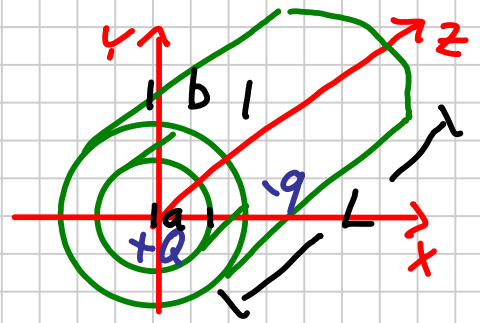


## Inhalt

- CT6 Zylinderkondensator (cf. HR S. 728)
- Multipolentwicklung und Feld eines Dipols  
(mit CT7)
- CT8 Bildladungsmethode: Kugel vor  
Metallfläche

# Zylinderkondensator

CT 7 Zylinderkondensator mit Radien  $a < b$  und Länge  $L$  ( $b \ll L$ )



b) Elektrisches Feld:  $\vec{E} = E_r \hat{e}_r + E_\varphi \hat{e}_\varphi + E_z \hat{e}_z$

$E_\varphi = 0$  (wegen  $\varphi$ -Symmetrie und weil  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ )

$E_z \approx 0$  (exakt für  $z = \frac{L}{2}$ , ungefähr im Inneren)

$\Rightarrow E_r(r)$  aus Gaußschem Satz (für  $a \leq r \leq b$ )

$$\phi(r) = 2\pi r L E_r(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) \equiv E_r(r) = \begin{cases} \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & \text{für } a \leq r \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \hat{e}_r \quad (\text{vgl. 1. Vorlesung})$$

a) Elektrisches Potential

$$V(r) = V_b - \int_{\vec{r}_b}^{\vec{r}} \hat{e}_r \cdot d\vec{r}' = V_b + \int_b^r dr' E(r')$$

$$= V_b - \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \int_b^r \frac{dr'}{r'} = V_b - \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} (\ln(r) - \ln(b))$$

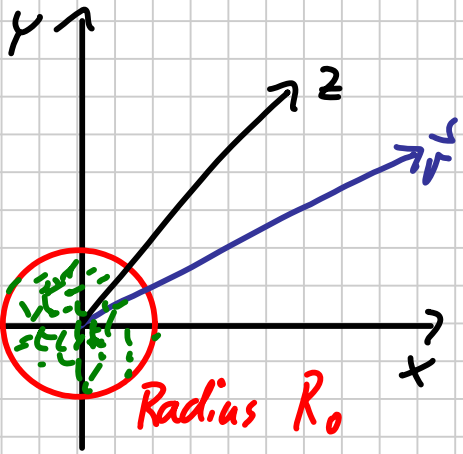
$$= V_b + \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{r}\right)$$

Spannung:  $V = V(a) - V_b = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

c) Kapazität:  $C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$

d) Genau am Ende fällt  $E_r$  auf  $\frac{1}{2} ab$  (Beweis aus Superposition)

# Multipolentwicklung und Feld eines Dipols



Gegeben: Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$

mit  $\rho(\vec{r}) = 0$  für  $r > R_0$

Klar: Potential und Feld lassen sich im Prinzip exakt angeben mit

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Aber:  $3N$  Parameter für  $N$  Ladungen

Frage: Lassen sich Potential und Feld für  $r \gg R_0$  durch wenige Parameter charakterisieren?  $\rightarrow$  CT 7

Antwort: Ja, mithilfe der Multipolentwicklung!

Exkurs: Taylorentwicklung in  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= f(\vec{r}_0) + (x-x_0) \left. \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_0} + (y-y_0) \left. \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y} \right|_{\vec{r}_0} + (z-z_0) \left. \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z} \right|_{\vec{r}_0} + \dots \\ &= f(\vec{r}_0) + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}_0) + \frac{1}{2} (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \left( \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{r}_0} \right) (\vec{r}_i - \vec{r}_0) + \dots \end{aligned}$$

CT 7 Anwendung auf Feld einer Punktladung bei  $\vec{r}_i$ ,  
Entwicklung für  $r_i \ll r$  (bis  $\mathcal{O}(r^{-2})$ )

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

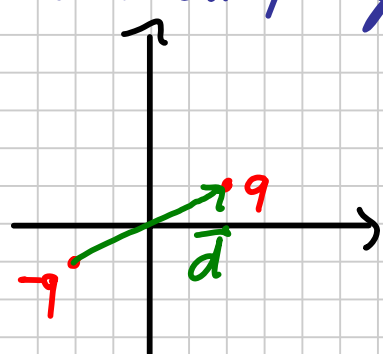
$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \vec{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}_i|} = -\frac{\vec{r}' - \vec{r}_i}{|\vec{r}' - \vec{r}_i|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}_i|} \Big|_{\vec{r}'=0} = \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-3}) \right)$$

Parität: gerade ungerade gerade ...

Jetzt: 2 entgegengesetzt gleiche Ladungen symmetrisch um Ursprung: ( $q$  bei  $d/2$ ,  $-q$  bei  $-d/2$ ):



$$V(\vec{r}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} + \frac{d/2 \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots - \frac{1}{r} - \frac{-d/2 \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots \right)$$

$$= \frac{q d \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \mathcal{O}(r^{-4})$$

$$\xrightarrow[p=q \cdot d \text{ fest}]{d \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Potential und Feld eines Punktdipols

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

$$E_x = -\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \vec{p} \cdot \vec{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial p_x \cdot x}{\partial x} \right]$$

$$= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \vec{p} \cdot \vec{r} \cdot (-3) \frac{x/r}{r^4} + \frac{p_x}{r^3} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\hat{r} \cdot \vec{p})\hat{r} - \vec{p}}{r^3}$$

Speziell für  $\vec{r} \perp \vec{p}$  (auf Mittelsenkrechte des Dipols):

$$V(\vec{r}) = 0; \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\perp \text{ auf Ebene})$$

# Multipolentwicklung für beliebige beschränkte Ladungsverteilung:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \quad (r > R_0)$$

$\frac{1}{2} \frac{\vec{r} \cdot \vec{Q} \vec{r}}{r^5}$

- mit
- $q = \int d^3 r' \rho(\vec{r}')$  1 Parameter Ladung
  - $\vec{p} = \int d^3 r' \vec{r}' \rho(\vec{r}')$  3 Parameter Dipolmoment
  - $Q_{ij} = \int d^3 r' (3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}')$  Quadrupolmoment  
5 Parameter
- (nicht in Vorlesung)

## CT 8: Bildladungsmethode: Kugel vor Metallfläche

Eine homogen geladene Kugel (Ladung  $q$ ) befindet sich dicht vor einer geerdeten Metallplatte

(Abstand  $d$  entlang der Normalen viel kleiner als Abstand zu Kanten).  $V(\vec{r}')$ ,  $\vec{E}(\vec{r}')$ , Kraft?

Randbedingung:  $V(\vec{r}) = 0$  auf Metalloberfläche

$$\vec{E}_{\parallel}(\vec{r}) = 0 \quad \text{" "}$$

$$\vec{E}_{\perp}(\vec{r}) \neq 0 \quad \text{" " (Influenzladungen)}$$

Multipolentwicklung:  $q + q_{\text{inf}} = 0$  (sonst  $V(\vec{r}) \propto \frac{1}{r}$  in jede Raumrichtung)

Idee: Setze Ladung  $-q$  symmetrisch hinter Metallplatte  
 $\rightarrow$  entgegengesetzte Influenzladungen auf Rückseite

der Metallplatte; nur Feld hinter Platte verändert

Lasse jetzt Dicke  $D$  der Metallplatte gegen  $0$  gehen  $\rightarrow$  Influenzladungen verschwinden.

Bildladungsmethode: (Ladung  $q$  an Ort  $\vec{r}_q = d\hat{e}_x$ )

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{|\vec{r} - d\hat{e}_x|} - \frac{q}{|\vec{r} + d\hat{e}_x|} \right] \quad (x > 0)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q(\vec{r} - d\hat{e}_x)}{|\vec{r} - d\hat{e}_x|^3} - \frac{q(\vec{r} + d\hat{e}_x)}{|\vec{r} + d\hat{e}_x|^3} \right] \quad (x > 0)$$

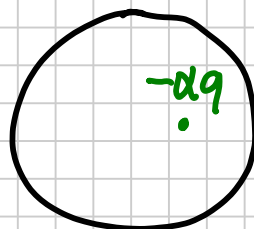
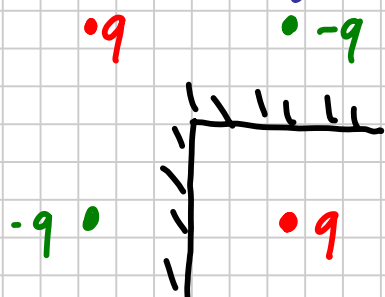
Die Kraft auf die Ladung ergibt sich aus dem Feld der Spiegelladung:

$$\vec{F}_q = q \vec{E}_{\text{ind}}(\vec{r}_q) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{n}$$

Normalenvektor  
auf Metallplatte

Ladungsdichteverteilung aus  $\vec{E}(\vec{r})$  für  $x=0$  mit Satz von Gauß.

Bildladungsmethode nur bei hoher Symmetrie, z.B. auch gekreuzte Ebenen und Kugeln:



$0 < \alpha < 1$   
 $q$