Physik II Ergänzung 2. Vorlesung 5. 5. 2006

Notiztitel 29.04.2006

Inhalt:
- Wiederholung: Kurvenintegral (Beispiel)
- Oberflächenintegral und Fluss

CT4: Fluss (Beispiel)

- Gaußscher Satz: Beweis (Aufteilung des Volumens, Divergenz als Fluss/Volumen aus infinitesimalem Volumen)

CT5: Potential und E-Feld eines dünnen Ringes (auf Achse)

Linienintegral (Kurvenintegral) (Korsch, Aufg. 9.2)

a) Berechnen Sie für das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = (y^3, xy^2, z)$ mit $\vec{r} = (x, y, z)$ das Kurvenintegral längs eines Weges $y(x) = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$ von $\vec{r}_0 = (0,0,0)$ nach $\vec{r}_1 = (1,1,0)$

b) Für welche α ist das Kurvenintegral extremal?

zu a) $$\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha x^{\alpha-1} \\ 0 \end{pmatrix} dx$$

$$I(\alpha) = \int_{C(\alpha)} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_0^1 dx \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha x^{\alpha-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{3\alpha} \\ x^{2\alpha+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^1 dx \left(x^{3\alpha} + \alpha x^{3\alpha}\right) = (\alpha+1) \int_0^1 dx\, x^{3\alpha}$$

$$= (\alpha+1) \left[\frac{1}{3\alpha+1} x^{3\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{\alpha+1}{3\alpha+1} \underset{\alpha\to\infty}{\overset{\alpha\to 0}{\rightrightarrows}} \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{matrix}$$

zu b) $$\frac{d}{d\alpha} I\alpha = \frac{3\alpha+1-3(\alpha+1)}{(3\alpha+1)^2} = \frac{-2}{(3\alpha+1)^2} < 0$$

Also gibt es keine Extrema!

[mehr zu Linien/Kurvenintegralen: Korsch, Kap. 9.1.1]

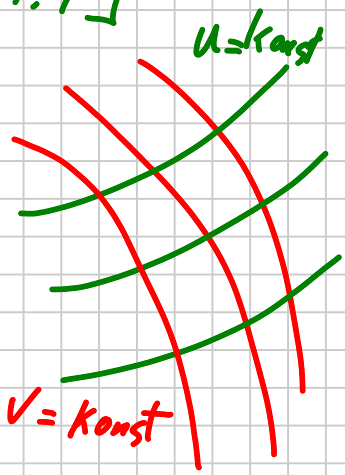
Oberflächenintegrale

$\vec{F} \to \vec{A}$!

[Korsch, Kap. 9.1.4]

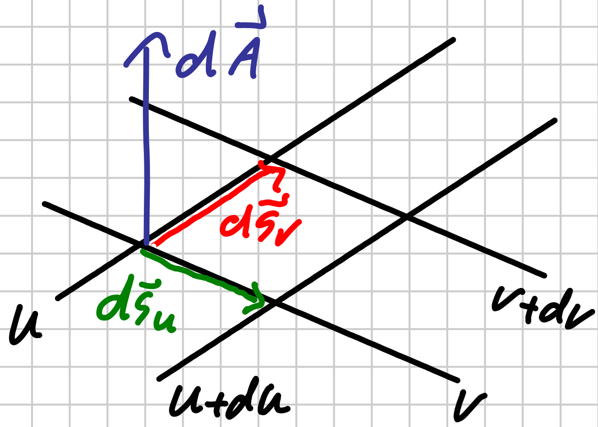
Betrachte zusammenhängende, glatte Fläche

$$A = \{ \vec{r} = \vec{r}(u,v) \,/\, u,v \in \text{Definitionsbereich} \}$$



Flächen sind im Allgemeinen gekrümmt, dabei lassen sich für jeden Punkt 2 Krümmungsradien angeben. Ausschnitte, die klein gegen beide Radien sind, erscheinen flach (Beispiel: Erdoberfläche).

Differentiell kleine Ausschnitte sind (flache) Parallelogramme, aufgespannt von den Vektoren



$$d\vec{s}_u = \vec{r}(u+du,v) - \vec{r}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\, du$$

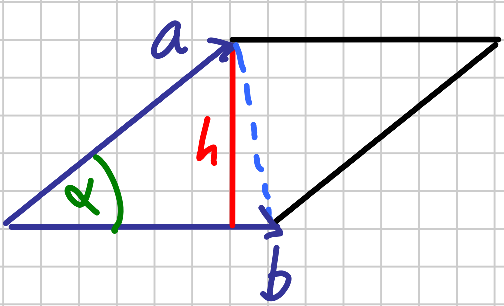
$$d\vec{s}_v = \vec{r}(u,v+dv) - \vec{r}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\, dv$$

Mit den Abkürzungen $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ und $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ ergibt

sich das Flächenelement $\boxed{d\vec{A} = d\vec{s}_u \times d\vec{s}_v = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, du\, dv}$

Überprüfe: (i) $d\vec{A} \perp d\vec{s}_u$, $d\vec{A} \perp d\vec{s}_v$: klar wegen Kreuzprodukt

(ii) dA ist Flächeninhalt



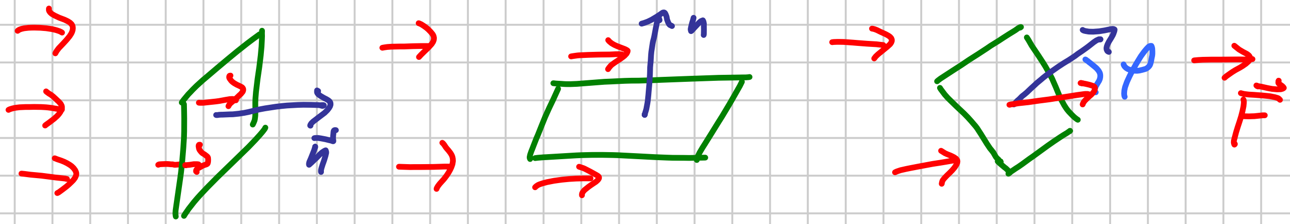
Allg. Parallelogramm: zerlege in 2 Dreiecke, $A = 2 \cdot \frac{1}{2} b \cdot h = b \cdot a \cdot \sin(\alpha)$

$= |a \times b|$

auch o.k., also: $dA = |\vec r_u \times \vec r_v| \, du \, dv$

Definiere noch Normalenvektor $\vec n := \frac{d\vec A}{dA} = \frac{\vec r_u \times \vec r_v}{|\vec r_u \times \vec r_v|}$

Jetzt: Fluss durch Fläche (z.B.: wieviel Wasser fliesst pro Sekunde durch einen Fluss-Querschnitt)



Fluss $\quad \phi = \int_A \vec F \cdot d\vec A \quad$ maximal für $\vec n \parallel \vec F$

CT4: Berechne Fluss ϕ für

$$\vec{F}(\vec{r}) = (z, x, -3y^2 z)$$

$$A = \{(x,y,z) \mid y = x^\alpha;\ 0 \le x \le 1;\ 0 \le z \le 1\}$$

Lösung: (i) Parametrisierung

$$\vec{r}(u,v) = (u, u^\alpha, v) \qquad 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1$$

(ii) Feld durch u, v ausdrücken

$$\vec{F}(u,v) = (v, u, -3u^{2\alpha} v)$$

(iii) $d\vec{A}$ berechnen

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = (1, \alpha u^{\alpha-1}, 0)$$

$$r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\alpha u^{\alpha-1}, -1, 0)$$

(iv) Skalarprodukt des Integranden berechnen

$$\vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = \alpha u^{\alpha-1} v - u$$

(v) Integrieren:

$$\phi = \int_0^1 du \int_0^1 dv\ (\alpha u^{\alpha-1} v - u) du dv$$

$$= \int_0^1 du\ (\tfrac{1}{2} \alpha u^{\alpha-1} - u) du$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} u^\alpha - \tfrac{1}{2} u^2\right]_0^1 = 0$$

Der (mathematische) Satz von Gauß – Beweis

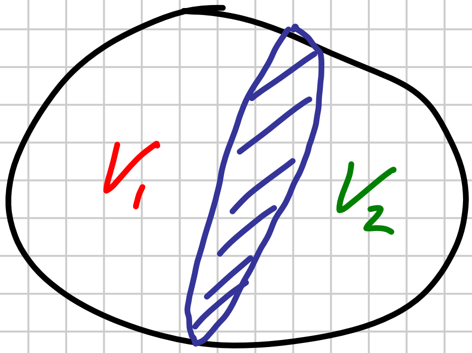
Behauptung: $$\iiint_V d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \oiint_{\partial V} \vec{F}\cdot d\vec{A}$$

Beweisidee: Aufteilung in Teilvolumina

Klar: Bei Aufteilung eines Volumens durch Einfügen einer Trennfläche gilt:

$$\iiint_V d^3r\; \vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \iiint_{V_1} d^3r\; \vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r}) + \iiint_{V_2} d^3r\; \vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r})$$

Addition bei Oberflächenintegralen weniger offensichtlich, da Grenzfläche neu auftritt:



$$\oiint_{\partial V_1} \vec{F}\cdot d\vec{A}_1 = \iint_{\partial V_1 \cap \partial V} \vec{F}\cdot d\vec{A}_1 + \iint_{\partial V_1 \setminus \partial V} \vec{F}\cdot d\vec{A}_1$$

$$\oiint_{\partial V_2} \vec{F}\cdot d\vec{A}_2 = \iint_{\partial V_2 \cap \partial V_1} \vec{F}\cdot d\vec{A}_2 + \iint_{\partial V_2 \setminus \partial V} \vec{F}\cdot d\vec{A}_2$$

Aber: (i) Grenzflächen identisch: $\partial V_1 \setminus \partial V = \partial V_2 \setminus \partial V$

(ii) Normalen sind entgegengesetzt: $d\vec{A}_1(u,v) = -d\vec{A}_2(u,v)$

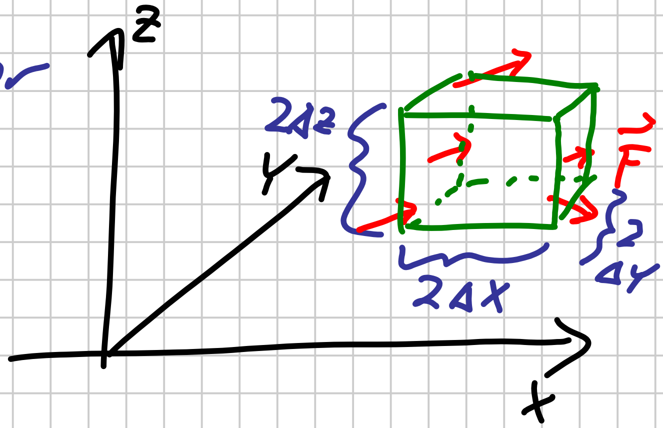
$$\Rightarrow \oiint_{\partial V} \vec{F}\cdot d\vec{A} = \oiint_{\partial V_1} \vec{F}\cdot d\vec{A} + \oiint_{\partial V_2} \vec{F}\cdot d\vec{A}$$

Verallgemeinerung: beliebig viele Teilvolumina V_i.

Wir können also den Gaußschen Satz für das Gesamtvolumen aus der Gültigkeit des GS für Teilvolumina folgern.

Idee: wähle infinitesimale Quader

mit $x_0 - \Delta x \leq x \leq x_0 + \Delta x$ etc.



Konvention: alle Flächenvektoren nach außen

$$\Rightarrow \phi = \oint\!\!\oint_{\partial(\Delta V)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \underbrace{\iint dy\,dz \left[F_x(x_0+\Delta x, y, z) - F_x(x_0 - \Delta x, y, z)\right]}_{\phi_x}$$

$$+ \iint dx\,dz \left[F_y(x, y_0+\Delta y, z) - F_y(x, y_0 - \Delta y, z)\right] + \ldots$$

$$\phi_x \xrightarrow{\Delta x \to 0} \iint dy\,dz \; \frac{\partial F_x}{\partial x}(x_0, y, z) \cdot 2\Delta x$$

$$\xrightarrow[\Delta y \to 0]{\Delta z \to 0} 2\Delta y \cdot 2\Delta z \cdot \frac{\partial F_x}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot 2\Delta x = \Delta V \frac{\partial F_x}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint\!\!\oint_{\partial(\Delta V)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)(x_0, y_0, z_0)$$

$$= \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x_0, y_0, z_0)$$

Also: $$\operatorname{div} \vec{F}(r_0) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint\!\!\oint_{\partial(\Delta V)} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

genauer: alle Dimensionen müssen klein werden

Mit $\operatorname{div} \vec{F}(r_0) = \lim_{\Delta V} \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} d^3r \; \vec{\nabla} \cdot F$ folgt der Satz von Gauß für das infinitesimale Volumen, mit obiger Zerlegung dann für beliebige Volumina.

Potential

CT5: Potential/E-Feld eines Ringes

b) klar: $V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{z^2+R^2}}$

a) Symmetrie: $\vec{E}(z) = E(z)\,\hat{e}_z$

$$E(z) = -\frac{dV(z)}{dz} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qz}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$