

Inhalt

Gauß-Strahlen (Laser-Moden)

Helmholtz-Gleichung

paraxiale Helmholtz-Gleichung

Kugelwellen

parabolische Welle


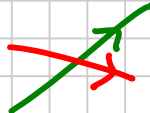
Gaußscher Strahl: Ableitung + Formeln

Eigenschaften des Gauß-Strahls

Hermite-Gauß-Moden

Gauß-Strahlen

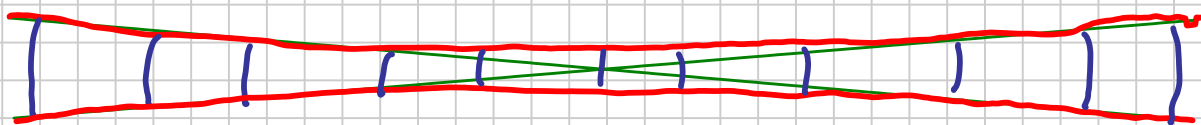
1. Motivation

bisher: (i) ebene Wellen  (ii) Strahlen 

Frage: wie passt das zusammen? Gibt es „Strahlen“, die die Maxwell-Gleichungen erfüllen?

Antwort: Gauß-Strahlen – Eigenmoden von Lasern
(allgemeiner: Hermite-Gauß-Moden)

CT: Wie sieht das Strahlprofil eines Laserstrahls aus?



2. Formalismus

Wellengleichung $(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$

periodischer komplexer Ansatz: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$

\Rightarrow Helmholtz-Gleichung $(\Delta + k^2) \vec{E}(\vec{r}) = 0$ $k = \frac{\omega}{c}$

CT: Zeigen Sie: die Kugelwelle $U(r) = \frac{U_0}{r} e^{ikr}$ löst die (skalare) Helmholtz-Gleichung.

Lösung: nutze $\Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \Rightarrow \Delta u = -k^2 u$

Idee: für vorgegebene Achse und weit weg von der Quelle sehen Kugelwellen fast wie ebene Wellen aus - Formalisierung?



Paraxialer Ansatz: $u(\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{-ikz}$, dabei soll

A langsam veränderlich (Skala: λ) sein, insbesondere in z -Richtung.

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta + k^2) A(\vec{r}) e^{-ikz} \\ &= \cancel{k^2 A(\vec{r}) e^{-ikz}} + e^{-ikz} \Delta A(\vec{r}) + \cancel{A(\vec{r}) \Delta e^{-ikz}} \\ &\quad + 2 [\vec{\nabla} A(\vec{r})] \cdot [\underbrace{\vec{\nabla} e^{-ikz}}_{-ik \hat{e}_z e^{-ikz}}] \\ &= e^{-ikz} \left[\Delta A(\vec{r}) - 2ik \frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

Bisher ist noch alles exakt. Jetzt vernachlässigen wir $\Delta_z A(\vec{r})$ und erhalten die

paraxiale Helmholtz-Gleichung: $(\Delta_T - 2ik \frac{\partial}{\partial z}) A = 0$

Bei zylindrischer Symmetrie: $A(\vec{r}) = A(z, \rho)$

$$\Rightarrow \Delta_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$$

Eine Lösung: parabolische Welle $A(z, \rho) = \frac{A_0}{z} e^{-ik \frac{\rho^2}{2z}}$

3. Gauß-Strahlen

allgemeinerer Ansatz: $A(z, \rho) = \frac{A_1}{q(z)} e^{-ik \frac{\rho^2}{2q(z)}}$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial z} = \left[-\frac{q'(z)}{q(z)} + \frac{ik \rho^2 q'(z)}{2q^2(z)} \right] A$$

$$\Delta_T A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \left[-ik \frac{\rho^2}{q(z)} \right] A$$
$$= \frac{1}{\rho} \left[-\frac{2ik\rho}{q(z)} - \frac{k^2 \rho^3}{q^2(z)} \right] A$$

paraxial #.

$$0 \stackrel{\downarrow}{=} \left[-\frac{2ik}{q(z)} - \frac{k^2 \rho^2}{q^2(z)} + \frac{2ik}{q(z)} q'(z) + \frac{k^2 \rho^2}{q^2(z)} q'(z) \right]$$

wird offensichtlich gelöst durch

$$q'(z) = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad q(z) = z - \zeta$$

Wahl $\zeta = -iz_0$ führt auf Gauß-Strahlen:

$$A(\vec{r}) = \frac{A_1}{z + iz_0} e^{-ik \frac{\rho^2}{2(z + iz_0)}}$$

Spalte auf in Real- und Imaginärteil:

$$\frac{1}{z + iz_0} = \frac{z}{z^2 + z_0^2} - i \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} \equiv \frac{1}{R(z)} - i \frac{\vec{r}}{\pi w^2(z)}$$

\uparrow Krümmungsradius \uparrow Strahldurchmesser

Mit einem zusätzlichen Korrekturterm (zur paraxialen Näherung) - der Gouy-Phase φ ergibt sich für den Gauß-Strahl:

$$U(\vec{r}) = A_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} e^{-ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\varphi(z)}$$

mit

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}; \quad w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}}$$

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right)$$

$$\varphi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

4. Eigenschaften des Gauß-Strahls

Intensität $I(\rho, z) = \frac{2P}{\pi w^2(z)} e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}}$

Divergenz-Winkel $\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi w_0}$

z.B. $\lambda = 500 \text{ nm}$, $w_0 = 0,15 \text{ mm} \Rightarrow \theta_0 = 1 \text{ mrad}$

Tiefenschärfe (depth of focus) $2z_0 = \frac{2\pi w_0^2}{\lambda}$

nicht gezeigt: Formalismus für Matrizen-Optik.