{\parallel} = \vec{k}_t^{\parallel}}$$ Parallelkomponenten der Wellenvektoren gleich!

Außerdem: $c_i = \frac{\omega}{k_i} = \frac{c}{n_1} = \frac{\omega}{k_r} = c_r \Rightarrow k_i = k_r$

$$\Rightarrow \frac{k_i^{\parallel}}{k_i} = \sin(\alpha_i) = \sin(\alpha_r) = \frac{k_r^{\parallel}}{k_r} \Rightarrow \boxed{\alpha_i = \alpha_r}$$

Andererseits: $c_t = \frac{\omega}{k_t} = \frac{c}{n_2} = \frac{n_1}{n_2}\frac{c}{n_1} = \frac{n_1}{n_2}\frac{\omega}{k_i}$

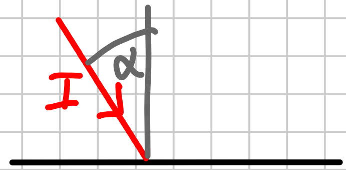
$$\Rightarrow \sin(\alpha_i) = \frac{k_i^{\parallel}}{k_i} = \frac{n_2}{n_1}\frac{k_t^{\parallel}}{k_t} = \frac{n_2}{n_1}\sin(\alpha_t)$$

$$\Rightarrow \boxed{n_1 \sin(\underbrace{\alpha_1}_{=\alpha_i, \alpha_r}) = n_2 \sin(\underbrace{\alpha_2}_{=\alpha_t})}$$

Snellius-Brechungsgesetz

Herleitung der Fresnel-Gleichungen

Energiebetrachtung für Grenzfläche:



$$I_i^\perp = I_r^\perp + I_t^\perp \quad \text{(keine Energiespeicherung)}$$

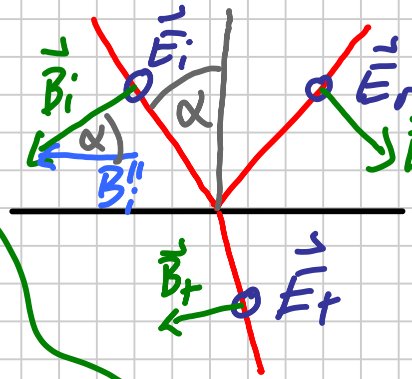
$$c_1 \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_i^2 \cos^2(\alpha_1) = c_1 \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_r^2 \cos^2(\alpha_1) + c_2 \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_t^2 \cos^2(\alpha_2)$$

Wähle Ursprung so, dass $\vec{r}=0$ auf Grenzfläche

$$\Rightarrow \overbrace{c_1}^{\cos^2(\alpha_1)} \varepsilon_0 \varepsilon_1 \left(E_{0i}^2 \cos^2(-\omega t) - E_{0r}^2 \cos^2(\varphi_r - \omega t) \right) = c_2 \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{0t}^2 \overbrace{\cos^2(\varphi_t - \omega t)}^{\cos^2(\alpha_2)}$$

nur möglich, falls $\varphi_r = n\pi$, $\varphi_t = n\pi \rightsquigarrow$ wähle $\boxed{\varphi_r = \varphi_t = 0}$

Fall 1: $\vec{E}$ senkrecht auf Einfallsebene



$\vec{E}^{\parallel}$ stetig $\Rightarrow E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$

$\vec{H}^{\parallel}$ stetig $\Rightarrow \dfrac{B_i^{\parallel}}{\mu_0 \mu_1} + \dfrac{B_r^{\parallel}}{\mu_0 \mu_1} = \dfrac{B_t^{\parallel}}{\mu_0 \mu_2}$

$$\Rightarrow \frac{B_i \cos(\alpha_1)}{\mu_1} - \frac{B_r \cos(\alpha_1)}{\mu_1} = \frac{B_t \cos(\alpha_2)}{\mu_2}$$

Mit $E_i = c_i B_i$ etc. folgt schließlich:

$$\frac{(E_{0i} - E_{0r}) \cos(\alpha_1)}{c_1 \mu_1} = \frac{E_{0t} \cos(\alpha_2)}{c_2 \mu_2} = \frac{(E_{0i} + E_{0r}) \cos(\alpha_2)}{c_2 \mu_2}$$

$$E_{0i} \left(\frac{\cos(\alpha_1)}{c_1 \mu_1} - \frac{\cos(\alpha_2)}{c_2 \mu_2} \right) = E_{0r} \left(\frac{\cos(\alpha_1)}{c_1 \mu_1} + \frac{\cos(\alpha_2)}{c_2 \mu_2} \right)$$

$$\boxed{\frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\frac{n_1}{\mu_1} \cos(\alpha_1) - \frac{n_2}{\mu_2} \cos(\alpha_2)}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos(\alpha_1) + \frac{n_2}{\mu_2} \cos(\alpha_2)}}$$

Für unmagnetische Medien: $\mu_1 = \mu_2 = 1$

$$r_\perp = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_1 \cos(\alpha_1) - n_2 \cos(\alpha_2)}{n_1 \cos(\alpha_1) + n_2 \cos(\alpha_2)}$$

$\left(\text{senkr.} \xrightarrow{} \text{Einfall} \quad \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)$

$$= \frac{\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1) - \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1) + \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2)}$$

$$= - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Amplituden-Reflexions-Koeffizient

$$\boxed{R_\perp = \frac{I_r \cos(\alpha_1)}{I_i \cos(\alpha_1)} = \frac{E_{0r}^2}{E_{0i}^2} = \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)}}$$

<u>Fall 2:</u> E in Einfallsebene

analog, aber mit $E \leftrightarrow B$

$$\rightsquigarrow \quad r_\parallel = \frac{n_2 \cos(\alpha_1) - n_1 \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)} = \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)}$$