Physik II Ergänzung 8. Vorlesung 23. 6. 2006

Notiztitel 20.06.2006

Inhalt

CT 9 Wieso Resonanzfrequenz im LRC-Kreis nicht von R abhängig (Störung der Analogie zum mechanischen Schwingkr.)?

Erdmagnetfeld

Rail gun – Schienenkanone

CT 10 Induktivität eines Koax-Kabels

Maxwell-Gleichungen (vollständig)

CT 11 Komplexe Zahlen

CT 12 Rechnen mit komplexen Widerständen

Zu CT9 Unterschied $X_m(\omega) \leftrightarrow I(\omega)$?

Aus Physik I - E11:

Vorlesung / Halliday: $X_m(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$

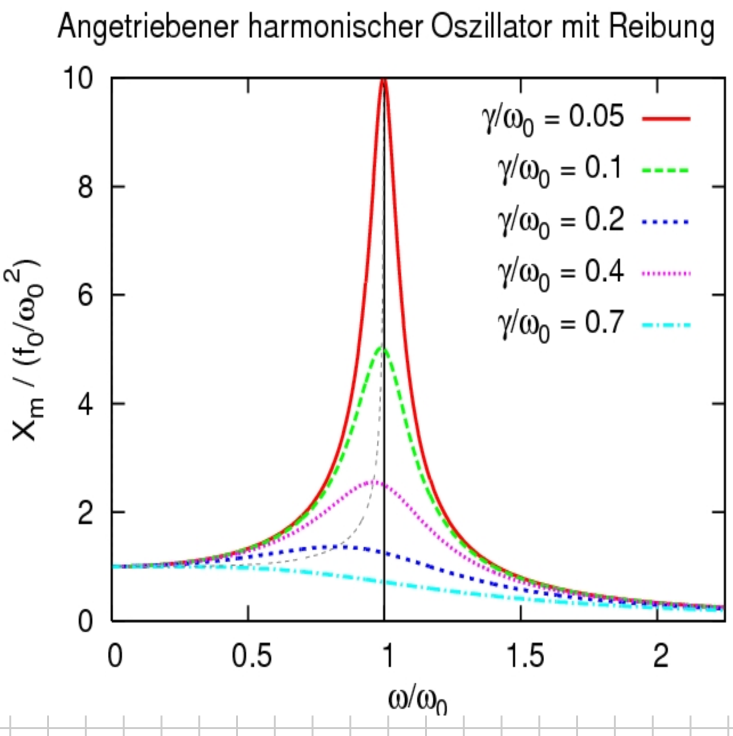
X_m maximal $\Leftrightarrow \frac{f_0}{X_m^2}$ minimal, d.h.

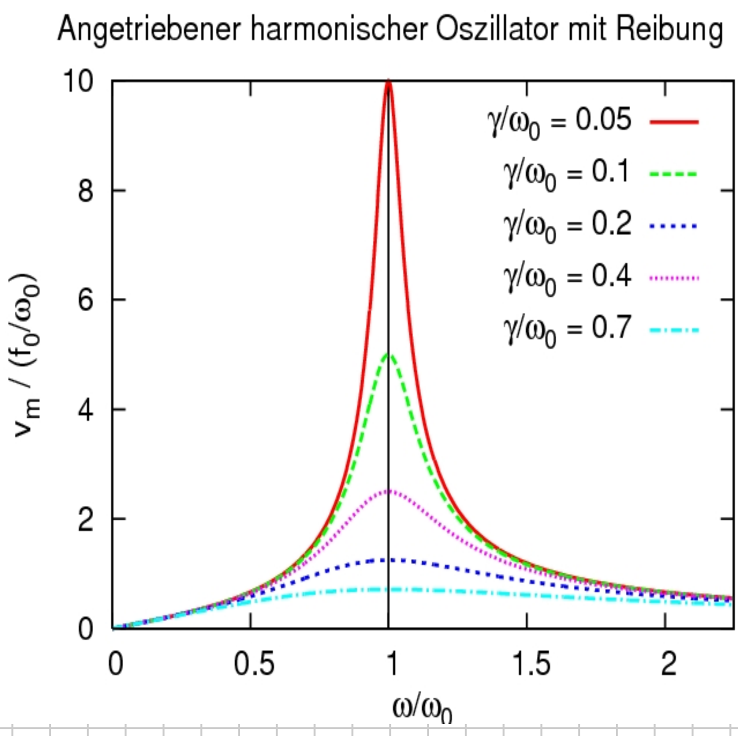
$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\omega}\left[(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]$$
$$= 2(\omega^2-\omega_0^2)2\omega + 4\gamma^2(2\omega)$$
$$0 = \omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2$$
$$\boxed{\omega_{Resonanz} = \sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}} \xrightarrow{\gamma \to \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}} 0$$
$$X_{m,Resonanz} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}$$

Aber: $I \leftrightarrow V_m$!

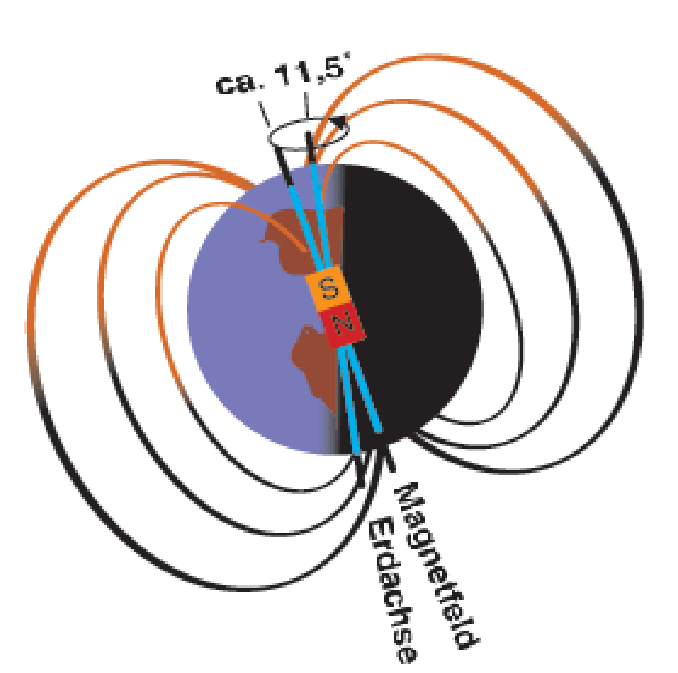
$$V_m(\omega) = \frac{\omega f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} = f_0\Big[\underbrace{\frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2}{\omega^2}}_{\text{minimal für } \omega=\omega_0}+4\gamma^2\Big]^{-\frac{1}{2}}$$

$$V_m(\omega_0) = \frac{\omega_0 f_0}{2\gamma}$$





Erdmagnetfeld

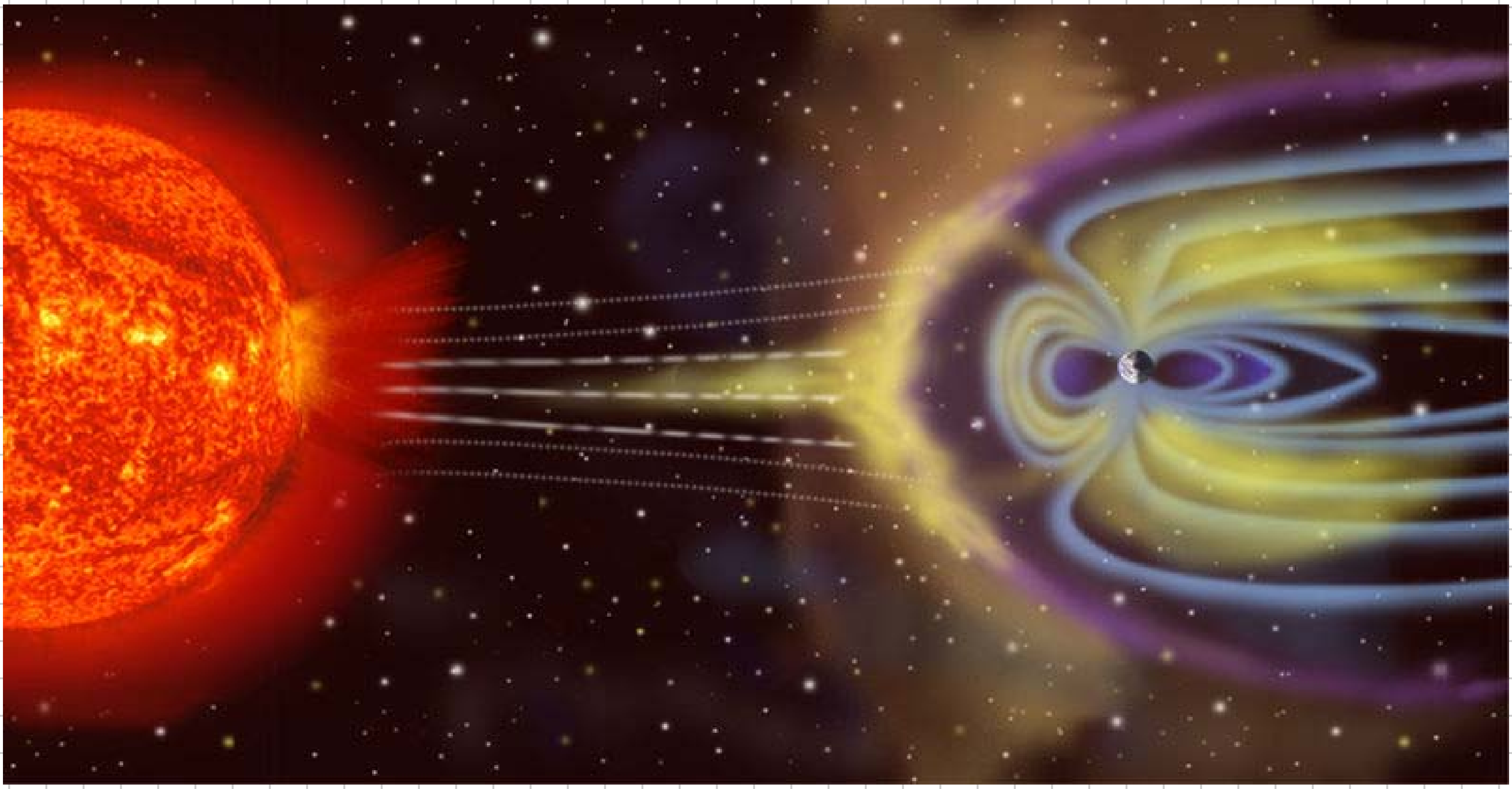


Kreisströme im flüssigen Eisenkern der Erde erzeugen Dipol-Feld.

Stärke am Erdboden: ca. 20-30 μT

Das Magnetfeld hält (i) den Sonnenwind (e^-, p, α-Teilchen) ab und wird (ii) von diesem stark verformt: Kaulquappen-Form, Plasmaschweif

Nur nahe den Polen kommen geladene Teilchen in Atmosphäre ⇝ Nordlicht



http://de.wikipedia.org/wiki/Erdmagnetfeld

Schienenkanone – Railgun

Interessante Anwendung elm Kräfte:

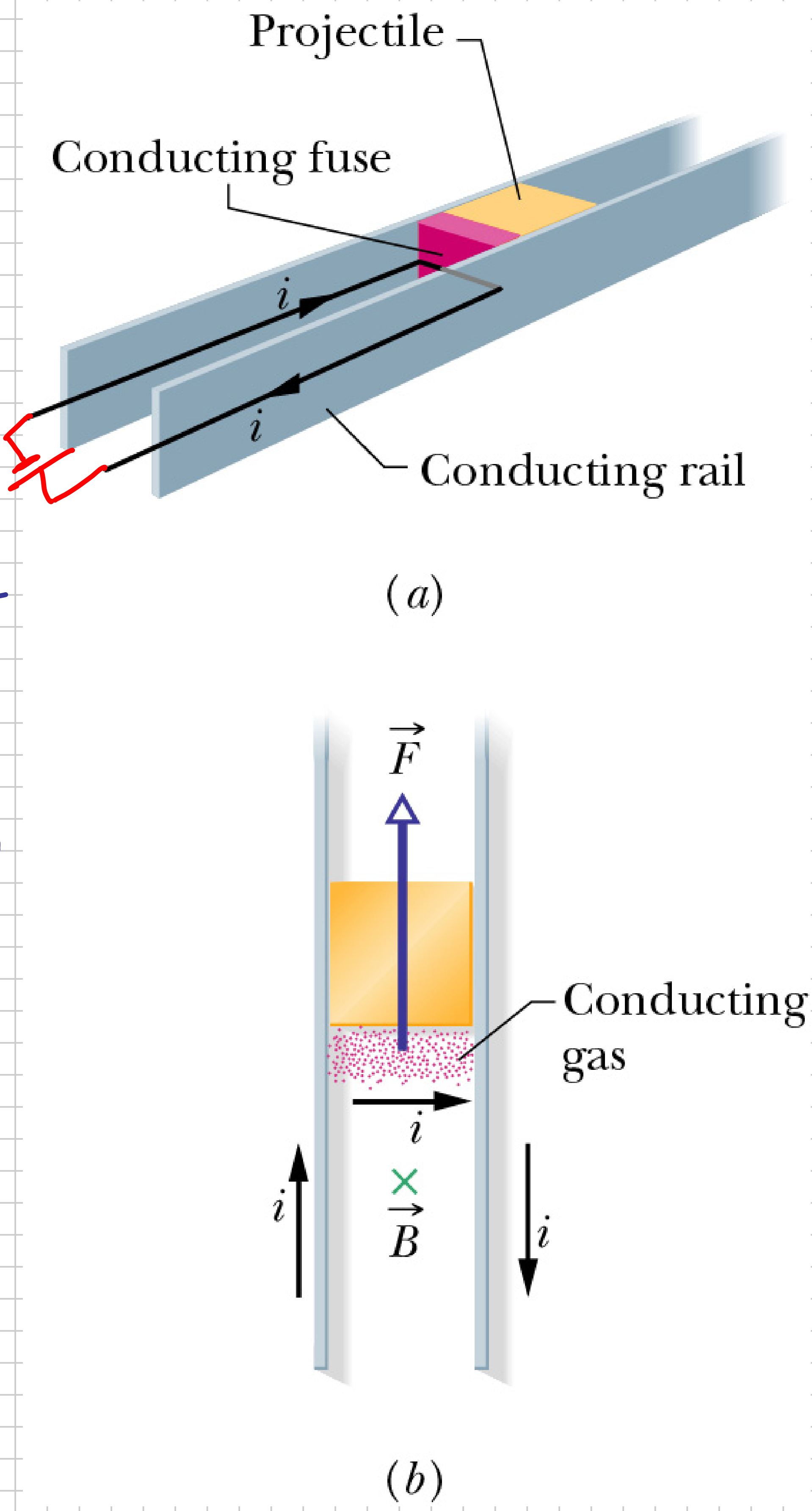
Ein Strom fließt durch Schienen sowie Projektil und/oder leitfähiges Treibmaterial.

⇝ B-Feld senkrecht zu Schienen

⇝ Kraft auf Strompfad durch/am Projektil

⇝ Beschleunigung ohne Explosivstoffe

Probleme
- Spitzenleistung im GW-Bereich
- Abnutzung der Schienen



[HR Abb. 30-10]
s.a. http://de.wikipedia.org/wiki/Railgun

Induktivität eines Koaxialkabels

Allgemeine Induktivität: $V_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$

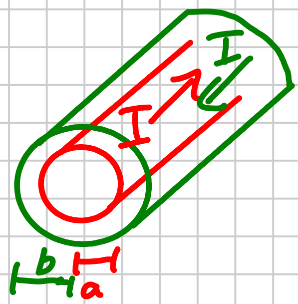
(Definition von L)

gespeicherte Energie: $U = \frac{1}{2} L I^2$

magnetische Feldenergiedichte: $u = \frac{B^2}{2\mu_0}$

Speziell: Induktivität einer langen Spule: $\frac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 A$

CT Berechnen Sie die Induktivität eines langen, am Ende kurzgeschlossenen Koaxialkabels! (cf. HR Bsp 31-8)



Idee: berechne Feldenergie aus Magnetfeld!

$$\mu_0 I = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(r)\, 2\pi r \quad (\text{für } a \leq r \leq b)$$

$$\Rightarrow B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{für } a \leq r \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

$\Rightarrow$ Energie eines Abschnitts der Länge ℓ

$$U = \ell \int_a^b 2\pi r\, dr\, u(r) = \frac{\mu_0 \ell I^2}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \ell I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Andererseits: $U = \frac{1}{2} L I^2 \Rightarrow L = \frac{2U}{I^2} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

mit Medium: $\boxed{\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

Berechne noch Kapazität:

$$E(r) = \frac{q/\ell}{2\pi r \varepsilon_0}\ ; \quad V = \int_a^b E(\vec r)\cdot d\vec s$$
$$= \frac{q/\ell}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q/\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

mit Materie: $$\boxed{\frac{C}{\ell} = \frac{q/\ell}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln(b/a)}}$$

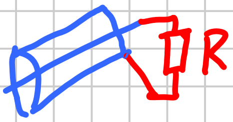
$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m}$

$\mu_0 = 1{,}26\cdot 10^{-6}\,H/m$

Wellenwiderstand $$X = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$\equiv$ Abschlusswiderstand zur Vermeidung von Reflexion:
$$= \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\,60\,\Omega$$

typisch: $X = 50\,\Omega$ oder $X = 75\,\Omega$



s.a.: http://de.wikipedia.org/wiki/Wellenimpedanz

Die Maxwellschen Gleichungen

$\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\overset{\text{Gauß}}{\Longleftrightarrow}$ $\oiint \vec E\cdot d\vec A = \frac{q_{ein}}{\varepsilon_0}$ inh.

$\vec\nabla\times\vec E + \frac{\partial\vec B}{\partial t} = 0$ $\overset{\text{Stokes}}{\Longleftrightarrow}$ $\oint \vec E\cdot d\vec s = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ hom.

$\vec\nabla\cdot\vec B = 0$ $\overset{\text{Gauß}}{\Longleftrightarrow}$ $\oiint \vec B\cdot d\vec A = 0$ hom.

$\vec\nabla\times\vec B - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t} = \mu_0\vec j$ $\overset{\text{Stokes}}{\Longleftrightarrow}$ $\oint \vec B\, d\vec s = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_{um}$ inh.

Materiegleichung: $\vec F = m\ddot{\vec x} = q(\vec E + \vec v\times\vec B)$ (nichtrel.)

Zusammen bestimmen diese Gleichungen die klassische Elektrodynamik!

Komplexe Widerstände

$$\left(\text{Notation: } \begin{aligned} i(t) &= \mathrm{Re}(I e^{i\omega t}) = \mathrm{Re}\, I \cos(\omega t) + \mathrm{Im}\, I \sin(\omega t) \\ \mathcal{E}(t) &= \mathrm{Re}(\mathcal{E}_m e^{i\omega t}) = \mathrm{Re}\, \mathcal{E}_m \cos(\omega t) + \mathrm{Im}\, \mathcal{E}_m \sin(\omega t) \end{aligned}\right)$$

$$\mathcal{E}_m = X_{ges}\, I$$

$$\tilde{X}_R = R\,; \quad \tilde{X}_L = i\omega L\,; \quad \tilde{X}_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Serien + Parallelschaltung wie bei ohmschen Widerständen!

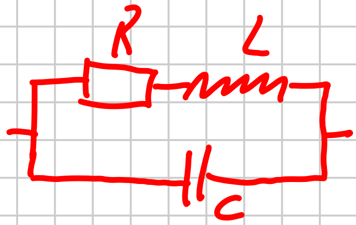
1. Beispiel: RLC-Serienschaltung

$$\tilde{X} = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$|\tilde{X}|^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$$

$$I(\omega) = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

2. Beispiel: Parallelschaltung RL + C:



$$\tilde{X}^{-1} = \tilde{X}_C^{-1} + (\tilde{X}_L + \tilde{X}_R)^{-1}$$

$$= i\omega C + \frac{1}{i\omega L + R} = \frac{1 - \omega^2 LC + i\omega CR}{i\omega L + R}$$

$$|\tilde{X}| = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2 + R^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}}$$