

Klassische Feldtheorie

Nils Blümer

Notiztitel

21.10.2012

Vorlesung „Theoretische Physik 5: Klassische Feldtheorie“ im Bachelor-Studiengang Physik (6. Semester) an der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz, gehalten von Prof. Dr. N. Blümer.

- Organisation:
- Vorstellung Assistent: Daniel Rost (ggf. auch Elena Gorelik)
 - Anmeldung zu Übungen → Doodle
 - Ausgabe 1. Übungsblatt
 - Ausgabe Merkblatt
 - Vorstellung Web-Seite
 - Umfrage: gehörte Vorlesungen

Vorbemerkungen

Vorlesungsstil: (farbige) Kreide an Tafel, incl. Skizzen
selten auch Beamer

+ konkret, flexibel, richtiges Tempo

- umständlich, fehleranfällig, uncool

①

Empfehlung: • Mitschreiben

• Fragen stellen! Korrigieren!

• Nacharbeiten (ggf. mit Skript)

Wichtig: Übung macht den Meister!

→ Aufgaben **selbst** bearbeiten + vorrechnen!

Neu: • nur Einzelabgabe

• **nicht** nach van-Dongen-Skript

Inhaltsüberblick: Themenliste siehe Webseite

Genauer Ablauf: später

Zunächst: • Feldbegriff (\sim ED)

• Hydrodynamik

1 Der Feldbegriff und seine Entstehung

- Fragen:**
- Wie definiert sich eine Feldtheorie?
 - Was kann/soll sie leisten?
 - Wieso ist die Punktmechanik (z.B. mit Coulomb-Gesetz) unzureichend?
 - Stellenwert im Standardmodell?

1.1 Punktmechanik versus Kontinuumsphysik

ca. 250 v. Chr. Wellencharakter von Schall
(Chrysispos von Soli)

ca. 1500 Schall braucht Medium (z.B. Luft), endliche Geschwindigkeit (da Vinci)

1686 Newtonsches Gravitationsgesetz

ca. 1750 Wellengleichung für Schall (Euler)

1755 Euler-Gleichungen für reibungsfreie Flüssigkeiten

1785 Coulomb-Gesetz

1803 Atom-Hypothese \leftrightarrow Chemie (Dalton)

③ 1831 Faradaysches Induktionsgesetz

1862 Maxwell-Gleichungen (Feldtheorie, Vereinigung von Elektromagnetismus + Optik)

1888 Nachweis elm. Wellen (Hertz)

1890 moderne Formulierung MG (Hertz)

1905 Spezielle Relativitätstheorie (Einstein)

1915 Allgemeine Relativitätstheorie (Einstein)

Stand der Physik um 1800:

Punktmechanik „Atomismus“	Kontinuumsphysik „Dynamismus“
Newton's Gravitation Coulomb-Gesetz	Hydrostatik / Dynamik Akustik Wärmelehre Optik Magnetismus
Instantane Fernwirkung	Verzögerte Nahwirkung

Newton's Gravitationsgesetz $\vec{F} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$

- Musterbeispiel für einfaches Kraftgesetz mit breitem Anwendungsbereich:

- + Bahnen der Himmelskörper
- + Bewegung eines geworfenen Steins

Aber: • impliziert instantane Fernwirkung
• keine fundamentale Begründung

(\rightarrow zunächst Befremden, dann akzeptiert)

Analog: Coulomb-Gesetz

Also: Punktmechanik für Gravitation + elektr. Kraft
sehr erfolgreich, konsistent mit Atomhypothese.

Dagegen Kontinuumsphysik z. B. für Wärmelehre,
Hydrodynamik und Optik (Interferenzversuche
von Fresnel, später Photoeffekt \rightarrow Quantentheorie).
Zurückführung auf Punktmechanik möglich /
wünschenswert?

1.2 „Dynamismus“ und Feldvorstellung

Idee/Frage: lässt sich die Punktmechanik mit hydrodynamischen Vorstellungen, d. h. ohne Fernwirkung verstehen?

Analogie: die Kraft im Coulomb- und Gravitationsgesetz entspricht dem Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit, die aus einer punktförmigen Quelle strömt (bzw. in diese hinein)

$\frac{1}{r^2}$ -Gesetz auch für scheinbare Helligkeit einer punktförmigen isotropen Lichtquelle.

„Dynamismus“: universelle „Kraft“ mit verschiedenen Erscheinungsformen („optische Kraft“, „Wärme-Kraft“, „elektrische Kraft“ etc.), die ineinander umgewandelt werden können. „Naturphilosophie“, im Gegensatz zu „materialistisch“ und „geistfarrer“ Punktmechanik (\sim Energieerhaltung)

Beobachtung (Ritter, ca. 1800): Stromerzeugung aus galvanischem Element ist stets mit chemischer Reaktion verbunden, d.h. „chemische Kraft“ \rightarrow „galvanische Kraft“

Oersted, 1820: Magnetnadel wird durch Strom in geradem Draht quer zu diesem abgelenkt

Ampère, 1822: Magnetismus als Wirkung bewegter Ladungen; Kreisströme in Ferromagneten.
„elektrische Kraft“ \rightarrow „magnetische Kraft“

Faraday, 1831: Induktionsgesetz („magnetischelek.“ \rightarrow „elektrische Kraft“), Raum von Feldern elektrischer und magnetischer Kraftlinien durchsetzt. Einschluss der Gravitation?

[außerdem: Joulesche Wärme (Joule, 1840)]

22.10.12

1.3 Entdeckung der Maxwell-Gleichungen

Maxwell, 1862: mathematische Formulierung der Faradayschen Ideen (Begriff von Feldern, magn. Induktion) sowie aller früher gefundenen elm. Gesetze (Coulomb-, Amperesches Gesetz) **zuzüglich** des **Verschiebungsstroms**

→ • einheitliche Theorie des Elektromagnetismus

• Wellenlösungen mit **Lichtgeschwindigkeit**

1728 Bradley Aberration $c \approx 301\,000 \text{ km/s}$

1851 Foucault Drehspiegel $c \approx 298\,000 \text{ km/s}$

(1983 Definition $c = 299\,792,458 \text{ km/s}$)

→ **Licht** vermutlich elm. Welle

Hertz, 1888: Erzeugung + Nachweis elm. Wellen

Ursprünglich galten die MG als kompliziert und unverständlich [Anekdote: Niederlegung des Lehramts durch Hittorf (Gasentladung)]

⑧ Hertz, 1890: heutige Form der MG

1.4 Das „Feld“: Hilfskonstrukt oder Realität?

Nichttriviale Beobachtung: neben der Gravitation gibt es nur eine weitere langreichweitige Kraft, die an Materie über eine einzige extensive Eigenschaft koppelt, die **Ladung**.

Laut dem **deterministischen Prinzip** muss sich die Kraft \vec{F} auf ein Punktteilchen mit Ladung q am Ort $\vec{x}(t)$ im **isotropen Raum** schreiben lassen als:

$$\vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = q (\vec{E}(t, \vec{x}) + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}(t, \vec{x}))$$

Lorentz-Kraft

Obwohl sich z. B. das Coulomb-Gesetz derart ausdrücken lässt (z. B. für Ladung Q im Ursprung):

$$\vec{F}^e = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (\Leftrightarrow) \quad \vec{F} = q\vec{E} \quad \text{mit} \quad \vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

erscheint $\vec{E}(\vec{x})$ zunächst nur als Hilfsgröße (nur relevant, falls **Probeladung** am Ort \vec{x}).

⑨ Außerdem: immer noch **Fernwirkung!**

Frage: haben \vec{E} und \vec{B} eine eigene Realität,
unabhängig von Probeladungen (\sim Schrödingers
Katze)?

1) Betrachte Kraft von bewegter Punktladung Q
am Ort \vec{x} auf (bewegte) Probeladung q am

$$\text{Ort } \vec{x}: \quad \vec{F} = q (\vec{E}_{\text{ret}} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}_{\text{ret}}) \quad (*)$$

$$\text{mit } \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}\right) \frac{\vec{r} - \frac{\dot{\vec{x}}}{c}}{r^2 (1 - \vec{r} \cdot \dot{\vec{x}}/c)^3} + \frac{1}{c} \frac{\vec{r} \times (\dot{\vec{r}} - \frac{\dot{\vec{x}}}{c}) \times \ddot{\vec{x}}/c}{r (1 - \vec{r} \cdot \dot{\vec{x}}/c)^3} \right] \quad (\Delta)$$

$$\vec{B} = \vec{r}_0 \times \vec{E} \quad (\square)$$

$$\text{mit } \vec{r} = \vec{x} - \vec{x}; \quad r = |\vec{r}|, \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r},$$

wobei „ret“ in $*$ bedeutet, dass \vec{x} und $\dot{\vec{x}}$
in Δ und \square jeweils zu den retardierten
Zeiten $t_{\text{ret}} = t - \frac{r}{c}$ auszuwerten sind.

Als punktmechanisches Gesetz erscheint $*, \Delta, \square$
zu kompliziert um fundamental zu sein \leadsto

Feldynamik mit Ausbreitungsgeschw. c .

2) MG haben Wellenlösungen im Vakuum
(keine Punktmechanik möglich)

3) **Gedankenexperiment:** 2 entgegengesetzt geladene
Teilchen durchlaufen Kepler-Bahnen. Plötzlich
zerfällt eines der Teilchen senkrecht zur
Bahnebene:

wegen des größeren
Abstandes erfahren die

Bruchstücke eine reduzierte

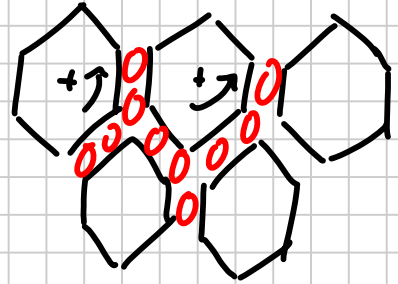
Zentripetal beschleunigung. Das zweite Teilchen
muss jedoch der ursprünglichen Bahn folgen,
bis der Ereignishorizont der Explosion eintrifft.

~> Feld muss Impuls (+ Energie) tragen.

Frage: Medium des elektromagnetischen
Feldes (wie Flüssigkeit oder Gas für Schall)?

Äther: feines elastisches Medium

Maxwell's Äthermodell: Elementarwirbel plus Ladungsteilchen, die wie Kugellager wirken, wobei die Winkelgeschwindigkeit der Wirbel dem Magnetfeld entspricht.



Fadenförmiger Strom von Ladungsteilchen
→ Magnetfeld

Unterschiedliche Rotationsgeschwindigkeit der Wirbel → Strom (eher $I \sim \phi$ statt $I \sim \dot{\phi}$)

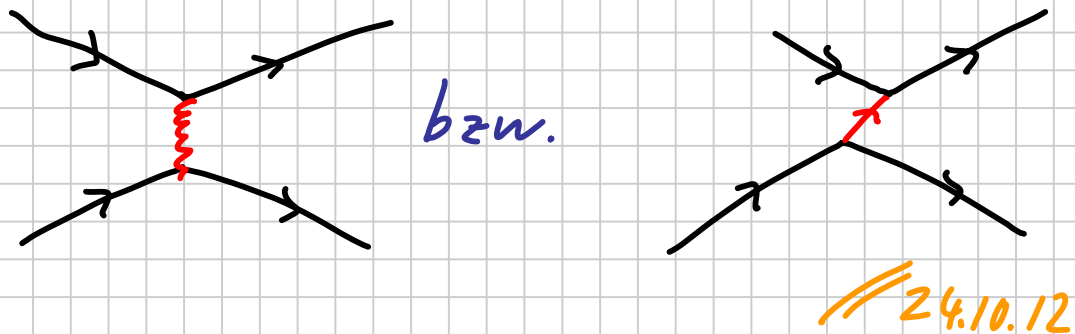
Widerlegung der Ätherhypothese durch Messungen von c (Michelson, 1881 + Morley, 1887) und SRT (Einstein, 1905)

→ nur Raumzeit + Feld, sonst nichts!

Später: auch Gravitation als Feldtheorie (Einstein, 1915), die auf die Metrik der Raumzeit zurückwirkt (Elimination der Kraft!)

1.5 Der Feldbegriff in der modernen Physik

Heute: Feldtheorien als fundamentale Beschreibung,
Punktbegriff als Approximation bzw. als
Quantisierung von Feldern (Welle-Teilchen-
Dualismus). Insbesondere *Nahwirkungskonzept*,
z.B. in Feynman-Diagrammen:



4 fundamentale Wechselwirkungen

Name	rel. Stärke	Reichweite
Starke WW	1	10^{-15} m *
elektro- schwach	elm. WW	10^{-2}
	schwache WW	10^{-5}
Gravitation	10^{-40}	10^{-18} m *
		∞

stark + schwach: nur kleine Abstände \rightarrow QFT

→ nur die Elektrodynamik lässt sich sinnvoll als **klassische Feldtheorie** im „normalen Raum“ beschreiben.

Die **WW** des **Standardmodells** haben als **Eichtheorien** spezielle Symmetrien; sie lassen sich bei hohen Energien vereinheitlichen (z.B. **Nobelpreis 1979** für Eichtheorie der elektroschwachen WW: **Glashow, Salam, Weinberg**).

Ausser als mikroskopische Theorie (für ED) sind **klassische Feldtheorien** auch als **phänomenologische Theorien** für kontinuierliche Systeme essentiell, z.B. für die Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen, Wärmetransport, chemische Umsetzungen, Plasmen etc.

1.6 Mathematische Formulierung des Feldbegriffs

Generelle Vorstellung: jeder Punkt des Raums wird zum Träger zusätzlicher Qualitäten wie Druck, Temperatur, Dichte, Strömungsgeschwindigkeit und/oder elektrischer und magnetischer Feldstärke.

Genauer: ein Feld ist eine Abbildung des Raumes (bzw. der Raum-Zeit) in eine Menge F seiner möglichen Werte

Bsp: $F = \mathbb{R}^+$ für Druck-, Temperatur-, Dichtefelder
 $F = \mathbb{R}^3$ für Strömungsfeld

Aufgabe der Feldtheorie:

- 1) Charakterisierung „legaler“ Feldkonfigurationen
- 2) Berechnung ihrer Dynamik
- 3) Konstruktion des Feldes für geg. Randbedingungen

Wichtig: Felder haben überabzählb. viele Freiheits-

grade (Gegensatz zu Punktteilchensystemen)

Setzt formal (zunächst nichtrelativistisch):

Physikalischer Raum ist dreidimensionaler affiner Raum E^3 (Punktraum + Differenzvektoren) über einem dreidimensionalen Euklidischen Vektorraum V^3 .

Ein Feld A ^{bzw. eine Feldkonfiguration} ist zunächst eine Abbildung

$$A: E^3 \rightarrow F: \vec{x} \in E^3 \mapsto A(\vec{x}) \in F$$

Die **Dynamik** der Felder lässt sich auf 2 Arten beschreiben:

1) mit zeitabhängiger Abbildungsfunktion

$$A = A(t): E^{(3)} \rightarrow F$$

2) durch Erweiterung der Definitionsmenge auf die Raum-Zeit:

$$A: \mathbb{R} \times E^3 \rightarrow F: (t, \vec{x}) \mapsto A(t, \vec{x})$$

Druck-, Temperatur- und Dichtefelder sind Beispiele für Skalarfelder (mit $F \subset \mathbb{R}$),*

(* in Quantentheorie auch Felder über dem Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C})

dagegen handelt es sich bei Strömungsfeldern und elm. Feldern um **Vektorfelder**, bei denen F ein **reeller** **Vektorraum** ist, nämlich (i.d.R.) genau der Vektorraum V^3 , zu dem E^3 gehört.

Die Feldstärke gibt in jedem Punkt eine **Richtung** im wirklichen Raum an (sowie einen Betrag), muss also bei **Drehungen** der Randbedingungen **mitgedreht** werden:

$$\vec{A}^R(R\vec{x}) = R \vec{A}(\vec{x}) \Leftrightarrow \vec{A}^R(\vec{x}) = R \vec{A}(R^{-1}\vec{x})$$

$$\text{bzw.: } \vec{A}^R = R \cdot \vec{A} \cdot R^{-1}$$

Dagegen wirken **Translationen** nur im Urbildraum E^3 , nicht im Bildraum V^3 :

$$\vec{A}^{T(\vec{a})}(\vec{x} + \vec{a}) = \vec{A}(\vec{x}) \Leftrightarrow \vec{A}^{T(\vec{a})}(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x} - \vec{a})$$

(Unterschied affiner \Leftrightarrow Vektorraum)

Später: Tensorfelder (z. B. als (anti-)symmetrisiertes Tensorprodukt über V^3)

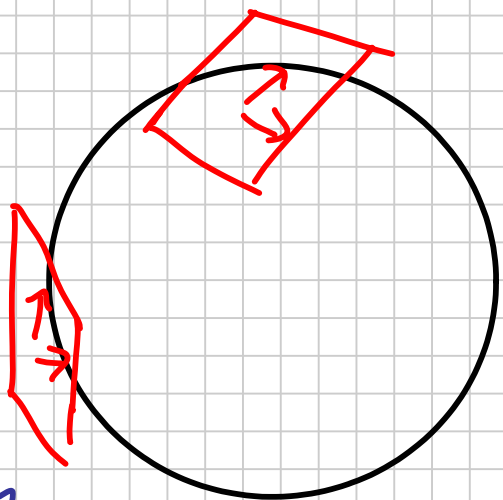
In spezieller Relativitätstheorie: affiner Raum E^4 über vierdimensionalem Minkowski-Raum.

In allgemeiner Relativitätstheorie: Feldtyp, dessen Wertebereich an jedem Raum-Zeit-Punkt ein anderer Vektorraum ist; diese Vektorräume hängen differenzierbar vom Aufpunkt ab.

Analogie: Tangentialvektorfeld an Sphäre $S_1^{(2)}$

z. B. von Windstärken auf Erdkugel (vertikale Komponenten vernachlässigt):

$\vec{x} \mapsto \vec{T}(\vec{x})$ aus zweidimensionalem Tangentialraum,



Auch möglich: Vektorräume als Wertebereich von Feldern, die keinen Bezug zu Raumrichtungen

⑬ haben. Beispiele: Phasen, Isospin

2 Elemente der Hydrodynamik

Jetzt konkret: Theorie der **Fluide**, d.h. von Flüssigkeiten und Gasen.

Fundamentales Feld: **Strömungsfeld** $\vec{v}(t, \vec{x})$, das die **Strömungsgeschwindigkeit** angibt.

Visualisierung möglich durch **Stromlinien** $\vec{x}(\tau)$, deren Tangente in jedem Punkt parallel zum Strömungsfeld ist, z.B.: $\frac{d\vec{x}}{d\tau}(\tau) = \vec{v}(t, \vec{x}(\tau))$

(hier **Bahnparameter** τ bis auf Konstante festgelegt).

Analog definiert man für allgemeine Vektorfelder **Feldlinien**.

2.1 Bilanzgleichungen

Zusätzlich zu $\vec{v}(t, \vec{x})$ definieren wir die

① **Massendichte** $\rho(t, \vec{x})$ und die **Massen-**

stromdichte $\vec{j}(t, \vec{x})$ (Skalar- bzw. Vektorf.)

Dabei gibt \vec{j} die durch eine ^{infinitesimale} Fläche mit Normale \vec{j} strömende Masse pro Zeit- und Flächeneinheit an: im Zeitraum t_1 bis t_2 fließt durch eine Fläche F die Masse:

$$m_F(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \mu_F(t) \quad \text{mit} \quad \mu_F(t) = \int_F d\vec{f} \cdot \vec{j}(t, \vec{x})$$

Es gilt: $\vec{j} = \rho \vec{v}$

Wir betrachten nun ein festes Volumen V mit Rand ∂V . Zur Zeit t enthält dieses die Gesamtmasse $m_V(t) = \int_V d^3x \rho(t, \vec{x})$

In Abwesenheit von Quellen oder Senken kann sich m_V nur durch Ein- oder Ausströmen von Masse über den Rand ändern. Orientiert man ∂V nach außen, so gilt also:

Massenerhaltung

$$\frac{dm_V}{dt}(t) = \int_V d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, \vec{x}) = - \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}(t, \vec{x})$$

(20)

$$\stackrel{\text{Gauss}}{=} - \int_V d^3x (\vec{\nabla} \cdot \vec{j})(t, \vec{x})$$

Wegen V beliebig gilt also die Bilanz- oder Kontinuitätsgleichung für die Masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

29.10.12

Auch andere extensive Größen lassen sich bilanzieren, z. B. elektrische Ladung, Energie, Impuls, Drehimpuls etc. Wenn wir für die Größe a eine Quelldichte $q^a(t, \vec{x})$ (d.h. die pro Zeit- und Volumeneinheit nachgelieferte Menge der Größe a) zulassen, so gilt:

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}^a = q^a \quad \text{Bilanzgleichung}$$

Die Existenz von Quellen oder Senken deutet darauf hin, dass die entsprechende Größe (insgesamt) nicht erhalten oder das System nicht abgeschlossen ist.

$$(21) \quad (q^a \equiv 0 \rightarrow \text{Erhaltungssatz } \frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}^a = 0)$$

Der **Austausch** einer extensiven Größe a zwischen zwei physikalischen Systemen ist möglich

- 1) über Grenzflächen (z.B. Flüssigkeit \leftrightarrow Behälter)
- 2) wenn beide Systeme überlappen oder sich sogar vollständig räumlich überlagern.

Nur im Fall 2 können für Erhaltungsgrößen Quellterme auftauchen (mit $\sum_i q_i^a = 0$)

Beispiele: (i) Ohmsche Verluste im Leiter
(elektrische Energie \rightarrow Wärme)

(ii) Austausch von Energie und Impuls zwischen bewegten el. Ladungen und dem elm. Feld

Dagegen gilt z.B. für die Entropie S : $q^S \geq 0$.

Der **Transport** von extensiven Größen hat in Fluiden

z. B. 2 Komponenten, die jeweils zur **Stromdichte**

\vec{j}^a beitragen:

a) **Konvektion** $\vec{j}_{\text{konv}}^a = \rho^a \vec{v}$

(Mitführung mit der Strömung)

b) Konduktion \vec{j}_{kond}^a (Leitung)

Z. B. Wärmeleitung auch bei $\vec{v} = 0$.

Dagegen wäre Wärmestrahlung innerhalb des Fluids durch Quellen + Senken zu beschreiben.

Gesamtstrom: $\vec{j}^a = \vec{j}_{\text{konv}}^a + \vec{j}_{\text{kond}}^a = \rho^a \vec{v} + \vec{j}_{\text{kond}}^a$

2.2 Impulsbilanz und Drehimpulsbilanz

Da die Impulsdichte $\vec{\rho}^p(t, \vec{x})$ selbst schon eine vektorielle Größe ist, handelt es sich bei der zugehörigen Stromdichte $\vec{j}^p(t, \vec{x})$ um ein Tensorfeld zweiter Stufe. Die Quelledichte ist offensichtlich eine Kraftdichte $\vec{f}(t, \vec{x})$.

Damit lautet die Bilanzgleichung (in Komponenten):

$$\frac{\partial \rho_i^p}{\partial t} + \nabla_a \dot{j}_{ia}^p = f_i \quad (*)$$

Z. B. gilt im äußeren Schwerfeld: $\vec{f} = \rho \vec{g}$.

Der pro Zeiteinheit durch eine Fläche strömende Impuls kann als Druckkraft auf diese Fläche angesehen werden: $F_i = \int_F d f_a \dot{j}_{ia}^P$

\dot{j}_{ia}^P gibt also die i -te Komponente der Kraft pro Fläche auf ein Flächenelement mit Normale in a -Richtung an.

Falls F geschlossen ist, gilt mit $F = \partial V$ für das eingeschlossene Volumen V :

$$F_i = \int_{\partial V} d f_a \dot{j}_{ia}^P \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_V d^3x \underbrace{\nabla_a \dot{j}_{ia}^P}_{\text{„innere Kraftdichte“}}$$

In einem Fluid gilt konkret $\vec{\rho}^P = \rho \vec{v}$

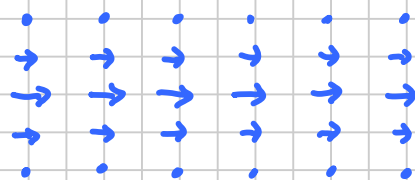
$$\Rightarrow \dot{j}_{ia}^P = (\dot{j}_{Konv}^P)_{ia} + (\dot{j}_{Kond}^P)_{ia} = \rho v_i v_a + \sigma_{ia}$$

mit dem (hierdurch definierten) Drucktensor σ

Beispiel: Betrachte eine viskose Flüssigkeit (mit

innerer Reibung) und anfangs

(24) inhomogenem Strömungsprofil:



Ohne äußere Kräfte wird sich die Impulsdichte „konduktiv“ von der schnell strömenden Mitte nach oben und unten ausbreiten.

Analog zu * lautet die Bilanzgleichung für den

Drehimpuls: $\frac{\partial p_i^L}{\partial t} + \nabla_e j_{ie}^L = d_i$ (A)

mit der Drehmomentdichte $\vec{d}(t, \vec{x})$.

Für normal strömende Fluide und elastische Kontinua (nicht jedoch z.B. für spinbehaftete Teilchen oder eine Suspension von magnetischen Partikeln im Magnetfeld) gilt:

a) kein „innerer Drehimpuls“, d.h. es gilt:

$$\vec{p}^L(t, \vec{x}) = \vec{x} \times \vec{p}^P(t, \vec{x}) \Leftrightarrow p_i^L = \epsilon_{ija} x_j p_a^P$$

$$j_{ie}^L = \epsilon_{ija} x_j j_{ek}^P$$

b) keine „inneren Drehmomente“: $d_i = \epsilon_{ija} x_j f_e$

$$\Rightarrow \epsilon_{ije} x_j \frac{\partial p_e^P}{\partial t} + \nabla_a (\epsilon_{ije} x_j j_{ea}^P) = \epsilon_{ije} x_j f_e$$

$$\textcircled{25} \Rightarrow \epsilon_{ije} x_j \left(\frac{\partial p_e^P}{\partial t} + \nabla_a j_{ea}^P \right) + \epsilon_{iae} j_{ek}^P = \epsilon_{ije} x_j f_e$$

(□: Produktregel und $\nabla_a x_j = \delta_{aj}$)

Mit der Impulsbilanz * folgt:

$$\text{Eiell } j_{ea}^p = 0 \Leftrightarrow j_{ea}^p = j_{ae}^p$$

Die Impulsstromdichte ist für normale Fluide also ein symmetrisches Tensorfeld.

2.3 Die Navier-Stokes-Gleichungen

In der Impuls-Bilanzgleichung

$$\frac{\partial p_i^p}{\partial t} + \nabla_a (\rho v_i v_a + \sigma_{ia}) = f_i$$

lässt sich der isotrope und geschwindigkeitsunabhängige Anteil des Drucktensors als skalarer Druck

identifizieren: $\sigma_{ia} = p \delta_{ia} + \sigma'_{ia}$,

der also als innere Potentialkraft aufgefasst

werden kann: $\vec{f}^{in} = -\vec{\nabla} p$

Dagegen entspricht der geschwindigkeitsabhängige

Anteil σ'_{ia} innerer Reibung. Insgesamt

②6 können wir für die Impulsbilanz schreiben:

$$\begin{aligned}
f_i &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla_a(\rho v_i v_a + p \delta_{ia} + \tau_{ia}') \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \nabla_a(\rho v_a) + \rho v_a \nabla_a v_i + \nabla_i p + \nabla_a \tau_{ia}' \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=0 \text{ wegen } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla(\rho \vec{v}) = 0} \\
&= \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_a \nabla_a v_i \right) + \nabla_i p + \nabla_a \tau_{ia}'
\end{aligned}$$

2.3.1 Ideale Fluide

Für ein ideales Fluid gilt definitionsgemäß $\sigma' = 0$ (keine innere Reibung). Es folgt

dann

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] + \nabla \dot{p} = \vec{f} \quad (E1)$$

Euler - Strömungsgleichung

31.10.12

Dabei hat die ersten beiden Terme links eine einfache Interpretation als substantielle Ableitung $\frac{D}{Dt}$ von \vec{v} , d.h. die zeitliche Änderung entlang der Stromlinien. Allgemein lautet diese für

(27) eine beliebige Größe A :

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt}(t, \vec{x}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t+\Delta t, \vec{x}+\Delta \vec{x}) - A(t, \vec{x})}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t+\Delta t, \vec{x} + \vec{v}(t, \vec{x})\Delta t) - A(t, \vec{x})}{\Delta t} \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) A \right) (t, \vec{x}) \end{aligned}$$

Also ist $D\vec{v}/Dt$ die Beschleunigung eines Massenelements auf seiner Bahn. Es folgt:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \vec{\nabla} p \quad (E2)$$

D.h. Euler Gleichung $\hat{=}$ Newton-Gleichung für ideales Fluid (ohne Reibung).

Mit $\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(v^2) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ gilt auch

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}(v^2) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right) + \vec{\nabla} p = \vec{f} \quad (E3)$$

2.3.2 Stationäre Strömung inkompressibler idealer Fluide - Bernoulli-Gesetz

Wir machen jetzt (vorübergehend) zusätzliche

Annahmen:

(i) inkompressibles Fluid: $\rho(t, \vec{x}) = \rho_0$

(ii) stationäre Strömung: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

(iii) wirbelfreie Strömung: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$

(iv) äußere Potentialkraft: $\vec{f} = -\vec{\nabla} \phi$

$$\Rightarrow \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}(v^2) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right) + \vec{\nabla} p = \vec{f} = -\vec{\nabla} \phi$$

$\rho = \rho_0$ (i) $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ (ii) $\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{0}$ (iii) $\vec{f} = -\vec{\nabla} \phi$ (iv)

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho_0 v^2 + p + \phi \right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \rho_0 v^2 + p + \phi = \text{konst.}$$

Gesetz von Bernoulli

Energiesatz für ideale inkompressible Fluide.

2.3.3 Hydrostatik

Noch einfacher ist die Hydrostatik, d.h. $\vec{v} = \vec{0}$

(\leadsto Punkte (i)-(iii) von 2.3.2 automatisch erfüllt)

$$\Rightarrow \vec{\nabla} p = \vec{f} \quad (= -\vec{\nabla} \phi \text{ für Potentialkraft}).$$

Im homogenen Schwerfeld $\vec{f} = \rho \vec{g}$ gilt dann

29 für inkompressible Fluide: $\vec{\nabla} (p - \rho_0 \vec{g} \cdot \vec{x}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow p(\vec{x}) = p_0 + \rho_0 \vec{g} \cdot \vec{x}$$

Der Druck nimmt also linear mit der Tiefe zu.

Für die Kraft \vec{F} auf einen eingebrachten Körper

$$\text{gilt: } F_i = - \int_{\partial V} dA_e j_{ie}^p \stackrel{\text{Gauß}}{=} - \int_V d^3x \nabla_e j_{ie}^p$$

Dabei sind offenbar alle Impulsstromverteilungen gleichwertig, die am Rand ∂V die richtigen Werte haben. Insbesondere können wir das $j_{ie}^p(\vec{x})$ verwenden, das für ein statisches Fluid mit $\rho = \rho_0$

$$\text{korrekt wäre: } j_{ie}^p = \rho v_i v_e + p \delta_{ie} + \nabla_{ie}^p$$

$$\Rightarrow \nabla_e j_{ie}^p = \nabla_i p = \rho_0 g_i$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\rho_0 V \vec{g}$$

↑ keine Reibung
ohne Geschw.

Gesetz von Archimedes: der Auftrieb eines beliebigen Körpers entspricht dem Gewicht des verdrängten Wassers.

2.3.4 Newtonsche Fluide

Reibung setzt eine Relativbewegung von Fluidteilchen voraus, d.h. $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \neq 0$.

Einfachste Annahme: lineare Abhängigkeit

zwischen σ'_{ia} und $\nabla_i v_a$

Wegen der Symmetrie $\sigma'_{ia} = \sigma'_{ai}$ und bei Isotropie ist dann der allgemeinste Zusammenhang:

$$\sigma'_{ia} = -\eta \underbrace{(\nabla_i v_a + \nabla_a v_i - \frac{2}{3} \delta_{ia} \nabla_r v_r)}_{\text{spurfrei}} - \zeta \delta_{ia} \nabla_r v_r \quad (*)$$

Hier heisst η Zähigkeit oder Viskosität und

ζ Volumenzähigkeit bzw. Volumenviskosität.

Fluide, die $*$ gehorchen, heissen Newtonsche

Fluide. Falls η und ζ konstant sind, erhalten die Navier-Stokes-Gleichungen dann die Form

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) + \vec{\nabla} p - \eta \Delta \vec{v} - \left(\frac{1}{3} \eta + \zeta \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \vec{f}$$

Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ sind das 4 Gleichungen für

(31)

die 5 Unbekannten \vec{v}, ρ, p . Zur eindeutigen Bestimmung ist noch eine **Materialgleichung** wie $p = p(T, \rho)$ nötig.

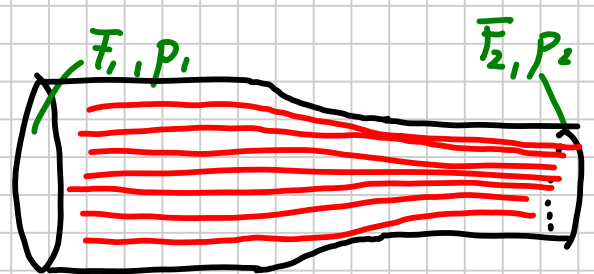
Falls Temperaturänderungen nicht vernachlässigbar sind, muss man zusätzlich die Wärmeleitung (bzw. Verteilung) berücksichtigen.

Die **Lösung** der Navier-Stokes-Gleichungen ist aufgrund der Nichtlinearitäten i.A. sehr kompliziert. // 5.11.12

2.3.5 Anwendungen: 1) Antrieb Flugzeug (nur live)

2) Laval-Düse

Wir betrachten nun eine stationäre Strömung durch



ein Rohr mit veränderlichem Querschnitt.

Die Kontinuitätsgleichung $0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$

liefert für jeden rotationssym. Rohrabschnitt (beachte: \vec{v} asymptotisch parallel zu allen Wänden)

$$0 = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV = \oint_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot d\vec{f} = \rho_2 F_2 \bar{v}_2 - \rho_1 F_1 \bar{v}_1$$

wobei \bar{v} die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit angibt und wir für die Dichte $\rho(\vec{x}) = \rho(z)$ annehmen. Also:

$$\rho F \bar{v} = \text{konst.} \Leftrightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dF}{F} + \frac{d\bar{v}}{\bar{v}} = 0$$

Zusätzlich liefert die Euler-Gleichung mit $\vec{f} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$:

$$\frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} v^2 + \vec{\nabla} p = \vec{0}$$

$$\rho v \frac{dv}{dz} + \frac{dp}{dz} = 0 \Rightarrow v dv = - \frac{dp}{\rho}$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{F} &= - \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dv}{v} = - \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dp}{\rho v^2} = \frac{dp}{\rho v^2} \left(1 - v^2 \frac{d\rho}{dp} \right) \\ &= \frac{dp}{\rho v^2} \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dF}{F} = \frac{dv}{v} \left[\left(\frac{v}{c} \right)^2 - 1 \right]} \quad \text{Hugoniot-Gleichung}$$

(33)

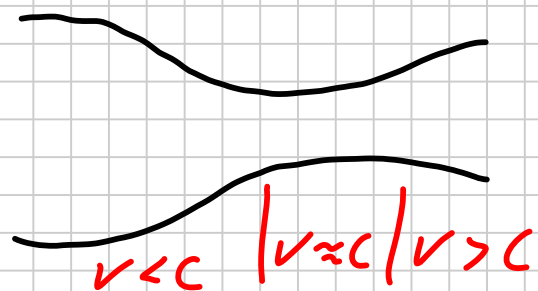
Für Geschwindigkeiten $v \ll c$ gilt also, dass Flächen- und Geschwindigkeitsänderungen umgekehrt proportional sind: $\frac{dF}{F} \approx - \frac{dv}{v}$

Dies gilt exakt für inkompressible Fluide, für die $\frac{dp}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{v} = 0$: $F \cdot v = \text{konst}$

Für $v \rightarrow c$ wird die relative Geschwindigkeitszunahme (bei gleicher relativer Flächenabnahme) zunächst größer, bis sich das Vorzeichen umkehrt! Dieser Effekt wird in der Laval-Düse (schon in der V2 der Wehrmacht) benutzt:

dort wählt man die

Parameter so, dass an



der engsten Stelle $v \approx c$

erreicht wird. Nach der Verengung steigt die Geschwindigkeit dann weiter an

(\rightarrow optimaler Rückstoß) // 7.11.12

3 Elektro- und Magnetostatik

Wir betrachten die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen (in SI-Einheiten)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0}_{= \frac{1}{c^2}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

(Einheitencheck: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow [\vec{E}] = [c][\vec{B}]$)

im statischen Limes $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$. Dieser ist zum einen gerechtfertigt, falls eine lokalisierte, langsam veränderliche Ladungs + Stromverteilung betrachtet wird und äußere Felder bzw. Strahlung abgeschirmt werden, andererseits für zeitliche Mittelwerte von Feldern: so gilt wegen der Linearität der MG z.B.: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Für betragsmäßig beschränkte Felder gilt

$$\begin{aligned}
 \text{weiterhin: } \left| \overline{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}(\vec{x}) \right| &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t, \vec{x}) \right| \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \vec{B}(T, \vec{x}) - \vec{B}(0, \vec{x}) \right| \\
 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2 B_{\max}(\vec{x})}{T} = 0
 \end{aligned}$$

Im statischen Grenzfall entkoppeln elektrische und magnetische Felder:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}); & \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) &= \vec{0} \\
 \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) &= \mu_0 \vec{j}(\vec{x}); & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

Die elektrischen und magnetischen Felder können dann separat bestimmt werden. Dabei hilft der

Satz von Helmholtz: ein Feld $\vec{f}(\vec{x})$, das stetig differenzierbar ist und im Unendlichen schneller als $\frac{1}{r}$ gegen 0 geht, lässt sich in folgender Form darstellen:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \underbrace{-\vec{\nabla} a(\vec{x})}_{\text{wirbelfrei}} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{b}(\vec{x})}_{\text{quellenfrei}}$$

Daraus folgt für das (statische) elektrische Feld:
 $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \quad (\leadsto \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0)$
und die Bestimmungsgleichung

$$\Delta\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{x}) \quad (*)$$

Für das magnetische Feld folgt zunächst
 $\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) \quad (\leadsto \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0)$
mit der Bestimmungsgleichung

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Wählen wir zusätzlich die Coulomb-Eichung
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, so erhalten wir:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (\Delta)$$

Für jede Komponente A_i ist die Bestimmungsgleichung Δ also identisch zu $*$ mit den Ersetzungen $\phi \rightarrow A_i$, $\frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0 j_i$. Unterschiede
(37) ergeben sich erst auf der Ebene von \vec{E} und \vec{B} .

3.1 Elektrostatik

Die Grundaufgabe der Elektrostatik, die Bestimmung des elektrischen Feldes für eine geg. Ladungsverteilung und geg. Randbedingungen, entspricht mit $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{x})$ offensichtlich der Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$

Wegen ihrer **Linearität** gilt für Ladungsverteilungen

$\rho(\vec{x}) = \rho_1(\vec{x}) + \rho_2(\vec{x})$, dass sich (bei geeigneten RBs)

die Gesamtlösung additiv aus den Teillösungen

zusammensetzt: $\Delta \phi_{1/2}(\vec{x}) = -\frac{\rho_{1/2}(\vec{x})}{\epsilon_0} \Rightarrow \Delta \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$

für $\phi(\vec{x}) = \phi_1(\vec{x}) + \phi_2(\vec{x})$

Zusätzlich lässt sich noch eine Lösung der homogenen Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)

$$\Delta \phi_{\text{hom}}(\vec{x}) = 0 \quad \text{addieren.}$$

Strategie: löse zuerst ein Standardproblem; konstruiere aus dieser Standardlösung die allg. Lösung.

③⑧ Lege dabei die RB eindeutig fest.

3.1.1 Lösung für natürliche Randbedingungen

Wir betrachten zunächst den ganzen Raum und fordern für die Lösung $\phi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$

Unter diesen Bedingungen ist die (zweimal stetig diffbare) Lösung der Laplace-Gleichung eindeutig: $\phi_{\text{hom}}(\vec{x}) \equiv 0$

Beweis durch Mittelwertsatz von Gauß (s.u.):

Lösungen der Laplace-Gleichung nehmen alle Extrema auf dem Rand eines beschränkten Volumens an.

Falls $\phi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$, existiert für

jedes $\varepsilon > 0$ ein R_ε so dass $|\phi(\vec{x})| < \varepsilon$ für $|\vec{x}| > R_\varepsilon$

Wähle z.B. Kugel $V = \{\vec{x}; |\vec{x}| \leq R_\varepsilon\} \rightarrow |\phi(\vec{x})| < \varepsilon$

(Widerspruchsbeweis über Taylorentwicklung um angenommenes Extremum im Inneren)

$$\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_0)^T \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) (\vec{x} - \vec{x}_0) + \mathcal{O}(|\vec{x} - \vec{x}_0|^3)$$

nicht scharf genug)

(39) Also ist auch die Lösung der Poisson-

Gleichung mit natürlichen RB eindeutig:
 aus $\phi_1 \neq \phi_2$ Lösung Poisson-Gleichung folgt
 $\phi_1 - \phi_2 \neq 0$ Lösung Laplace-Gleichung \Downarrow

Als Standardproblem wählen wir das Feld
 einer punktförmigen Quelle bei \vec{x}' :

$$\Delta_{\vec{x}} G(\vec{x}; \vec{x}') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

↑
Parameter

Behauptung: $G(\vec{x}; \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$

Beweis I: (i) $G(\vec{x}; \vec{x}') \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$ RB o.k. ✓

(ii) für $\vec{x} \neq \vec{x}'$ muss gelten:

$$0 = \Delta_{\vec{x}} G(\vec{x}; \vec{x}') = \Delta_{\vec{r}} G(\vec{x}; \vec{x}')$$

mit $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$

$$\Delta_r h(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r h(r))$$

$$\Rightarrow \Delta_r G(\vec{x}; \vec{x}') = \Delta_r \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{r}{r} = 0 \checkmark$$

(iii) für $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$ integriere über Vollkugel

(40) um \vec{x}' (Radius $\varepsilon > 0$ beliebig):

$$\int_{|\vec{r}'| \leq \epsilon} d^3 r' \Delta_{r'} G(|\vec{r}|) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\vec{r}'| \leq \epsilon} d^3 r' \Delta_{r'} \frac{1}{|\vec{r}'|}$$

$$\stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{r}' = \epsilon} \underbrace{d\vec{f}}_{= \vec{e}_r df} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}}_{-\frac{\vec{r}'}{r'^3} = -\vec{e}_r \frac{1}{r'^2}} \frac{1}{|\vec{r}'|}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_{\vec{r}' = \epsilon} df = -1$$

$$= \int_{|\vec{r}'| \leq \epsilon} d^3 r' \delta(\vec{r}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \delta(|\vec{r}'|) \quad \checkmark$$

Die Standardlösung $G(\vec{x}; \vec{x}') = \overset{\text{hier}}{=} G(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}$ nennt man Green-Funktion der Poisson-Gleichung.

Allgemeine Lösung:

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3 x' G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Beachte: Wir haben zur Bestimmung der Greenfunktion einen Ausdruck gesucht, der

(4)

- (i) radialsymmetrisch war (Symmetrie des Problems): $G(\vec{r}) = g(r)$
- (ii) die Laplace-Gleichung „fast überall“ erfüllt: $\Delta G(\vec{r}) = 0$ für $0 < r < \infty$
- (iii) die Randbedingung bei $r = \infty$ erfüllt
- (iv) die Inhomogenität bei $r = 0$ reproduziert

Lösung nur für (ii) + (iii):

$$\Delta f(r) = 0 \quad \text{für } 0 < r < \infty$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f(r)) = 0 \quad "$$

$$r f(r) = A + Br$$

$$f(r) = \frac{A}{r} + B$$

→ (iii) legt B fest, (iv) legt A fest.

12.11.12

Mathematischer Exkurs

1) Mehrdimensionale partielle Integration

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit abschnittsweise glattem Rand ∂V . Seien $\vec{v}(\vec{x})$ und $\varphi(\vec{x})$ stetig differenzierbar auf V . Dann gilt:

$$\int_V d^n x [\vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) + \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{v}] = \int_V d^n x \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{v})$$

Green

$$= \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \vec{v})$$

$$\Rightarrow \int_V d^n x \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \vec{v}) - \int_V d^n x \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) \quad (\square)$$

check $n=1$:

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \varphi \frac{dv}{dx} = [\varphi v]_{x_{\min}}^{x_{\max}} - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx v \frac{d\varphi}{dx}$$

2) Mittelwertsatz von Gauß

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u(\vec{x})$ zweimal stetig differenzierbar auf V mit $\Delta u(\vec{x}) = 0$

(43)

für alle $\vec{x} \in V$. Dann gilt für jede in V enthaltene Kugel

$$K_{R, \vec{x}_0} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n; |\vec{x} - \vec{x}_0| \leq R \}$$

$$(ii) u(\vec{x}_0) = \frac{1}{S_n(R)} \int_{|\vec{x} - \vec{x}_0| = R} u(\vec{x}) ds$$

↑
ungerichtetes
Flächenelement

mit $S_n(R) =$ Oberfläche einer Kugel vom Radius R in \mathbb{R}^n

D.h.: $u(\vec{x}_0)$ entspricht dem Mittelwert von $u(\vec{x})$ über jede Kugeloberfläche um \vec{x}_0 :

$$u(\vec{x}_0) = \frac{\int_{\partial K_{R, \vec{x}_0}} ds u(\vec{x})}{\int_{\partial K_{R, \vec{x}_0}} ds 1}$$

$$(iii) u(\vec{x}_0) = \frac{1}{V_n(R)} \int_{|\vec{x} - \vec{x}_0| \leq R} d^n x u(\vec{x})$$

mit $V_n(R) =$ Volumen einer Kugel mit Radius R in \mathbb{R}^n . Also Volumen-Mittelwert:

$$u(\vec{x}_0) = \frac{\int_{K_{R, \vec{x}_0}} ds u(\vec{x})}{\int_{K_{R, \vec{x}_0}} ds 1}$$

Beweis von (1) über Dirac-Deltafunktion und ihren Zusammenhang mit der Green-Funktion des Laplace-Operators (Alternativ-Beweis: Übung)

$$\begin{aligned}
 u(\vec{x}_0) &= \int_V d^n x \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) u(\vec{x}) \\
 &= - \int_V d^n x \underbrace{u(\vec{x})}_{\varphi} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} G(\vec{x} - \vec{x}_0))}_{\varphi} \\
 &\stackrel{\square}{=} - \int_{\partial V} u(\vec{x}) d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} G(\vec{x} - \vec{x}_0) + \int_V d^n x \underbrace{\vec{\nabla} G(\vec{x} - \vec{x}_0)}_{\varphi} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} u(\vec{x})}_{\varphi} \\
 &\stackrel{\square'}{=} - \int_{\partial V} u(\vec{x}) d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} G(\vec{x} - \vec{x}_0) + \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot G(\vec{x} - \vec{x}_0) \vec{\nabla} u(\vec{x}) \\
 &\quad - \int_V d^n x G(\vec{x} - \vec{x}_0) \underbrace{\Delta u(\vec{x})}_{=0}
 \end{aligned}$$

Jetzt spezifizieren wir, dass das (bisher weitgehend beliebige) Volumen V einem Kreis um \vec{x}_0 entspricht. Dann gilt:

(45) $\vec{\nabla} G(\vec{r}) = g(r) \hat{e}_r; \quad d\vec{f} = df \hat{e}_r \quad (\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_0)$

Anwendung: der dreidimensionale Einschlass geladener Teilchen durch elektrostatische Fallen (oder von magnetischen Dipolen durch statische Magnetfelder) ist **unmöglich!**

2) Falls $\phi_{\text{hom}}(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein Radius R_ε , so dass $|\phi_{\text{hom}}(\vec{x})| < \varepsilon$ für $|\vec{x}| > R_\varepsilon$. Für gegebenes \vec{x}_0 und ε wähle Kugel $V = \{ \vec{x}; |\vec{x}| \leq R_\varepsilon + |\vec{x}_0| \}$

$$\Rightarrow |\phi_{\text{hom}}(\vec{x}_0)| < \varepsilon$$

Also: $\phi_{\text{hom}}(\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \rightarrow \phi_{\text{hom}} = 0$ **eindeutig!**

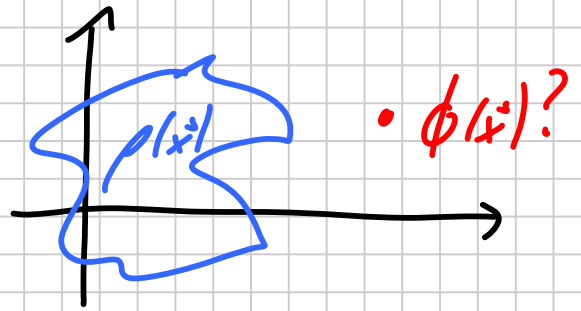
Die eindeutige Lösung der Poisson-Gleichung in \mathbb{R}^3 mit der Randbedingung $\phi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$ lautet also tatsächlich:

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

(17)

3.1.2 Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten

Wir betrachten eine räumlich beschränkte Ladungsverteilung:



$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{für } \vec{x} \gg R$$

und möchten das Fernfeld $\vec{E}(\vec{x})$ bzw. $\phi(\vec{x})$ für $\vec{x} \gg R$ charakterisieren.

Anwendung: • Wechselwirkung zwischen Molekülen,
• Gravitationspotential von nicht-sphärischen Himmelskörpern (Newtonsche Gravitation)

Ansatz: wegen $|\vec{x}'| \ll |\vec{x}|$ können wir die allgemeine Lösung (D) nach \vec{x}' entwickeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= [x^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}' + (x')^2]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{x} \left[1 - \frac{2\vec{x} \cdot \vec{x}'}{x} + \left(\frac{x'}{x}\right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{x} \left\{ 1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{x} + \frac{1}{2x^2} \vec{x}'^T [3\vec{x}'(\vec{x}')^T - (x')^2 \mathbb{1}] \vec{x} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2x^3} \vec{x}'_\alpha \vec{x}'_\beta \vec{x}'_\gamma [5x'_\alpha x'_\beta x'_\gamma - x'_\alpha \delta_{\beta\gamma} - x'_\beta \delta_{\alpha\gamma} - x'_\gamma \delta_{\alpha\beta}] + \dots \}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 x} \left(q + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{d}}{x} + \frac{\vec{x}'^T Q \vec{x}'}{x^2} \right) + \mathcal{O}(x^{-4})$$

mit der Gesamtladung $q = \int d^3x' \rho(\vec{x}')$,

dem Dipolmoment $\vec{d} = \int d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{x}'$

und dem Quadrupoltensor

$$Q = \int d^3x' \rho(\vec{x}') \left[\frac{3}{2} \vec{x}'(\vec{x}')^T - \frac{1}{2} (x')^2 \mathbb{1} \right],$$

\uparrow Dyade

einem symmetrischen spurfreien Tensor 2. Stufe (also 5 unabhängige Komponenten).

Die Koeffizienten nennt man insgesamt **Multipolmomente**.

Exakte Realisierungen von reinen Multipolen der Ordnung n (\sim) $\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) x^{-(n+1)}$ für $\vec{x} > R$

1) **Monopol**: Punktladung q im Ursprung

(oder sphärisch symmetrische Ladungsverteilung)

2) Dipol: $\rho(\vec{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho_\lambda(\vec{x})$

$$\rho_\lambda(\vec{x}) = \frac{d}{\lambda} \left[\delta(\vec{x} - \frac{\lambda}{2} \hat{d}) - \delta(\vec{x} + \frac{\lambda}{2} \hat{d}) \right]$$

$$\Rightarrow \vec{d} = d \hat{d}; \quad q_{\text{ges}} = 0 \quad \text{für jedes } \lambda$$

Alle höheren Multipolmomente (Ordnung n)
konvergieren wie $\lambda^{(n-1)}$ gegen 0. / 14.11.12

3.1.3 Separation der Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten

Bei nichttrivialen Randbedingungen oder z.B. im Rahmen einer Multipolentwicklung ist es oft nützlich, zur Lösung der Laplace-Gleichung eine Entwicklung nach einem vollständigen Orthornormalsystem zu benutzen. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall: kartesischen Koordinaten.

Für die Lösung ϕ der Laplace-Gleichung machen wir einen **Produktansatz**: $\phi(\vec{x}) = U(x)V(y)W(z)$

$$\Delta\phi = 0 \Leftrightarrow U''VW + V''UW + W''UV = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{U''}{U}(x) + \frac{V''}{V}(y) + \frac{W''}{W}(z) = 0 \quad (*)$$

Wegen der verschiedenen Argumente müssen alle Terme in **(*)** offensichtlich konstant sein:

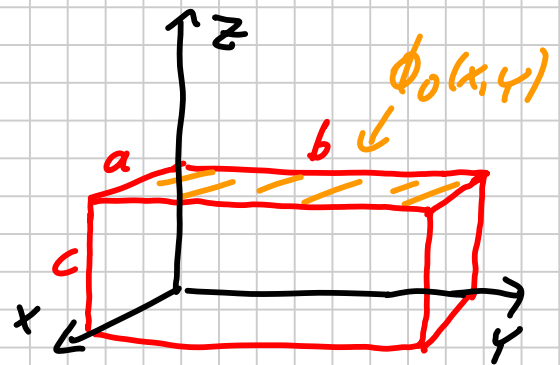
$$\textcircled{51} \quad \frac{U''}{U}(x) = -\alpha^2; \quad \frac{V''}{V}(y) = -\beta^2; \quad \frac{W''}{W}(z) = -\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Damit lautet die spezielle (faktorisierte) Lösung

$$\phi_{\alpha\beta\gamma}(\vec{x}) = e^{i\alpha x} e^{i\beta y} e^{i\gamma z}; \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

und die allgemeine Lösung

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0}} A_{\alpha\beta\gamma} \phi_{\alpha\beta\gamma}(\vec{x}) \quad (\Delta)$$



Anwendung: Randwertproblem für Quader mit

Koordinaten $0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; 0 \leq z \leq c$ mit

Randbedingung: $\phi(x, y, c) = \phi_0(x, y)$ (\square)

$$\phi(x, y, 0) = \phi(0, y, z) = \phi(a, y, z) = \phi(x, 0, z) = \phi(x, b, z) = 0$$

Hier bietet sich die folgende Parametrisierung der

Lösung (Δ) an: $\alpha_m = \frac{\pi m}{a}; \beta_n = \frac{\pi n}{b}$

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \sinh(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} z)$$

Diese erfüllt „automatisch“ die Randbedingung $\phi = 0$

an 5 der Randflächen. Die verbleibende Rand-

bedingung lautet:

$$\phi_0(x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sinh(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} c) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y)$$


(52)

A_{mn} Fourier-Koeffizienten auf Randfläche

Wegen der Orthogonalitätsbedingung

$$\frac{2}{a} \int_0^a dx \sin(\alpha_n x) \sin(\alpha_l x) = \delta_{nl} \quad \text{folgt:}$$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab \sinh(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} c)} \int_0^a dx \int_0^b dy \phi(x, y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y)$$

Für allgemeine Randbedingungen auf der Quaderoberfläche kann man 6 Lösungen der obigen Art superponieren. Analog lassen sich alle Körper behandeln, deren Grenzflächen sämtlich  normal zu einer der Koordinatenachsen sind, indem man sie für jede Teillösung passend in Quader zerlegt.

3.1.4 Separation der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Für viele Zwecke sind kartesische Koordinaten schlecht geeignet. Besonders nützlich ist die Zerlegung in Kugelkoordinaten: $\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{u(r)}{r} P(\cos \vartheta) Q(\varphi)$

$$\text{Mit } \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

(53) ergibt sich unter Benutzung von

$$x = \cos(\vartheta) \Rightarrow \frac{dx}{d\vartheta} = -\sin(\vartheta) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}; \quad \sin^2\vartheta = 1-x^2$$

$$\underbrace{r^2(1-x^2)}_{f(x)} \left\{ \underbrace{\frac{u''}{u}}_{f(r)} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{d}{dx} [(1-x^2) P']}_{f(x)} \right\} + \underbrace{\frac{Q''}{Q}}_{f(\vartheta)} = 0$$

Nur $\frac{Q''}{Q}$ hängt von ϑ ab $\leadsto \frac{Q''}{Q} = -m^2; \quad \underline{Q(\vartheta) = e^{\pm im\vartheta}}$

Damit Q stetig ^{diffbar} ist, muss m ganzzahlig sein. Es folgt:

$$\underbrace{r^2 \frac{u''}{u}}_{f(r)} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{d}{dx} [(1-x^2) P'] - \frac{m^2}{1-x^2}}_{f(x)} = 0$$

Nur $r^2 \frac{u''}{u}(r)$ hängt vom Radius ab. Also:

$$r^2 \frac{u''}{u}(r) = \ell(\ell+1) \Leftrightarrow \underline{u(r) = A r^{\ell+1} + B r^{-\ell}}$$

Dabei ist zunächst nur klar, dass $\ell \in \mathbb{R}$.

Für den Winkelanteil verbleibt die verallgemeinerte Legendre-DGL:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} \right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0} \quad (**)$$

A Zylindersymmetrische Probleme: Falls Ladungen

(54) und Randbedingungen Zylindersymmetrie

aufweisen, muss dies auch für die Lösung

gelten: $Q(\psi) = 1 \Leftrightarrow m = 0$

Dann vereinfacht sich **(*)** zur Legendre-DGL:

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + l(l+1)P(x) = 0$$

Da alle Koeffizienten Potenzen von x sind und der Winkelanteil für die Lösung der Laplace-Gleichung **regulär** sein muss, bietet sich ein **Potenzreihen-Ansatz** an:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad // \quad 19.11.12$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k [(1-x^2) \underline{k(k-1)x^{k-2}} - 2xkx^{k-1} + l(l+1)x^k] = 0$$

$$\sum_k x^k [a_{k+2}(k+2)(k-1) + a_k(-k(k-1) - 2k + l(l+1))] = 0$$

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - l(l+1)}{(k+2)(k+1)} a_k$$

Man erhält also separate Rekursionsreihen für gerade und ungerade Koeffizienten. Falls diese nicht abbrechen, gilt: $a_{k+2}/a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$,

⑤ d.h. $P(l)$ divergiert. \downarrow

Also müssen 2 Bedingungen erfüllt sein:

(i) $a_0 a_1 = 0$, d.h. $a_0 = 0$ oder $a_1 = 0$

(ii) $\exists h$ mit $h(h+1) = \ell(\ell+1)$

$$\Leftrightarrow \ell \in \mathbb{N}_0$$

Genauer: $\ell = 0, 2, 4, \dots$ falls $a_0 \neq 0$

$\ell = 1, 3, 5, \dots$ falls $a_1 \neq 0$

Die Winkelanteile $P(\cos(\vartheta))$ haben also eine wohldefinierte Parität: (un)gerade wie ℓ .

Die ersten Legendre-Polynome lassen sich leicht (unnormiert) durch Rekursion bestimmen:

$$\ell = 0: a_0 = 1 \quad \rightarrow P_0(x) = 1$$

$$\ell = 1: a_1 = 1 \quad \rightarrow P_1(x) = x$$

$$\ell = 2: a_0 = 1; a_2 = \frac{1 \cdot 0 - 3 \cdot 2}{2 \cdot 1} a_0 = -3a_0 \rightarrow P(x) \propto 3x^2 - 1$$

Mit der Konvention $P_\ell(1) = 1$ ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 \quad \rightarrow \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Allgemein lassen sich die Legendre-Polynome

(56) angeben als:
$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell$$

Als DGL 2. Art hat die Legendre-DGL für festes l je 2 unabhängige Lösungen.
 Irreguläre Lösung: Legendre-Polynome 2. Art

Die allgemeine Lösung (auch für $m \neq 0$) ist durch die zugeordnete Legendre-Polynome gegeben, wobei $-\ell \leq m \leq \ell$ gilt:

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell$$

Dabei ist die Zuordnung der lin. unabhängigen Lösungen für $\pm m$ Konvention.

Für festes m sind die P_ℓ^m (mit $\ell = |m|, |m|+1, \dots$) paarweise orthogonal: $= 0$ u.v.

$$0 = \int_{-1}^1 dx P_\ell^m \left\{ \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_\ell^m}{dx} \right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_\ell^m \right\}$$

$$\stackrel{\text{PI}}{=} \int_{-1}^1 dx (x^2-1) \frac{dP_\ell^m}{dx} \frac{dP_{\ell'}^m}{dx} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_\ell^m P_{\ell'}^m$$

Die Randterme bei der partiellen Integration

(57) verschwinden wegen des Faktors $(1-x^2)$.

Jetzt vertauschen wir in der obigen Gleichung ℓ und ℓ' , subtrahieren beide Gleichungen und erhalten: $\underbrace{[\ell(\ell+1) - \ell'(\ell'+1)]}_{\neq 0 \text{ für } \ell \neq \ell' - 1} \int_{-1}^1 dx P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) = 0$ \square

Die Normierung lautet:

$$\int_{-1}^1 dx P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell, \ell'}$$

Insgesamt lautet die Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten also:

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (A_{\ell m} r^\ell + B_{\ell m} r^{-\ell-1}) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$$

mit den Kugelflächenfunktionen $(*)$

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\vartheta) e^{im\varphi}$$

Diese sind orthonormal

$$\int d\Omega Y_{\ell m}^*(\Omega) Y_{\ell' m'}(\Omega) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

und vollständig:

$$\sum_{l,m} Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega') = \delta(\Omega - \Omega')$$

Jede auf der Einheitskugel definierte Funktion $f(\Omega)$ lässt sich also in Kugelflächenfunktionen entwickeln.

3.1.5 Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten

Im Fall einer beschränkten Ladungsverteilung muss die Laplace-Gleichung für $r > R$ erfüllt sein und das Potential für $r \rightarrow \infty$ gegen Null gehen. Damit müssen in (*) alle Koeffizienten A_{lm} verschwinden:

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} r^{-l-1} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (\square)$$

Ein Vergleich mit Abschnitt 3.1.2 zeigt, dass auch (7) eine Multipolentwicklung darstellt, da die Terme nach Potenzen von r^{-l} geordnet sind.

Wegen $-l \leq m \leq l$ folgt sofort, dass es in

Ordnung l (d.h. Abfall mit $r^{-(l+1)}$) $2l+1$ linear unabhängige sphärische Multipolmomente gibt.

Frage: wie lassen sich die B_{lm} aus $\rho(\vec{x})$ berechnen?

Benutze dazu die Entwicklung der Green-Funktion nach Kugelflächenfunktionen (Übung):

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega')$$

für $r > r'$

$$\leadsto \phi(r, \Omega) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} q_{lm} Y_{lm}(\Omega)$$

mit $q_{lm} = \int dr' \int d\Omega' \rho(r', \Omega') (r')^{l+2} Y_{lm}^*(\Omega')$

Hinweis zur Übung: die Fourier-Bessel-Reihe beruht auf der Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_0^1 x J_{\alpha}(x u_{\alpha, n}) J_{\alpha}(x u_{\alpha, m}) dx = \frac{\delta_{mn}}{2} [J_{\alpha+1}(u_{\alpha, n})]^2$$

\uparrow Ordnung Bessel-Funktion
 \uparrow n -te Nullstelle

60

2.11.12

3.1.6 Energie von Ladungsverteilungen und Feldern

Wir betrachten zunächst die Energie einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ im vorgegebenen Feld $\phi_{\text{ex}}(\vec{x})$ (aus externen Quellen):

$$\begin{aligned} U^{\text{ww}} &= \int d^3x \rho(\vec{x}) \phi_{\text{ex}}(\vec{x}) = \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{1}{\rho!} \int d^3x \rho(\vec{x}) (\vec{r} \cdot \vec{\nabla})^\rho \phi_{\text{ex}}(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \\ &= q \phi_{\text{ex}}(\vec{x}_0) + \underbrace{(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \phi_{\text{ex}}(\vec{x})}_{= -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ex}}(\vec{x}_0)} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} + \frac{1}{6} q_{ij} \vec{\nabla}_i \vec{\nabla}_j \phi_{\text{ex}}(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} + \dots \end{aligned}$$

Speziell gilt für einen reinen Dipol: $U^{\text{ww}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ex}}(\vec{x})$

→ Kraft $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ex}})(\vec{x})$

Drehmoment $\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}_{\text{ex}}(\vec{x})$

Für eine Punktladung gilt dagegen: $U^{\text{ww}} = q \phi_{\text{ex}}(\vec{x})$

→ Kraft $\vec{F} = q \vec{E}_{\text{ex}}(\vec{x})$. (Um die Ladung von \vec{x}_1 nach \vec{x}_2 zu bringen, muss man die Arbeit W

leisten: $W_{12} = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = q (\phi_{\text{ex}}(\vec{x}_2) - \phi_{\text{ex}}(\vec{x}_1))$

Um die Gesamtenergie des elektrischen Feldes zu bestimmen, stellen wir uns vor, dass alle Ladungen nacheinander aus dem Unendlichen an ihre Position gebracht werden. Die aufgewendete Arbeit

$$\text{ist: } U = \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

Für kontinuierliche (nichtsinguläre*) Ladungsverteilungen ergibt sich:

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x} \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x})$$

$$\text{Mit } \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \rightarrow \rho \phi = \epsilon_0 \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$= \epsilon_0 [\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{E})}_{\underbrace{-\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi}_{|\vec{E}|^2}}$$

$$\text{Wegen } \phi(\vec{x}) \xrightarrow{\vec{x} \rightarrow \infty} 0 \text{ folgt: } U = \frac{1}{8\pi} \int d^3x |\vec{E}(\vec{x})|^2$$

$$\text{Also ist } \boxed{u(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi} |\vec{E}(\vec{x})|^2} \quad (A)$$

die Energiedichte des elektrostatischen Feldes.

* Für singuläre Ladungsverteilungen, insbesondere

Punktladungen enthält Δ Divergenzen, die einer unendlichen Selbstenergie entsprechen (Ultraviolett-Divergenzen der QFT).

3.1.7 Randwertprobleme

Für das Verhalten des elektrischen Feldes an Grenzflächen folgt aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ mit Stokes: $\vec{E}_{||}^{(1)} = \vec{E}_{||}^{(2)}$

sowie aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ mit Gauß und Flächenladungsdichte σ : $(\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Speziell gilt bei Metallen (für statische Felder) im Inneren: $\vec{E} = \vec{0}$ ($\sim \phi = \text{const}$)

Somit gilt außen: $\hat{n} \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$; $\vec{n} \times \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$
 $= -\hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi$

Eindeutigkeit der Lösung von Randwertproblemen

Wir geben nun für ein Gebiet $V \subset \mathbb{R}^3$ die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ vor.

63

Behauptung: Für geeignete Randbedingungen ist das Potential ϕ eindeutig bestimmt.

Beweis: Annahme: ϕ_1 und ϕ_2 seien Lösung
 $\tilde{\phi} := \phi_1 - \phi_2; \tilde{\vec{E}} = -\nabla \tilde{\phi} \Rightarrow 0 = \Delta \tilde{\phi} = -\vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{E}}$

Mit $\vec{\nabla} \cdot (\tilde{\phi} \tilde{\vec{E}}) = -\tilde{\phi} \Delta \tilde{\phi} - |\tilde{\vec{E}}|^2 = -|\tilde{\vec{E}}|^2$ folgt:

$$\int_V |\tilde{\vec{E}}|^2 d^3x = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\tilde{\phi} \tilde{\vec{E}}) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \tilde{\phi} \hat{n} \cdot \tilde{\vec{E}}$$

Falls überall auf dem Rand $\tilde{\phi} = 0$ oder $\tilde{E}_n = 0$, so verschwindet das Integral, also (wegen $|\tilde{\vec{E}}|^2 \geq 0$) auch der Integrand. \square

Es gibt also 2 Randbedingungen, die die Lösung eindeutig festlegen:

1) Dirichletsche Randbedingung: ϕ auf dem Rand vorgegeben

2) von Neumannsche Randbedingung: Normalenfeld $E_n = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi$ auf Rand vorgegeben

Auch gemischte RB sind möglich.

Dabei ist ϕ (zusätzlich zu \vec{E}) nur eindeutig, falls es an mindestens einer Stelle des Randes vorgegeben wird.

Existenz und Konstruktion von Lösungen von Randwertproblemen

Ziel: Geschlossene Lösung mit Hilfe von Green-Funktionen (spezifisch für Randbedingung).

Für in $V \subset \mathbb{R}^3$ differenzierbare Funktionen $\varphi(\vec{x})$ und $\psi(\vec{x})$ gilt: $\vec{\nabla}(\varphi \vec{\nabla} \psi) = \varphi \Delta \psi + (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \psi)$

$$\Rightarrow \int_V [\varphi \Delta \psi + (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \psi)] d^3x = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi)$$

1. Greensche Formel

Vertauschen von φ und ψ und Subtraktion liefert:

$$\int_V d^3x (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \varphi)$$

Dies ist die 2. Greensche Formel

Beachte: $d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \varphi = d\vec{f}(\vec{\nabla} \varphi)_n = d\vec{f} \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ gibt die Ableitung entlang der Flächennormalen (mal $d\vec{f}$) an.

Wir setzen nun $\varphi(\vec{x}) = \phi(\vec{x})$ mit $\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ ein:

$$\int_V d^3x' \phi(\vec{x}') \Delta \psi(\vec{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \psi(\vec{x}') \rho(\vec{x}') d^3x' + \int_{\partial V} d\vec{f} [\phi(\vec{x}') \vec{\nabla}' \psi(\vec{x}') - \psi(\vec{x}') \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')]]$$

Jetzt wählen wir speziell für $\psi(\vec{x}')$ eine Green-Funktion mit $\Delta G(\vec{x}, \vec{x}') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ für $\vec{x} \in V$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(\vec{x}) &= \int_V d^3x' \phi(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') && (\square\square) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') - \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot [\phi(\vec{x}') \vec{\nabla}' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')] \\ &= \int_V d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} - \int_{\partial V} d\vec{f}' \cdot [\phi(\vec{x}') \frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{x}, \vec{x}') + G(\vec{x}, \vec{x}') E_n(\vec{x}')] \end{aligned}$$

Achtung: dies ist i.A. noch nicht die Lösung des Randwertproblems, da in der Regel nur eine der beiden Funktionen $\phi(\vec{x}')$ und $E_n(\vec{x}')$ auf dem Rand ∂V bekannt ist.

Im Allgemeinen hat die Green-Funktion G offenbar die Struktur

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}'),$$

wobei $F(\vec{x}, \vec{x}')$ harmonisch in V ist, d.h.

$$\text{es gilt: } \Delta' F(\vec{x}, \vec{x}') = 0$$

Gleichung (1) gilt für jede Wahl von F .

26.11.12

Speziell wählen wir für Dirichlet-Randbed.

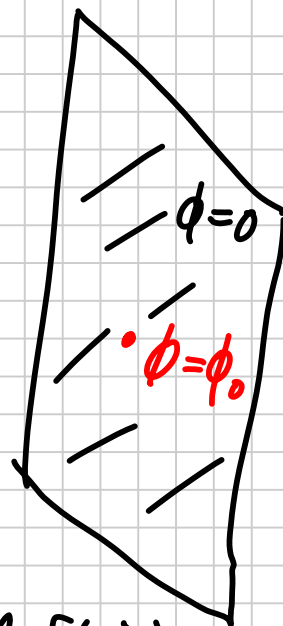
$$G = G_D \text{ mit } G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0 \text{ für } \vec{x}' \in \partial V$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \int_V G_D(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} d^3x' - \int_{\partial V} d\vec{x}' \phi(\vec{x}') \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'}$$

Analog löst man das von-Neumann-Randwert

⑥7 Problem mit $G = G_N$ und $\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\vec{x}, \vec{x}') = 0$.

Anwendung 1: Es sei eine große Metallplatte gegeben (bei $z=0$) mit $\phi=0$. Im Ursprung befinde sich eine gegenüber der Platte isolierte Elektrode mit hoher



Spannung. Wir nehmen an: $\phi_0(\vec{x}_0) = A \delta(\vec{x}_0)$.

Bestimme das Potential $\phi(\vec{x})$ für $z < 0$.

Ansatz: Dirichlet-Greenfunktion

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}''|} \right]; \quad \vec{x}'' = \vec{x}' - 2(\vec{x}' \cdot \hat{n})\hat{n}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2]^{1/2}} \right]$$

$$\left. \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \right|_{z'=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \Big|_{z'=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{z - z'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^{3/2}} \Big|_{z'=0}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{z}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= - \int_{\partial V} d\phi(\vec{x}') \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \\ &= - \frac{A}{2\pi} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = - \frac{A}{2\pi} \frac{\vec{x} \cdot \hat{n}}{|\vec{x}|^3} \quad (z < 0) \end{aligned}$$

Verifikation: S. 71

Entsprechend müsste man bei kontinuierlich auf ∂V vorgegebener Potentialverteilung integrieren. (In Vorlesung: Limits für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$)

Anwendung 2: Jetzt sei eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}_\perp)$ bei $z=0$ vorgegeben

$$\rightarrow \text{verwende } G_D(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}''|} \right] \dots$$

3.1.8 Kapazität und Kondensator

Wir betrachten eine Anordnung von N geladenen Leitern (Potential Ψ_ν , Volumen V_ν mit Oberfläche $S_\nu = \partial V_\nu$) im ladungsfreien Raum.

Sei $G_D(\vec{x}, \vec{x}')$ die zugehörige Greenfunktion

$$\rightarrow \phi(\vec{x}) = - \sum_{\nu=1}^N \Psi_\nu \oint_{S_\nu} d\phi' \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'}$$

69

Das elektrische Feld an der Oberfläche der Leiter ist also

$$E_n(\vec{x}) = -\frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial n} = \sum_{\nu=1}^N \varphi_{\nu} \int_{S_{\nu}} \frac{\partial^2 G_0(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n \partial n'} df'$$

Mit $E_n(\vec{x}) = -4\pi\sigma(\vec{x})$ ergibt sich die Ladung q_{μ} auf dem μ -ten Leiter zu

$$q_{\mu} = \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} \varphi_{\nu} \quad (\heartsuit)$$

mit der symmetrischen Kapazitätsmatrix

$$c_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_{\mu}} df \int_{S_{\nu}} df' \frac{\partial^2 G_0(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n \partial n'}$$

Die Elemente heissen auch Influenzkoeffizienten $c_{\mu\nu}$ bzw. Kapazitätskonstante $c_{\mu\mu}$.

Die Energie der Ladungsverteilung lässt sich schreiben als $U = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^N q_{\mu} \varphi_{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^N c_{\mu\nu} \varphi_{\mu} \varphi_{\nu}$

Wegen $U \geq 0$ ist die Matrix positiv definit.

Als Kondensator wird üblicherweise ein System aus 2 Leitern mit $q_1 = -q_2 = Q$ bezeichnet.

Umkehrung von \square , d.h. $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$

ergibt:
$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{12} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ -Q \end{pmatrix}$$
$$= \frac{Q}{\det C} \begin{pmatrix} C_{22} + C_{12} \\ -C_{11} - C_{12} \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q \\ -Q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{Q^2}{2} \frac{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}{\det C} =: \frac{Q^2}{2C}$$

mit der Kapazität $C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}$

Es gilt auch: $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{C}$, d.h. mit der Spannung $\tilde{U} = \varphi_1 - \varphi_2$: $Q = C \tilde{U}$.

Beispiel: Kugelkondensator: Für das Potential

gilt: $\phi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|}$ für $R_i \leq |\vec{x}| \leq R_a$

Mit $\varphi_a - \varphi_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_i} \right)$ folgt

die Kapazität $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i}$

Für den Zylinderkondensator gilt mit dem Satz von Gauss für jeden Abschnitt der Länge

$$L: \quad 2\pi r L E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad \text{für } R_i < r < R_a$$

$$E(r) = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\phi(r) = -\frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_a}$$

$$\tilde{U} = \phi(R_i) - \phi(R_a) = -\frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_i}{R_a}$$

$$\Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_a/R_i)} \quad // 28.11.12$$

Verifikation der Lösung $\phi(\vec{x}) = -\frac{A}{2\pi} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

des Randwertproblems (Anwendung!) von S. 68-69:

$$1) \quad \phi(\vec{x}) \begin{matrix} z > 0 \\ z < 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{falls } x^2 + y^2 > 0 \\ \infty & \text{" } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Betrachte Integral $I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \phi(\vec{x}) \begin{matrix} \xrightarrow{!} A \\ z > 0 \\ z < 0 \end{matrix}$

Für $z < 0$ gilt:
$$I(z) = \frac{A}{2\pi} \int_0^{\infty} 2\pi r dr \frac{|z|}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

setze $r = |z|s \Rightarrow dr = |z|ds$

$$\Rightarrow I(z) = A \int_0^{\infty} |z|s |z|ds \frac{|z|}{|z|^3 (1+s^2)^{3/2}}$$

$$= A \int_0^{\infty} ds s (1+s^2)^{-3/2}$$

$$= -A \left[(1+s^2)^{-1/2} \right]_0^{\infty} = A \xrightarrow[z < 0]{z > 0} A \quad \square$$

Überraschung: das Integral über $\phi(\vec{x})$ über Flächen parallel zur Grenzfläche ist konstant
 \rightarrow Realisierung der zweidimensionalen Delta-Fkt.

3.1.9 Lösung der Laplace-Gleichung in Zylinder-Koordinaten

In Zylinder-Koordinaten (r, φ, z) lautet der Laplace-Operator $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Der Separationsansatz $\phi(r, \varphi, z) = R(r)Q(\varphi)U(z)$

folgt:
$$\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{Q''}{Q} + \frac{U''}{U} = 0$$

(73) $\underbrace{\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{Q''}{Q}}_{\text{nur von } r, \varphi \text{ abhängig}} + \underbrace{\frac{U''}{U}}_{\text{nur von } z \text{ abhängig}} = 0$

$$\Rightarrow \frac{U''}{U} = k^2 \text{ konstant} \Rightarrow U(z) = e^{\pm kz}$$

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{Q''}{Q}}_{\text{einzigiger } \varphi\text{-abh. Anteil}} + k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Q''}{Q} = -n^2 \text{ konstant}; \quad Q(\varphi) = e^{\pm in\varphi}$$

$Q(\varphi)$ stetig + diffbar $\leadsto n \in \mathbb{Z}$

Es folgt eine gewöhnliche DGL für den Radial-

anteil:
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0$$

Durch Umskalierung $x = kr$ erhalten wir die Bessel-DGL in Standardform:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dR}{dx} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) R = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 R''(x) + x R'(x) + (x^2 - n^2) R(x) = 0$$

Alle Lösungen sind analytisch, ausgenommen ggf. den singulären Punkt $x=0$. Sie werden Zylinderfunktionen genannt.

Die regulären Lösungen (d.h. $|R(x)| < \infty$ für $x \rightarrow 0$) lassen sich durch **Potenzreihenansatz** finden:

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\Rightarrow k(k-1)a_k + k a_k + a_{k-2} - n^2 a_k = 0$$

↓ mit Konvention $a_{-1} = a_{-2} = 0$

$$(k^2 - n^2) a_k + a_{k-2} = 0$$

speziell folgt: $n^2 a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ falls $n \neq 0$

$$(1 - n^2) a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$
 falls $n \neq 1$

sowie für $n \in \mathbb{N}$: $a_k = 0$ für $k < n$

$$n \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{2k+1} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ a_{2k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Die nicht verschwindenden Koeffizienten ergeben

sich zu
$$a_{n+2q} = \frac{-a_{n+2(q-1)}}{2q \cdot 2(n+q)} = \frac{(-1)^q n! a_n}{2^{2q} q! (n+q)!}$$

Mit der **Konvention** $a_n = \frac{1}{n! 2^{2n}}$ resultieren ← Korrektur zu Vorl.

die **Bessel-Funktionen (der ersten Art)** von

Ordnung n :

$$J_n(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q! (n+q)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2q}$$

75 Der Konvergenzradius ist unendlich.

Für nichtganzzahliges n sind J_n und J_{-n} die beiden linear unabhängigen Lösungen der Bessel-DGL. Im betrachteten Fall $n \notin \mathbb{Z}$ gilt jedoch: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ (sowie $J_{-n}(-x) = J_n(x)$)

Die 2. linear unabh. Lösung ist dann durch die **Neumann-Funktion** $N_n(x)$ gegeben:

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos(\pi \nu) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi \nu)}$$

Diese wird auch **Weber-Funktion** oder **Bessel-Funktion zweiter Art** genannt und **divergiert**

bei $x=0$: $N_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \begin{cases} x^{-n} & n \in \mathbb{N} \\ \ln(x) & n = 0 \end{cases}$

Insgesamt lautet also die allgemeinste Lösung, die die Laplace-Gleichung im Bereich $0 < r < \infty$ erfüllt:

$$\phi(r, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk [A_{m,k} J_{|m|}(k|r|) + B_{m,k} N_{|m|}(k|r|)] \cdot e^{im\varphi} e^{kz}$$

↑ auch ohne Betragstriche gültig!

Falls die Laplace-Gleichung auch bei $x=0$ gelten soll, muss die Lösung ϕ dort regulär sein, d.h. $B_{m,l} = 0 \quad \forall m, l$.

Bemerkung: auch die Hankel-Funktion

$H_n^{1/2}(x) = J_n(x) \pm i N_n(x)$ wird als Basis der Zylinderfunktionen verwendet.

Für große Argumente haben die Besselfunktionen asymptotisch die Form von gedämpften Sinus- bzw. Kosinus-Schwingungen:

$$J_n(x) \stackrel{x \gg 1}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}(2n+1)\right)$$

Insbesondere hat jedes J_n **unendlich viele Nullstellen** $x_{n,e}$, die sämtlich paarweise verschieden sind. Es gilt: $x_{n,e} < x_{n+1,e} < x_{n,e+1}$

Lösung in beschränktem Radialbereich: oft, z.B. in der Hydrodynamik, sucht man Lösungen, die **(77)** außerhalb eines Radius a verschwinden.

Diese lassen sich aus allgemeinen Lösungen konstruieren, bei denen der Radialteil jeweils eine Nullstelle bei $r=a$ hat:

$$k a = x_{n,\ell} \quad \leadsto \quad k_{n,\ell} = \frac{x_{n,\ell}}{a}$$

Wenn wir zusätzlich Regularität bei $r=0$ fordern, lautet die allgemeine Lösung:

$$\phi(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm} A_{n,\ell}^{(\sigma)} J_n(x_{n,\ell} \frac{r}{a}) e^{in\varphi} e^{\sigma x_{n,\ell} \frac{z}{a}}$$

und die allgemeine Lösung mit Zylinder-Symmetrie:

$$\phi(r, z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm} A_{0,\ell}^{(\sigma)} J_0(x_{0,\ell} \frac{r}{a}) e^{\sigma x_{0,\ell} \frac{z}{a}}$$

Die Koeffizienten folgen für gegebene Randbedingungen (bei $z=z_0$ und/oder $z=\pm\infty$) aus der Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^a r dr J_n(x_{n,\ell} \frac{r}{a}) J_n(x_{n,s} \frac{r}{a}) = \frac{a^2}{2} \delta_{\ell,s} J_{n+1}^2(x_{n,\ell})$$

3.2 Magnetostatik

Aus den Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x}) \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

folgt die Existenz eines **Vektorpotentials** $\vec{A}(\vec{x})$

mit $\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$. Offensichtlich gilt die

Eichfreiheit $\vec{A}(\vec{x}) \rightarrow \tilde{\vec{A}}(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) + \vec{\nabla} \chi(\vec{x})$:

A und \tilde{A} führen zu dem gleichen Magnetfeld, sind also äquivalent. Es gilt:

$$\mu_0 \vec{j}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x})) - \Delta \vec{A}(\vec{x})$$

In **Coulomb-Eichung** $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = 0$ folgt:

$$\mu_0 \vec{j}(\vec{x}) = -\Delta \vec{A}(\vec{x})$$

Damit ist $\vec{A}(\vec{x})$ bis auf eine Lösung der

Laplace-Gleichung festgelegt. Bei einer räumlich begrenzten Stromverteilung und $V = \mathbb{R}^3$

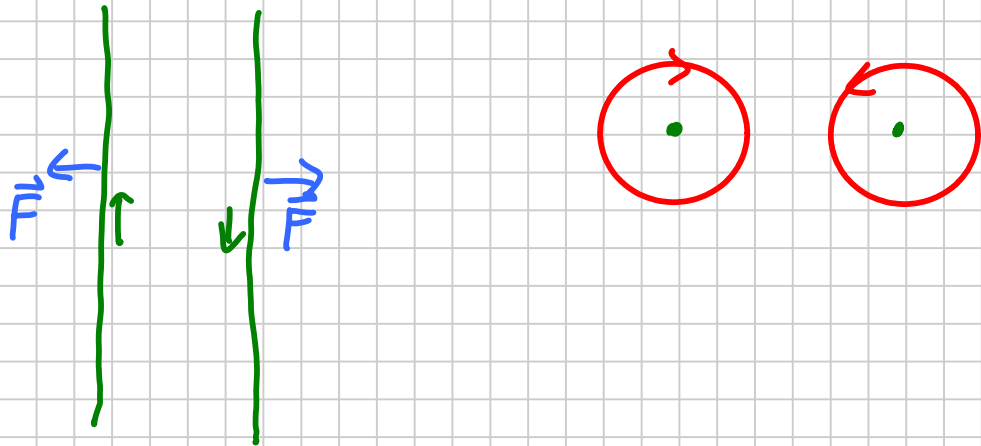
resultiert **Eindeutigkeit** aus der Forderung

$\vec{A}(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \vec{0}$. Lösung wie in 3.1 **Elektrostatik**.

Die magnetische Feldenergiedichte ist

$$\rho_m = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}$$

Beachte: Während die Kräfte in der Elektrostatik in Richtung **niedrigerer** Feldenergie wirken, treiben die Kräfte der Magnetostatik stromdurchflossene Leiterschleifen zu **höherer** Feldenergie:



Dies ist nur möglich, weil bei dem Auseinanderführen der Leiter eine Induktionsspannung abfällt, also **Arbeit** durch die Stromquellen aufgebracht werden muss (→ Römert/Forger) Kap. 5

Feld eines magnetischen Dipols $\vec{m} = \frac{1}{2} (d\vec{r} \vec{r} \times \vec{j})(\vec{r})$:

(80)
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{m}}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Induktivität,} \\ \text{Drehmoment...} \end{array} \right.$$

3.3 Numerische Lösung der Laplace- (Poisson-) Gleichung

Die Strategien zur numerischen Lösung von Differentialgleichung hängen stark vom genauen Problem, insbesondere den Randbedingungen ab. Wir betrachten zunächst gewöhnliche DGLs:

1) DGL 1. Ordnung:

löse $f'(x) = g(x)$ für $x \in [0, L]$ mit $f(0) = f_0$

Ansatz: $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + \mathcal{O}(x_{i+1} - x_i)$

Beachte: Auch bei gegebener Diskretisierung

$$\{x_i\}_{i=0}^N \text{ mit } x_0 = 0; x_N = L \quad ; \quad x_i < x_{i+1} \quad \forall 0 \leq i \leq N-1$$

ist die diskretisierte Form des Differentialoperators

nicht eindeutig. Alternativen: $f'(x_{i+1}) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$

• $f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}}$ (symm. Form)

→ Algorithmus: 1) $f(x_0) = f_0$

⑧ 2) $f(x_{i+1}) = f(x_i) + g(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad \forall 0 \leq i \leq N-1$

Modifikation: ersetze $g(x_i)$ durch $\frac{1}{2}(g(x_i) + g(x_{i+1}))$

2) DGL 2. Ordnung mit einseitiger RB

Löse $f''(x) = g(x)$ mit $f(0) = f_0$, $f'(0) = f_1$

Der Einfachheit halber (und wie meist in der Praxis) wählen wir eine homogene Diskretisierung

$$x_i = x_0 + i \Delta x = \frac{i}{N} L$$

Ansatz: $f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{(\Delta x)^2}$

→ Algorithmus 1) $f(x_0) = f_0$ 2) $f(x_1) = f_0 + f_1 \Delta x$

$$3) f(x_{i+1}) = 2f(x_i) - f(x_{i-1}) + g(x_i)(\Delta x)^2 \quad \forall 1 \leq i \leq N-1$$

3) DGL 2. Ordnung mit Dirichlet-RB

löse $f''(x) = g(x)$ mit $f(0) = f_0$; $f(L) = f_1$

Problem: direkte schrittweise Lösung nicht möglich, da Ableitung an Rändern unbekannt.

Ansatz: erzeuge iterativ Folge $f^{(k)}$ von

diskretisierten Funktionen, die für $k \rightarrow \infty$

gegen Lösung der diskretisierten DGL konvergiert.
Dabei muss der Differentialoperator aus Stabilitätsgründen **symmetrisch** angewendet werden.

→ Algorithmus:

0) Wähle Initialisierung $f^{(0)}(x_0)$ mit $f^{(0)}(x_0) = f_0$,
 $f^{(0)}(x_N) = f_1$; z.B. $f^{(0)}(x_i) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{L} (f_1 - f_0)$.

1) Update $k \rightarrow k+1$: $f^{(k+1)}(x_0) = f_0$; $f^{(k+1)}(x_N) = f_1$

$$f^{(k+1)}(x_i) = \frac{1}{2} \left[f^{(k)}(x_{i-1}) + f^{(k)}(x_{i+1}) - g(x_i) (\Delta x)^2 \right] \quad (*)$$

$\forall 1 \leq i < N$

Wiederhole Schritt 1), bis gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Das konkrete Schema **(*)**, bei dem auf der rechten Seite nur die alte Lösung steht, nennt man **Jacobi-Iteration**.

Alternative **Gauß-Seidel-Iteration**: auf rechter Seite wird $f^{(k+1)}$ eingesetzt. Dann hängt das

(83) Ergebnis von der **Reihenfolge der Updates** ab.

Speziell nennt man dieses Verfahren auch **Schachbrett-Iteration** (red-black iteration), falls alternierend Untergitter $\{x_{2n+1}\}$ und $\{x_{2n}\}$ aktualisiert werden.

4) Laplace-Gleichung für Rechteck mit Dirichlet-RB

Vorgehen analog zu 3), mit Update:

$$f^{(k+1)}(x_i, y_j) = \frac{1}{4} [f^{(k)}(x_{i-1}, y_j) + f^{(k)}(x_i, y_{j+1}) + f^{(k)}(x_{i+1}, y_j) + f^{(k)}(x_i, y_{j-1})]$$

bzw. GS- und red-black-Iteration

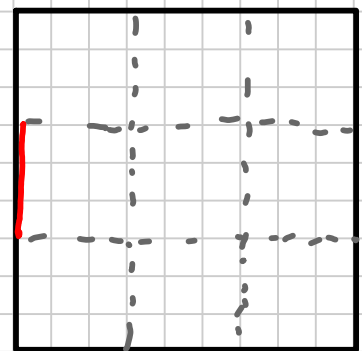
Beispiel: auf dem mittleren

Drittel des Rands eines $f=100 \rightarrow$

Quadrats ist die Lösung

$f=100$ vorgegeben, ansonsten

$f=0$. Diskrete Lösung?



In Vorlesung: „von Hand“ iterativ gelöst.

Vergleich Jacobi vs. Schachbrett-Iteration

Vorstellung Computer-Implementation

Beobachtung: in konvergierter Lösung hat das zentrale Feld exakt den Wert $12.5 = \frac{100}{8}$.

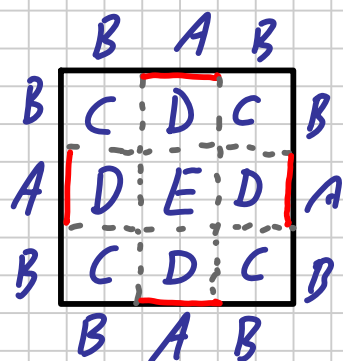
Einfacher: symmetrisiertes Problem

$$A=100, B=0 \rightarrow D=E$$

$$C = \frac{D+B}{2} = \frac{D}{2}$$

$$D = \frac{1}{4}(A+E+2C)$$
$$= \frac{1}{4}(A+2D)$$

$$\frac{1}{2}E = \frac{1}{4}A \Rightarrow E = \frac{A}{2} = 50$$



Linearität \rightarrow in ursprünglichem Problem ist $E = \frac{A}{8}$

Beachte: auch das volle Problem ist einem linearen Gleichungssystem äquivalent, lässt sich also nichtiterativ exakt lösen. Aber: zu teuer für große Probleme!

4 Spezielle Relativitätstheorie

4.1 Grundlagen der SRT

Schnelldurchgang anhand von Theorie-1-Skript:

Postulate, Relativität Gleichzeitigkeit, Zeitdilatation,

Lorentz-Kontraktion, Lorentz-Transformation,

inv. Abstand, Lichtkegel, Eigenzeit, 4-Schreib-

weise, metrischer Tensor, Bedingung an LT,

Lorentz-Boost, Trafo von Geschwindigkeiten

und Winkeln, Aberration // 12.12.12

4.2 4-Vektoren

Jede (4-komponentige) Größe $a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)$, die genau so wie der 4-Ortsvektor x^μ transformiert wird

$$(a')^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu$$

heißt **kontravarianter 4-Vektor**; jede Größe a_μ , die

gemäß $(a')_\mu = \Lambda_\mu^\nu a_\nu$; $\Lambda_\mu^\nu = g_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma g^{\sigma\nu}$

transformiert wird, heisst **kovarianter 4-Vektor**.

Umwandlung mit metrischem Tensor:

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu; a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu.$$

Das **Quadrat** eines 4-Vektors $a^2 \equiv a_\mu a^\mu$ ist ein **Lorentz-Skalar**, d.h. invariant unter Lorentz-Transfos ebenso wie das allgemeine **Skalarprodukt** (hier **nicht** positiv definit!) $a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu$

Falls $\varphi(x)$ ein Skalar ist, dann ist der **4-Gradient**

$$\partial_\mu \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \vec{\nabla} \varphi \right) \text{ ein kovarianter 4-Vektor.}$$

Dagegen ist die **4-Divergenz** $\partial \cdot a \equiv \partial^\mu a_\mu = \partial_\mu a^\mu = \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\mu}$ ein Lorentz-Skalar.

Wir definieren die **4-Geschwindigkeit** dimensionslos als

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}; \quad ds = \frac{cdt}{\gamma} = c d\tau$$

← 4-Vektor ← Skalar

Offensichtlich ist u^μ 4-Vektor, im Gegensatz zu $\frac{dx^\mu}{dt}$.

Achtung: in Literatur auch $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ gebräuchlich.

$$\text{Explizite Form: } u^\mu = \frac{\gamma}{c} \frac{d}{dt} (ct, \vec{x}) = \gamma_u (1, \vec{\beta}_u)$$

$$\text{Beachte: } u^2 = \gamma_u^2 (1 - \beta_u^2) = 1$$

Auch 4-Vektor: 4-Beschleunigung $\frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2 x^\mu}{ds^2}$;
steht senkrecht auf 4-Geschwindigkeit

Anwendungen: a) Ladung/Strom

Experimentelles Faktum: elektrische Ladung ist L-Skalar.

Längen/Volumenkontraktion \Rightarrow Ladungsdichte wird für
 $\vec{v}_{\text{rel}} (K', K) = \vec{u}$ als $\rho = \gamma_u \rho_0$ transformiert, falls die
Ladung in K' ruht. Zusätzlich misst man in K auch
eine Stromdichte $\vec{j} = \rho \vec{u} = \gamma_u \rho_0 \vec{u}$. Zusammen \leadsto
4-Stromdichte $j^\mu = (c\rho, \vec{j}) = \rho_0 c \gamma_u (1, \vec{\beta}_u) = \rho_0 c u^\mu$,
die als 4-Vektor transformiert wird.

Kontinuitätsgleichung: $0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = \partial_\mu j^\mu$ (L-Skalar)

b) Elektromagnetische Potentiale

Aus den Maxwell-Gleichungen lässt sich ableiten (siehe
Ü36): $\frac{1}{\epsilon_0 c} j^\mu = \square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu)$ mit 4-Potential
 $A^\mu = (\phi, c\vec{A})$; muss 4-Vektor sein: dies gilt, wenn
da A^μ als 4-Vektor transformiert wird.

Lorentz-Eichung $\partial_\nu A^\nu = 0 \leadsto \square A^\mu = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\mu$

(88) (inhomogene Wellengleichung).

In Vorlesung verschoben

Hom. Lösung: Ebene Wellen $A^\mu(x) = A_0^\mu e^{-ik_\nu x^\nu}$ mit
4-Wellenvektor $k^\nu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$; $\omega = \frac{ck}{c}$ ($\Rightarrow k^2 = 0$)

Beachte: die Phase $\varphi(x) = k_\nu x^\nu$ ist Lorentz-Skalar.

$$\partial_\rho A^\mu = -i k_\rho A^\mu \Rightarrow \square A^\mu = \partial^\rho \partial_\rho A^\mu = -k_\rho k^\rho A^\mu \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow k^2 = 0 \Leftrightarrow k^\rho = (\omega/c, \vec{k}); \omega = \frac{ck}{c}$$

$$0 \stackrel{!}{=} \partial_\mu A^\mu = -k_\mu A^\mu \Rightarrow 0 = \omega \phi_0 - \vec{k} \cdot \vec{A}_0$$

Explizit lautet die Trafo für den 4-Wellenvektor
 $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$ mit $k_{||} = \vec{k} \cdot \hat{n} = k \cos(\vartheta)$;

$$\vec{k}_\perp = \vec{k} - k_{||} \hat{n} = k \hat{k}_\perp \sin(\vartheta).$$

$$\begin{pmatrix} \omega'/c \\ \vec{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{k}_\perp \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_{||} \end{pmatrix}$$

2x4-Matrix

$$\omega' = \gamma(\omega - \beta c k_{||}) = \gamma \omega [1 - \beta \cos(\vartheta)]$$

Relativistischer Doppler-Effekt

Spezialfälle: (i) longitudinaler Doppler-Effekt

$$\omega' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \omega \quad (\vartheta=0); \quad \omega' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \omega \quad (\vartheta=\pi)$$

(ii) transversaler Doppler-Effekt $\omega = \frac{\omega'}{\gamma} < \omega' \quad (\vartheta = \frac{\pi}{2})$

z. B. k' Ruhesystems eines Sterns ↖ Beobachter-System

→ Rotverschiebung

Transformationsgesetz für Winkel:

$$\tan(\vartheta') = \frac{|\vec{k}'_{\perp}|}{k'_{\parallel}} = \frac{|\vec{k}_{\perp}|}{\gamma(k_{\parallel} - \beta \frac{u}{c})} = \frac{\sin(\vartheta)}{\gamma[\cos(\vartheta) - \beta]}$$

4.3 Masse und Energie

Betrachten wir ein Teilchen mit Ruhemasse m_0 und 4-Geschwindigkeit u^{μ} . Offen sichtlich ist $p^{\mu} \equiv m_0 c u^{\mu}$ ein 4-Vektor. Für die Ortskomponenten gilt:

$$p^i = m_0 c \gamma \beta^i = m_0 \gamma \frac{dx^i}{dt} \xrightarrow{|\vec{u}| \rightarrow 0} m_0 \frac{dx^i}{dt}$$

→ relativistischer Impuls $\vec{p} = m_u \vec{u}$ mit $m_u = \gamma_u m_0$

Bedeutung der Zeitkomponente p^0 ?

$$p_{\mu} p^{\mu} = m_0^2 c^2 \underbrace{u_{\mu} u^{\mu}}_{=1} = m_0^2 c^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2$$

$$\Rightarrow p^0 = \sqrt{m_0^2 c^2 + |\vec{p}|^2} = m_0 c \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{p}}{m_0 c}\right)^2}$$

$$\stackrel{\gamma m_0 c}{=} = m_0 c \left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{2(m_0 c)^2} + \mathcal{O}(c^{-4}) \right)$$

$$\Rightarrow c p^0 = m_0 c^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m_0} + \mathcal{O}(c^{-2})$$

↑ $\gamma_u m_0 c^2 = m c^2$ nicht rel. kinetische Energie

Daher ist $E \equiv c p^0$ die Energie des Teilchens; die

Ruheenergie $m_0 c^2$ kann prinzipiell durch Zerstrahlung

freigesetzt werden.

Also: 4-Impuls $p^\mu = \left(\frac{\epsilon}{c}, m\vec{u}\right)$; $m \equiv m_u = m_0 \gamma_u$

Quantenmechanik: Licht wird in Form von Photonen ausgesendet mit Energie $\epsilon = h\omega$. Es gilt dann:

$$p^\mu = h k^\mu \quad (\text{für } m_0 = 0).$$

4.4 Die Lorentz-Kraft und elektromagnetische Felder

Das Dyadische Produkt $D^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu$ von kontravarianten 4-Vektoren a^μ, b^μ wird wie folgt transformiert:

$$(D')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma a^\rho b^\sigma = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma D^{\rho\sigma} \\ (= (a')^\mu (b')^\nu)$$

Die Dyaden $\left\{ \begin{array}{l} D^{\mu\nu} (= a^\mu b^\nu) \\ D_{\mu\nu} (= a_\mu b_\nu) \\ D_\mu^\nu (= a_\mu b^\nu) \\ D^\mu_\nu (= a^\mu b_\nu) \end{array} \right\}$ heißen $\left\{ \begin{array}{l} \text{kontravariant} \\ \text{kovariant} \\ \text{gemischt} \\ \text{"} \end{array} \right\}$

Sie können mit dem metrischen Tensor ineinander überführt werden: $D_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} D^{\rho\sigma}$ etc.

Jede Größe $T^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$), die wie $D^{\mu\nu}$ transformiert wird, heißt kontravarianter Tensor 2. Stufe.

Analog: • kovariante und gemischte Tensoren
• Tensoren anderer Stufen.

Beachte: • 4-Vektoren sind Tensoren 1. Stufe,
• 4-Skalare sind Tensoren 0. Stufe

Die Bildung von Skalarprodukten führt zur **Verzüngerung** der Tensoren. So sind z. B.

$d^\mu = D^{\mu\nu} c_\nu = a^\mu b^\nu c_\nu$ und $t^\mu = T^{\mu\nu} c_\nu$
jeweils (kontravariante) 4-Vektoren.

Folglich ist der **elektromagnetische Feldtensor**

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

ein antisymmetrischer kontravarianter Tensor 2. Stufe

mit $(F')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$

Mit $F^{00} = 0$, $F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = [-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}]_i = E_i$

und $F^{ij} = \epsilon_{ijk} (-c B_k)$ (wegen $B_k = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \epsilon_{ijk} \partial_i A_j / c$)

folgt komponentenweise:

$$F^{\mu\nu} (= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit kann man direkt das Verhalten von \vec{E} und \vec{B} unter Raumspiegelungen ableiten:

$$F^{\mu\nu} \xrightarrow{\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}} (F')^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ -E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ -E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(= F_{\mu\nu})$$

d.h. $\vec{B} \rightarrow \vec{B}$ (Pseudovektor), $\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$ (echter Vektor)

// 17.12.12

5 Elektromagnetische Wellen

5.1 Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum

Im Vakuum lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Delta \vec{E} &= \Delta \vec{E} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \\ &= -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \vec{B} &= \Delta \vec{B} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Mit dem d'Alembert-Operator

$$\square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

(94) gilt also: $\square \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{0}$; $\square \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{0}$

Lösungen dieser Wellengleichungen findet man mit einem **Separationsansatz**:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(\vec{x}) f(t)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \square \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2} f''(t) \vec{E}_0(\vec{x}) - f(t) \Delta \vec{E}_0(\vec{x})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{f''(t)}{f(t)} = \frac{\Delta \vec{E}_{0,i}(\vec{x})}{\vec{E}_{0,i}(\vec{x})} =: -|\vec{k}|^2$$

$$\Rightarrow f(t) = f_0 e^{i\omega t}; \quad \omega^2 = c^2 |\vec{k}|^2$$

Die Komponenten $\vec{E}_{0,i}(\vec{x})$ müssen dann Eigenlösungen des Laplace-Operators sein, die sich (bei freien Randbedingungen) z.B. durch einen kartesischen Produktansatz ergeben. Insgesamt erhält man:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_{\vec{k}} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}; \quad \omega^2 = c^2 |\vec{k}|^2$$

und analog

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_{\vec{k}} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

Elektromagnetische Wellen laufen also

dispersionsfrei mit Lichtgeschwindigkeit c .

Dabei erfüllen jedoch **nicht** alle Lösungen der Wellengleichungen auch die Maxwell-Gleichungen:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E}_{\vec{k}} e^{i\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_{\vec{k}} = 0$$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B}_{\vec{k}} = 0$$

\vec{E} und \vec{B} sind also **transversale Wellen**.

Sie sind **nicht unabhängig**:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}} = \omega \vec{B}_{\vec{k}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{B}_{\vec{k}} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_{\vec{k}}$$

Es gilt also $|\vec{E}| = |\vec{B}|c$; \vec{k} , $\vec{E}_{\vec{k}}$ und $\vec{B}_{\vec{k}}$ bilden ein **rechtshändiges Orthogonalsystem**.

Die physikalischen Felder ergeben sich natürlich als Real- oder Imaginärteile der angegebenen

⑨6 komplexen Lösungen

Übung: Energiedichte, Poynting-Vektor?

Für viele Zwecke, z.B. die Konstruktion nichttrivialer Lösungen sind Zugänge auf der Ebene der elm. Potentiale ϕ, \vec{A} mit $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

praktischer. Dabei gilt speziell in Coulomb-

Eichung:
$$\frac{\rho(\vec{x},t)}{\epsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x},t) = -\Delta \phi(\vec{x},t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x},t)$$
$$= -\Delta \phi(\vec{x},t)$$

mit der Lösung
$$\phi(\vec{x},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}',t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|},$$

die scheinbar die Kausalität verletzt. Da für $\vec{A}(\vec{x},t)$ keine Lösung mit instantaner Fernwirkung existiert, ist dies jedoch auch für die physikalischen Felder $\vec{E}(\vec{x},t), \vec{B}(\vec{x},t)$ nicht der Fall.

Transparenter ist die Lorenz-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x},t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\vec{x},t)}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu A^\mu = 0,$$

die auf eine inhomogene Wellengleichung für

97 ϕ und \vec{A} führt. (Vorlesung: S. 89) / 19.12.12

5.2 Greensche Funktionen des Wellenoperators

Wir suchen nun allgemeine Lösungen der inhomogenen Wellengleichung $\square f(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t)$ (*)

Analog zur Elektrostatik führen wir dafür Green-Funktionen G des Wellenoperators

ein: $\square G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t')$ (Δ)

$$\leadsto f(\vec{x}, t) = \int dt' \int d^3x' G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') g(\vec{x}', t')$$

erfüllt die Wellengleichung (*).

Dabei fordern wir speziell für die **retardierte**

Green-Funktion: $G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = 0$ für $t < t'$;

eine zur Zeit t' einsetzende Störung soll sich also nur für $t > t'$ auf die Lösung auswirken.

Zur expliziten Konstruktion der Green-Funktionen führen wir **Fourier-Transformationen** durch:

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k \tilde{G}(\vec{k}, \omega)$$

$$\exp[i(\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') - \omega(t - t'))]$$

$$\delta(t-t') \delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3\vec{k} e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}') - \omega(t-t'))}$$

Damit wird (A) äquivalent zu

$$-\left(\frac{\omega^2}{c^2} - |\vec{k}|^2\right) \tilde{G}(\vec{k}, \omega) = 1$$

$$\Rightarrow G(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{k} \int d\omega \frac{\exp[i(\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}') - \omega(t-t'))]}{|\vec{k}|^2 - \omega^2/c^2} \quad (\text{K-T})$$

Mathematischer Exkurs: Residuensatz

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine einfach zusammenhängende offene Teilmenge der komplexen Ebene, $\{z_1, \dots, z_n\}$ eine endliche Menge von Punkten aus D und f eine holomorphe (d.h. komplex differenzierbare) Funktion

auf $D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, so gilt für das Linienintegral entlang einer glatten positiv orientierten geschlossenen Kurve $\Gamma \subset D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, z_a),$$

wobei sich die Summe über alle k erstreckt, für die der Punkt z_a im Inneren von Γ liegt.

Das Residuum $\text{Res}(f, z_a)$ von f am Punkt z_a ergibt sich als Koeffizient a_{-1} in einer Laurent-

Reihe $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_a)^j$ um z_a ; im Fall von einfachen Polstellen gilt also

$$\text{Res}(f, z_a) = \lim_{z \rightarrow z_a} [f(z)(z-z_a)].$$

* „Beweis“ durch explizite Berechnung für $z = ae^{i\varphi}$ (Kreiskontur)

Oft lässt sich der Residuensatz zur Berechnung von Integralen $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$ entlang der reellen Achse

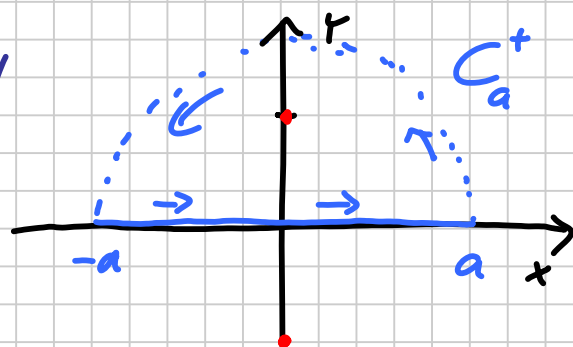
einsetzen, die nicht „normal“, d.h. via Stammfunktion von f ermittelt werden können.

Beispiel: $I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos(tx)}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{itx}}{x^2+1}$

Die Funktion $f(z) = \frac{e^{itz}}{z^2+1} = \frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)}$

hat einfache Polstellen bei $z_{\pm} = \pm i$

Trick: Betrachte Linienintegral für halbkreisförmige Kontur



(100) mit Grundlänge $2a$:

Für $t > 0$ schließen wir den Integrationsweg dabei über die obere Halbebene mit $a > 1$. Dann gilt:

$$\oint_{C_a} f(z) dz = \int_{-a}^a dx f(x) + \int_{C_a^+} dz f(z) \quad (\square)$$

Für $t > 0$ und $\text{Im}(z) > 0$ ist aber $|e^{itz}| \leq 1$; mit

$$z = ae^{i\varphi} \text{ gilt: } \left| \frac{1}{z^2+1} \right| = \left| \frac{1}{a^2 e^{2i\varphi} + 1} \right| = \frac{1}{|a^2 + e^{-2i\varphi}|} \leq \frac{1}{a^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\tilde{C}_a} dz f(z) \right| \leq \pi a \max_{z \in C_a^+} [f(z)] \leq \frac{\pi a}{a^2 - 1} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} \text{Andererseits ist } \oint_{C_a} f(z) dz &= 2\pi i \text{ Res}(f, z=i) \\ &= 2\pi i \left. \frac{e^{itz}}{z+i} \right|_{z=i} = \pi e^{-t} \end{aligned}$$

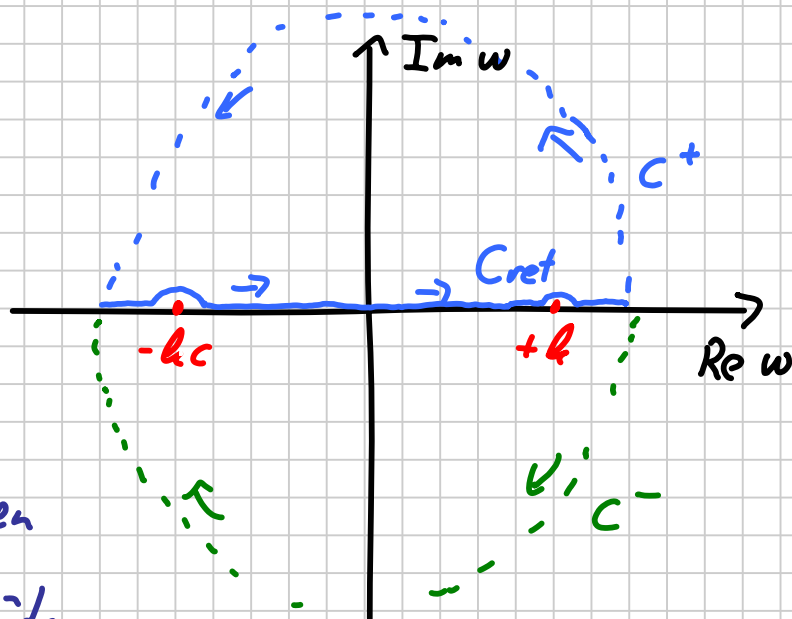
Durchführen des Grenzübergangs $a \rightarrow \infty$ auf beiden Seiten von \square liefert das Ergebnis $\mathcal{I}(t) = \pi e^{-t}$

Für $t < 0$ muss die Kontur über die untere Halbebene geschlossen werden \rightarrow Residuum $\frac{e^t}{-2i}$, aber Vorzeichenwechsel wegen negativem Umlaufsinn.

(101) Insgesamt: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1} dx = \pi e^{-|t|} \quad \square // 7.1.13$

Bei der Anwendung des Residuensatzes auf das w -Integral in (***) gibt es ein Problem: die Polstellen liegen bei $w = \pm c|\vec{k}|$, also auf der reellen Achse, entlang der eigentlich integriert werden soll.

Lösung: wir deformieren den Integrationsweg.



Für die retardierte Green-Funktion passieren wir beide Singularitäten **oberhalb** ($w \rightarrow w + i\epsilon$).

Für $t < t'$ ist die Exponentialfunktion $e^{-iw(t-t')}$ in der **oberen** Halbebene beschränkt, so dass wir das Integral über C^+ ohne Beitrag schließen können (bei Radius a gilt $|\frac{1}{w^2 - c^2 k^2}| \leq \frac{1}{a^2 - c^2 k^2}$ für $|w| > ck$).

Dann sind keine Residuen im Pfad

$$\leadsto G_{\text{ret}}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = 0 \quad \text{für } t < t'$$

Für $t > t'$ müssen wir mit C^- nach unten schließen und erhalten:

$$G_{\text{ret}}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \cdot$$

$$\int_{C_{\text{ret}} \cup C^-} dw \underbrace{\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega - ck)(\omega + ck)}}_{f(\omega)}$$

$$\left(\begin{aligned} &= -2\pi i [\text{Res}(f, \omega = ck) + \text{Res}(f, \omega = -ck)] \\ &= -2\pi i \left[\frac{e^{-ick(t-t')}}{2ck} + \frac{e^{ick(t-t')}}{-2ck} \right] \end{aligned} \right)$$

$$= \frac{ic}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{1}{2k} [e^{-ick(t-t')} - e^{ick(t-t')}]$$

$$= \frac{ic}{8\pi^2} \int_0^\infty dk k \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|\cos\theta} [e^{-ick(t-t')} - e^{ick(t-t')}]$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{c}{16\pi^2} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \int_{-\infty}^\infty dk [e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|} - e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|}] [e^{ick(t-t')} - e^{-ick(t-t')}]$$

Symmetrie in $k \rightarrow -k$

$$= \frac{c}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \delta(c(t-t') - |\vec{x}-\vec{x}'|)$$

↑ Grenze ausgeweitet

Insgesamt lautet die retardierte Greenfunktion:

$$G_{\text{ret}}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \Theta(t-t') \delta\left((t-t') - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)$$

(103)

↑ hier überflüssig

Die allgemeine retardierte Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\square f = g$ hat damit die Form:

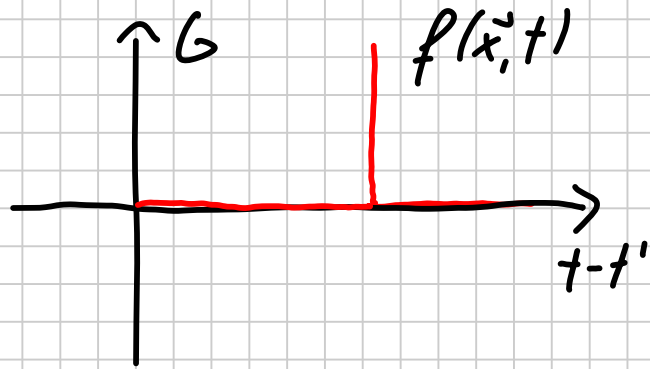
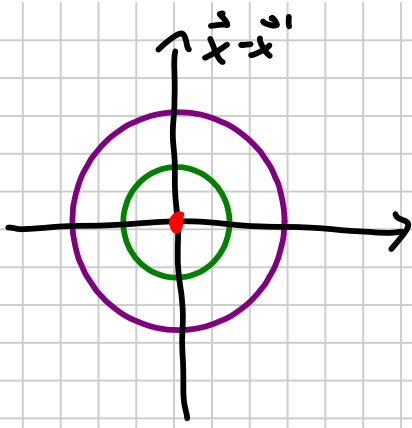
$$\begin{aligned} f_{\text{ret}}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int dt' \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left((t-t') - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) g(\vec{x}', t') \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{g(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{g(\vec{x}', t_{\text{ret}})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned}$$

$$\text{mit } t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$$

Die retardierte Green-Funktion kann auch geschrieben werden als: $G_{\text{ret}}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{c}{2\pi} \theta(t - t') \delta(c^2(t - t')^2 - |\vec{x} - \vec{x}'|^2)$.

Für die avancierte Green-Funktion trägt nur das Integral über die obere Halbebene bei (für $t < t'$); man erhält: $G_{\text{av}}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -\frac{c}{2\pi} \theta(t' - t) \delta(c^2(t - t')^2 - |\vec{x} - \vec{x}'|^2)$.

Beachte: physikalisch bedeutet die Proportionalität von G_{ret} zu einer δ -Funktion, dass jedes Signal (im freien Raum) das Feld an einer festen Stelle \vec{x} nur zu einem einzigen Zeitpunkt $t > t'$ beeinflusst:



Nicht nur die Wellenfront breitet sich also mit Geschwindigkeit aus, sondern auch die hintere Flanke des Signals (Soliton).

Dies gilt nur bei ungerader Dimensionalität $d=3$ des Raums! Obiger Schritt (***) wäre z.B. in $d=2$ nicht möglich \rightarrow keine Deltafunktion.

Stattdessen lässt lautet die Green-Funktion der Wellengleichung dann:

$$G_{\text{ret}}^{d=2}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \frac{c}{8\pi} \frac{\Theta\left(t-t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)}{\sqrt{c^2(t-t')^2 - |\vec{x}-\vec{x}'|^2}} \quad (\square\square)$$



Dieses Verhalten (δ -Quelle erzeugt für alle Beobachter

zeitlich abklingendes Signal) nennt man

(105) Nachhall (Reverberation).

Das Ergebnis $\square\square$ lässt sich als Erregung längs einer Gerade in $d=3$ interpretieren.

In $d=3$ ergibt sich für die elm. Potentiale

$$A^\mu(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int d^3x' \int dt' \frac{j^\mu(\vec{x}', t')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \delta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}) \quad (\triangleright)$$

5.3 Das Feld bewegter Punktladungen

Wir betrachten nun eine Punktladung mit Ladung q und Koordinaten $\vec{x}_q(t')$ sowie Geschwindigkeit $\vec{u}(t') = \frac{d}{dt'} \vec{x}_q(t')$; $\vec{\beta} = \frac{\vec{u}}{c}$

→ Ladungs- und Stromdichte

$$\vec{\rho}(\vec{x}', t') = q \delta(\vec{x}' - \vec{x}_q(t'))$$

$$\vec{j}(\vec{x}', t') = q \vec{u}(t') \delta(\vec{x}' - \vec{x}_q(t'))$$

bzw. $j^\mu(\vec{x}', t') = \frac{qc}{\gamma_u} u^\mu \delta(\vec{x}' - \vec{x}_q(t'))$; $u^\mu = \gamma_u(1, \vec{\beta})$
Vgl. Kontinuum: $j^\mu = \rho_0 c u^\mu$

Einsetzen in (\triangleright) liefert:

$$A^\mu(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{u^\mu(t')}{\gamma_u(t') |\vec{x} - \vec{x}_q(t')|} \delta(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}_q(t')|}{c}) \quad (\triangleright)$$

Wir führen nun die retardierte Zeit $\tau = \tau(\vec{x}, t)$

$$\text{mit } \tau + \frac{|\vec{x} - \vec{x}_q(\tau)|}{c} = t \quad (0)$$

sowie den Relativvektor $\vec{R}(\vec{x}, \tau) = \vec{x} - \vec{x}_q(\tau)$ ein.

Die Selbstkonsistenzgleichung (0) drücken wir als Nullstelle der Funktion $F_{\vec{x}, t}(\tau)$ aus:

$$F_{\vec{x}, t}(\tau) \equiv \tau + \frac{R(\vec{x}, \tau)}{c} - t = 0,$$

die wegen $|\vec{u}| < c$ eine eindeutige Lösung hat.

$$\rightarrow \delta(t' - t + \frac{R(\vec{x}, t')}{c}) = \delta[F_{\vec{x}, t}(t')] = \frac{\delta(t' - \tau)}{|\frac{dF_{\vec{x}, t}(\tau)}{d\tau}|}$$

$$\text{Hierbei gilt: } \frac{dF_{\vec{x}, t}(\tau)}{d\tau} = 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial \tau}(\vec{x}, \tau)$$

$$\text{mit } \frac{\partial R}{\partial \tau} = \frac{1}{2R} \frac{\partial (R^2)}{\partial \tau} = \frac{\vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \tau}}{R} = -\vec{R} \cdot \vec{u}$$

$$\rightarrow \delta(t' - t + \frac{R(\vec{x}, \tau)}{c}) = \frac{\delta(t' - \tau)}{1 - \underbrace{\vec{\beta}(\tau) \cdot \vec{R}(\vec{x}, \tau)}_{\leq 1}}$$

Einsetzen in (10) liefert:

$$\begin{aligned} A^{\mu}(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(dt' \frac{u^{\mu}(t')}{\gamma_u(t') R(\vec{x}, t')} \frac{\delta(t' - \tau)}{1 - \vec{\beta}(\tau) \cdot \vec{R}(\vec{x}, \tau)} \right) \\ &= \frac{q u^{\mu}(\tau)}{4\pi\epsilon_0 \gamma_u(\tau)} \frac{1}{R(\vec{x}, \tau) - \vec{\beta}(\tau) \cdot \vec{R}(\vec{x}, \tau)} = \frac{q u^{\mu}(\tau)}{4\pi\epsilon_0 R_{\perp} u^{\nu}} \end{aligned}$$

mit dem 4-Differenzvektor

$$(\vec{R}, \vec{R}) = (c(t-\tau), \vec{x} - \vec{x}_q(\tau)) \quad // \text{09.01.13}$$

Die Lösung $A^\mu(x^\mu) = \frac{q u^\mu}{4\pi\epsilon_0 R_\nu u^\nu}$

ist manifest kovariant. Die Aufteilung in Zeit- und Ortsanteil liefert die Liénard-Wiechert-

Potentiale:

$$\phi(\vec{R}, \vec{\beta}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}}$$

$$\vec{A}(\vec{R}, \vec{\beta}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\beta}}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}}$$

mit $\vec{R} = \vec{R}(\vec{x}, \tau)$; $\vec{\beta} = \vec{\beta}(\tau)$,

wobei die retardierte Zeit mit der Zeitvariable t verknüpft ist: $\tau = \tau(\vec{x}, t)$. Wegen dieser

impliziten Abhängigkeit ist die Berechnung der Felder $\vec{E}(\vec{x}, t) = -\nabla_{\vec{x}}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$; $\vec{B}(\vec{x}, t) = \nabla_{\vec{x}} \times \vec{A}$

schwierig. Eine längere Rechnung (siehe z.B. App.

108) A im van-Dongen-Skriptl liefert;

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{(1-\beta^2)(\hat{R}-\vec{\beta}) + \frac{R}{c} \hat{R} \times [(\hat{R}-\vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1-\vec{\beta} \cdot \hat{R})^3}, \quad (\square)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{R} \times \vec{E},$$

wobei $\dot{\vec{\beta}} = \frac{d\vec{\beta}}{dt}(\tau)$ die Beschleunigung des Teilchens (geteilt durch c) bezeichnet. Offenbar gibt es

2 Anteile mit verschiedenem Charakter:

- statischer Term: β -unabhängig, $\propto \frac{1}{R^2}$
- Strahlungsterm: $\propto \dot{\beta}$, $\propto \frac{1}{R}$

Generisch dominiert der 2. Term bei großen Abständen. Nur dieser trägt auch zur Abstrahlung von Energie ins Unendliche bei (laut Relativitätsprinzip ist diese bei $\dot{\beta} = 0$ nicht möglich).

5.3.1 Strahlungsleistung beschleunigter Ladungen

Für die Abstrahlung von Energie ins Unendliche ist nur der Strahlungsterm wichtig:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c R} \frac{\hat{R} \times [(\hat{R}-\vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1-\vec{\beta} \cdot \hat{R})^3}; \quad c\vec{B} = \hat{R} \times \vec{E}$$

Für den Poynting-Vektor \vec{S} folgt:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \times (\vec{R} \times \dot{\vec{E}}) = -\epsilon_0 c [(\vec{E} \cdot \vec{R}) \dot{\vec{E}} - E^2 \vec{R}] \\ &= \epsilon_0 c E^2 \hat{R}\end{aligned}$$

Die Energie strömt also radial nach außen. Die Amplitude ist im Bezugssystem des Beobachters (mit

Zeit t): $\vec{S} \cdot \hat{R} = \epsilon_0 c E^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c R^2} \frac{|\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{R})^6}$

Oft interessanter: Energiestromdichte im Bezugssystem der Quelle, d.h. in retardierter Zeit:

$$\vec{S} \cdot \hat{R} \frac{dt}{d\tau} = \vec{S} \cdot \hat{R} (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{R})$$

Der Energiestrom pro Raumwinkel beträgt dann:

$$\frac{dW}{d\Omega} = R^2 (\vec{S} \cdot \hat{R}) (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{R}) = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{R})^5} \quad (4)$$

Wir betrachten jetzt interessante Spezialfälle:

a) nichtrelativistischer Grenzfall

$$\frac{dW}{d\Omega} \xrightarrow{\beta \ll 1} \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \underbrace{|\hat{R} \times (\hat{R} \times \dot{\vec{\beta}})|^2}_{= |\dot{\vec{\beta}}|^2 \sin^2(\psi)} = \frac{q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2 \sin^2(\psi)}{16\pi^2 \epsilon_0 c},$$

wobei ψ den Winkel zwischen \hat{R} und $\dot{\vec{\beta}}$ angibt.

Die Integration über den Raumwinkel

$$\int d\Omega \sin^2|\Psi| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\psi \sin^3(\psi) = 2\pi \int_{-1}^1 dx (1-x^2) = \frac{8\pi}{3}$$

liefert für die Gesamtstrahlungsleistung:

$$W = \int d\Omega \frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2}{6\pi \epsilon_0 c} = \frac{q^2 |\ddot{\vec{x}}|^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad \text{Larmor-Formel}$$

b) geradlinig beschleunigte Bewegung

Auch für $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$ fällt $\vec{\beta}$ im Zähler von $|\Delta|$ weg:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\hat{R} \times (\hat{R} \times \dot{\vec{\beta}})|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{R})^5} = \frac{q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2}{16\pi \epsilon_0 c} \frac{\sin^2(\Psi)}{(1 - \beta \cos(\Psi))^5} \quad (\triangleright)$$

Mit $x = \cos(\Psi)$ erreicht der Winkelanteil

$\frac{1-x^2}{(1-\beta x)^5}$ sein Maximum bei einem Winkel

$$x_{\max} = \cos(\Psi_{\max}) = \frac{\sqrt{1+15\beta^2} - 1}{3\beta}$$

Integration über x liefert die Gesamtleistung:

$$W = \frac{q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \int_{-1}^1 dx \frac{1-x^2}{(1-\beta x)^5} = \frac{q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2}{6\pi \epsilon_0 c}$$

Nichtrelativistischer Limes \rightarrow Larmor-Formel

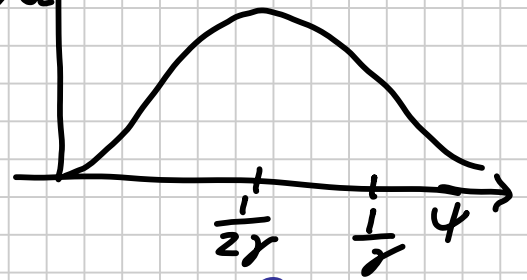
Für den ultrarelativistischen Grenzfall findet man



mit $\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \leadsto \beta \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ $\frac{dW}{d\Omega}$

$(\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2})$

$\psi_{\max} \sim \frac{1}{2\gamma} \rightarrow 0 \quad (\gamma \rightarrow \infty)$



Die Abstrahlung findet also bevorzugt in Bewegungsrichtung statt. Daher können wir die Winkel entwickeln: $\sin(\psi) \approx \psi$; $\cos(\psi) \approx 1 - \frac{\psi^2}{2}$

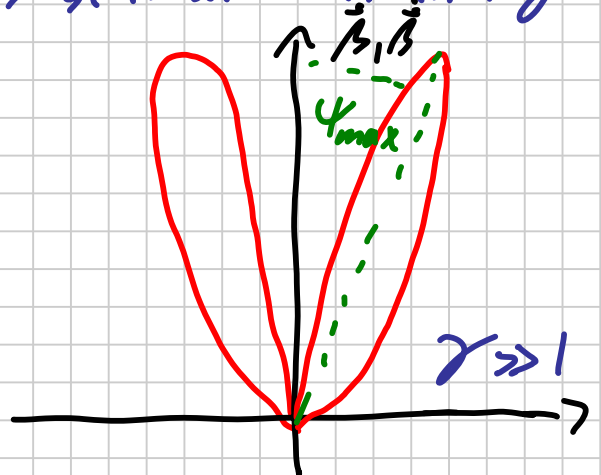
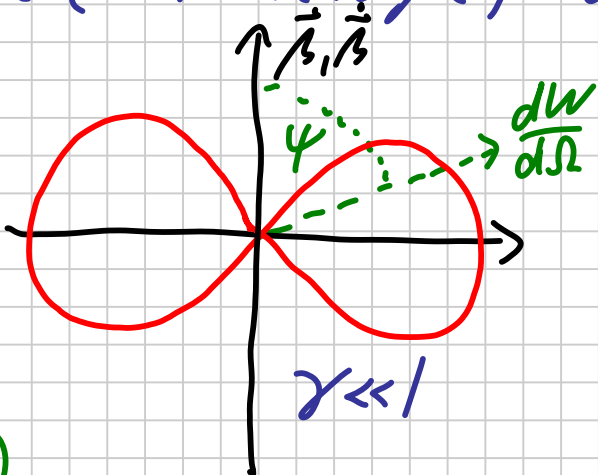
$$\rightarrow \frac{\sin^2(\psi)}{(1 - \beta \cos(\psi))^5} \approx \frac{\psi^2}{[1 - (1 - \frac{1}{2\gamma^2})(1 - \frac{1}{2}\psi^2)]^5} \approx \frac{\psi^2}{(\frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1}{2}\psi^2)^5}$$

$$= 32 \gamma^8 \frac{(\gamma\psi)^2}{(1 + (\gamma\psi)^2)^5}$$

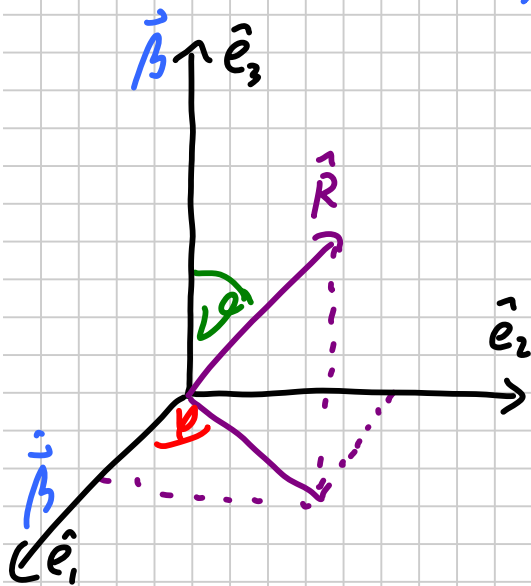
$$\Rightarrow \frac{dW}{d\Omega} \sim \frac{2q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2 \gamma^8}{\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{(\gamma\psi)^2}{(1 + (\gamma\psi)^2)^5} \quad (\gamma \rightarrow \infty)$$

$$\leadsto \sqrt{\langle \psi^2 \rangle} \sim \frac{1}{\gamma} = \frac{m_0 c^2}{E_g} \quad (\gamma \rightarrow \infty)$$

Der quadratische Mittelwert von ψ fällt also wie (Gesamtenergie)⁻¹ ab \rightarrow schmale Verteilung



c) Kreisbewegung bei konstanter Geschwindigkeit



Wir wählen \hat{e}_3 entlang der instantanen Geschwindigkeit und \hat{e}_1 entlang der instantanen Beschleunigung.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dW}{d\Omega} &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{|\dot{\vec{R}} \times [(\dot{\vec{R}} \cdot \vec{\beta}) \times \vec{\beta}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{\vec{R}})^5} \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{[1 - \beta \cos(\vartheta)]^2 - (1 - \beta^2) \sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi)}{(1 - \beta \cos(\vartheta))^5} \\ \Rightarrow W &= \int d\Omega \frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c} \end{aligned}$$

Im ultrarelativistischen Limes erhält man für die Winkelverteilung:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2 \gamma^6}{2\pi^2\epsilon_0 c} \frac{[1 + (\gamma\vartheta)^2]^2 - 4(\gamma\vartheta)^2 \cos^2(\varphi)}{(1 + (\gamma\vartheta)^2)^5} \quad (\gamma \rightarrow \infty)$$

Wieder gilt: $\sqrt{1 - \beta^2} \sim \frac{1}{\gamma} = \frac{m_0 c}{E_\gamma} \quad (\gamma \rightarrow \infty)$

In jedem Fall konzentriert sich die Strahlung
 (113) also auf die Bewegungsrichtung. // 14.01.13

5.4 Strahlungsfelder lokalisierter oszillierender Quellen

Wir betrachten nun ein lokalisiertes dynamisches System von Ladungen und Strömen und das davon erzeugte elm. Feld, bzw. dessen Ausbreitung im Vakuum.

Linearität: betrachte Strahlung einzelner Fourier-Komponenten

$$\rho(\vec{x}, t) = \operatorname{Re} [\rho(\vec{x}) e^{-i\omega t}]$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \operatorname{Re} [\vec{j}(\vec{x}) e^{-i\omega t}]$$

der Ladungs- und Stromverteilung mit Frequenz ω .

Achtung: $\rho(\vec{x})$, $\vec{j}(\vec{x})$ sind i. A. nicht reell

Kontinuitätsgleichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) = i\omega \rho(\vec{x})$

Das retardierte 4-Potential lautet nach Sec. 5.2:

$$A^\mu(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int d^3x' \frac{j^\mu(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\leadsto \phi(\vec{x}, t) = \operatorname{Re} [\tilde{\phi}(\vec{x}) e^{-i\omega t}], \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \operatorname{Re} [\vec{A}(\vec{x}) e^{-i\omega t}]$$

mit $\tilde{\phi}(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}') e^{i\mathbf{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|}$; $\vec{A}(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{i\mathbf{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\vec{x} - \vec{x}'|}$

Hierbei ist natürlich $k = \frac{\omega}{c}$. Aus der Lorenzgleichung $\partial_\nu A^\nu = 0$ folgt: $\tilde{\phi}(\vec{x}) = \frac{c}{ik} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x})$

Die Felder außerhalb der Quellen folgen mit $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ (Vakuum) als $\vec{B}(\vec{x}, t) = \text{Re}[\vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t}]$; $\vec{E}(\vec{x}, t) = \text{Re}[\vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}]$, wobei $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$; $\vec{E} = \frac{ic}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}$

Wir können uns im Folgenden also auf die Berechnung des Vektorpotentials \vec{A} beschränken und brauchen $\tilde{\phi}(\vec{x})$ nicht berechnen.

Grundannahme, um im Folgenden konkrete Aussagen über Strahlungsverteilung und Intensität treffen zu können: die Wellenlänge der Strahlung ist **groß** gegenüber der **Ausdehnung** a der Quelle: $ka = \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1$

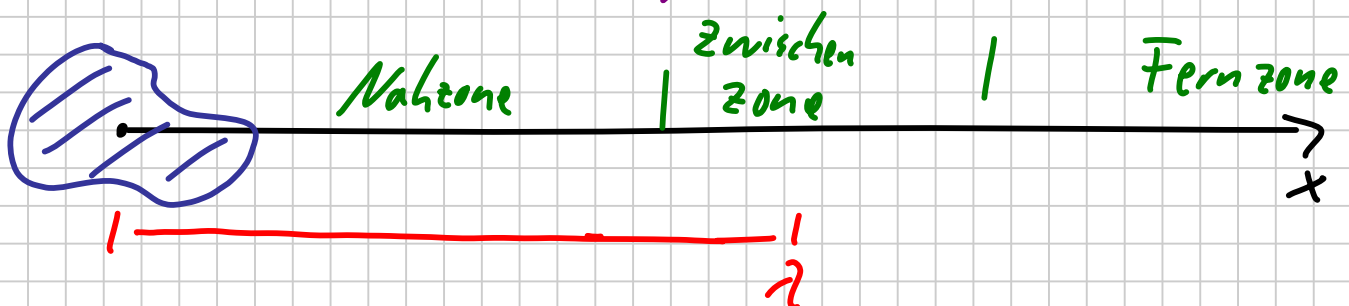
Im Rahmen einer Fourier-Zerlegung ist bei geg. Quelldurchmesser a unsere Theorie also nur

⑪ für $\omega < \omega_c \approx \frac{c}{a}$ gültig.

Wenn wir als Beispiel ein Teilchen betrachten, das sich mit Frequenz ω auf einem Kreis mit Radius a bewegt, bedeutet das: $|\vec{\beta}| = \frac{|\dot{\vec{x}}|}{c} = \frac{\omega a}{c} = ka \ll 1$. Wir beschränken uns daher auf **nichtrelativistische Systeme**. Wir nehmen auch an, dass die Quelle um den Ursprung lokalisiert ist: $\gamma^\mu(\vec{x}', t') = 0$ für $|\vec{x}'| > a$.

Insgesamt existieren bei der Berechnung des Feldes am Ort \vec{x} also **3 Längenskalen**: a , λ und $x = |\vec{x}|$, wobei n.V. $a \ll \lambda$. Zusätzlich fordern wir $a \ll x$. Damit sind für x **3 Raumbereiche** zu unterscheiden (ggf. abhängig von Fourier-Komponente):

- **Nahzone, statische Zone**: $a \ll x \ll \lambda$
- **Zwischen-, Induktionszone**: $a \ll x \sim \lambda$
- **Fern-, Strahlungszone**: $a \ll \lambda \ll x$



In allen 3 Zonen können wir entwickeln:

$$|\vec{x} - \vec{x}'| \sim x \left[1 - \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{x^2} + \frac{\vec{x}'^T (\vec{x}' \vec{x}'^T - |\vec{x}'|^2 \mathbb{1}) \vec{x}}{2x^3} + \dots \right]$$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \sim \frac{1}{x} \left[1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{x^2} + \frac{\vec{x}'^T (3\vec{x}' \vec{x}'^T - |\vec{x}'|^2 \mathbb{1}) \vec{x}}{2x^3} + \dots \right]$$

Einsetzen in * liefert:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikx}}{x} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') e^{-ik(\vec{x} \cdot \vec{x}' + \dots)} \left(1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{x^2} + \dots \right)$$

5.4.1 Elm. Feld in der Nahzone

In der Nahzone gilt ($ka \ll 1$ und) $lx \ll 1$

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{x}) \sim \frac{\mu_0}{4\pi x} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}')$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi x} \int d^3x' \vec{x}' \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}')}_{i\omega \rho(\vec{x}'')}$$

$$= -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi x} \vec{d}; \quad \vec{d} = \int d^3x' \vec{x}' \rho(\vec{x}')$$

Hier bezeichnet \vec{d} das elektrische Dipolmoment

Damit ergeben sich die elm. Felder als

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \frac{ik}{4\pi\epsilon_0 c x^2} \vec{x} \times \vec{d}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{ic}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \frac{(3\vec{x}\vec{x}^T - \mathbb{1})\vec{d}}{4\pi\epsilon_0 x^3}$$

Das magnetische Feld $c \vec{B}$ ist also um einen Faktor $l_x \ll 1$ kleiner als das elektrische Feld \rightarrow Die Nahzone ist durch das E-Feld dominiert, das die gleiche Form hat wie das Dipolfeld der E-Statik.

Erst in der Induktionszone erlangt das magn. Feld $c \vec{B}$ („magnetische Induktion“) die Größenordnung des E-Feldes.

5.4.2 Elm. Feld in der Fernzone

In der Fernzone sind l_a , $\frac{a}{x}$ und $\frac{1}{l_x}$ klein:

$$\vec{A}(\vec{x}) \sim \frac{\mu_0 e^{i k x}}{4\pi x} \left\{ \underbrace{\int d^3 \vec{x}' \vec{j}(\vec{x}')}_{-i\omega \vec{d}} - i l_x \left[\int d^3 \vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x}'|} \right] \vec{x} + \dots \right\}$$

Wir zerlegen den Tensor im 2. Term in symm. und antisymm. Anteile:

$$\int d^3 \vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x}'|} = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x}' [\vec{x}' \vec{j}^T + \vec{j}(\vec{x}')^T] + \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x}' [\vec{j}(\vec{x}')^T - \vec{x}' \vec{j}^T]$$

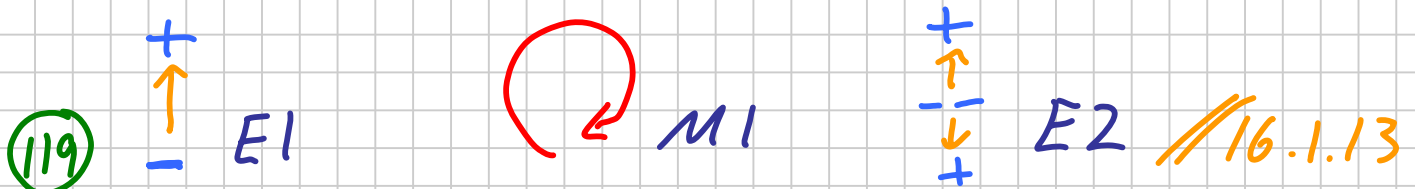
Der 2. Anteil wird als magnetischer Dipol-
tensor bezeichnet. Der erste Anteil lässt sich
dagegen (bei Periodizität) im Wesentlichen als
elektrisches Quadrupolmoment Q schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3x' [\vec{x}' \vec{j}^T + \vec{j}(\vec{x}')^T] &= -\frac{1}{2} \int d\vec{x}' \vec{x}'(\vec{x}')^T \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}') \\ &= -\frac{i\omega}{2} \int d\vec{x}' \vec{x}'(\vec{x}')^T \rho(\vec{x}') \\ &= -\frac{i\omega}{3} \left[Q + \frac{1}{2} \int d^3x' |\vec{x}'|^2 \rho(\vec{x}') \underline{\underline{1}} \right] \equiv -\frac{i\omega}{3} \tilde{Q} \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &\sim \frac{\mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \left[-i\omega \vec{d} - ik\hat{x} \cdot (D - \frac{i\omega}{3} \tilde{Q}) + \dots \right] \\ &\equiv \vec{A}_{E1} + \vec{A}_{M1} + \vec{A}_{E2} \end{aligned}$$

Diese 3 führenden Terme werden als
elektrische Dipolstrahlung (E1), magnetische
Dipolstrahlung (M1) und elektrische
Quadrupolstrahlung (E2) bezeichnet.



E1: elektrische Dipolstrahlung

Ein oszillierender elektrischer Dipol $\vec{d} \cos(\omega t)$ induziert das (komplex notierte) Magnetfeld

$$\begin{aligned}\vec{B}_{E1} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_{E1} = \vec{\nabla} \times \left(-i\omega \frac{\mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \vec{d} \right) \\ &= -\frac{i\omega \mu_0}{4\pi} \hat{x} \times \vec{d} \frac{d}{dx} \frac{e^{ikx}}{x} \\ &= -\frac{i\omega \mu_0}{4\pi} \hat{x} \times \vec{d} \left(ik \frac{e^{ikx}}{x} - \frac{e^{ikx}}{x^2} \right) \\ &= \frac{k^2 \mu_0 c e^{ikx}}{4\pi x} \left(1 - \frac{1}{ikx} \right) \hat{x} \times \vec{d} \\ &\stackrel{kx \gg 1}{\sim} \frac{k^2 \mu_0 c e^{ikx}}{4\pi x} \hat{x} \times \vec{d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\vec{\nabla} \times (\vec{a} f(x))]_i &= \epsilon_{ijk} a_j \partial_k f(x) = \epsilon_{ija} a_j f'(x) \frac{x_i}{x} \\ &= f'(x) [\hat{x} \times \vec{a}]_i\end{aligned}$$

und das elektrische Feld

$$\begin{aligned}\vec{E}_{E1} &= \frac{ic}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{B}_{E1} \\ &= \frac{ik e^{ikx}}{4\pi \epsilon_0 x^2} \left[\left(ikx - 3 + \frac{3}{ikx} \right) \hat{x} \hat{x}^T - \left(ikx - 1 + \frac{1}{ikx} \right) \mathbb{1} \right] \vec{d} \\ &\sim -\frac{k^2 e^{ikx}}{4\pi \epsilon_0 x} [\hat{x} \hat{x}^T - \mathbb{1}] \vec{d} \\ &= c \vec{B}_{E1} \times \hat{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\hat{x} \times \vec{d}) \times \hat{x} &= -\hat{x} \times (\hat{x} \times \vec{d}) \\ &= -\hat{x} (\hat{x} \cdot \vec{d}) + \vec{d} \\ &= -[\hat{x} \hat{x}^T - \mathbb{1}] \vec{d}\end{aligned}$$

Der zeitliche Mittelwert der Leistung pro Raumwinkel $\overline{\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)}_{EI} = \frac{1}{\mu_0} \overline{\vec{E} \times \vec{B}} \cdot \hat{x} x^2$

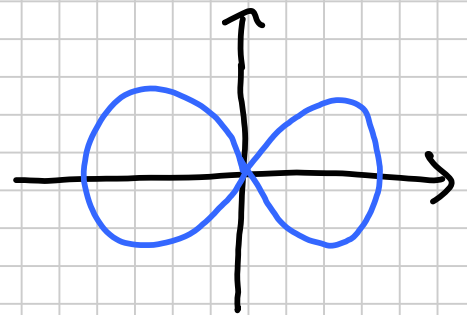
berechnet sich mit Hilfe der Beziehung

$$\begin{aligned} \overline{\vec{E} \times \vec{B}} \cdot \hat{x} &= \overline{\text{Re} [\vec{E} e^{-i\omega t} \times \vec{B} e^{-i\omega t}]} \cdot \hat{x} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} (\vec{E} \times \vec{B}^*) \cdot \hat{x} \\ &= \frac{c}{2} \text{Re} [(\vec{B} \times \hat{x}) \times \vec{B}^*] \cdot \hat{x} \\ &= \frac{c}{2} |\vec{B} \times \hat{x}|^2 \end{aligned} \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

zu $\overline{\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)}_{EI} = \frac{cx^2}{2\mu_0} |\vec{B}_{EI} \times \hat{x}|^2 = \frac{cx^2}{2\mu_0} \left(\frac{h^2 \mu_0 c}{4\pi x}\right)^2 |(\hat{x} \times \vec{d}) \times \hat{x}|^2$

$$= \frac{c h^4}{32\pi^2 \epsilon_0} |\hat{x} \times \vec{d}|^2 = \frac{c h^4 |\vec{d}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \sin^2(\varphi)$$

wobei φ den Winkel zwischen \hat{x} und \vec{d} angibt.



Der Beitrag von EI zur zeitgemittelten Gesamtleistung der Strahlung beträgt also

$$\overline{W}_{EI} = \int d\Omega \overline{\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)}_{EI} = \frac{c h^4 |\vec{d}|^2}{12\pi \epsilon_0}$$

M1+E2: Magnetische Dipol + elektrische Quadrupolstrahlung

Wir betrachten nun den mit

$$\vec{A}_{M1+E2} = -\frac{i\hbar\mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} (D - \frac{i\omega}{3} \tilde{Q}) \hat{x}$$

assoziierten Strahlungsbeitrag. Wieder trägt nur der auf e^{ikx} wirkende Anteil der Ableitung bei:

$$\begin{aligned}\vec{B}_{M1+E2} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_{M1+E2} \sim i\hbar \hat{x} \times A_{M1+E2} \\ &= \frac{\hbar^2 \mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \hat{x} \times \left[(D - \frac{i\omega}{3} Q) - \frac{i\omega}{3} \left(d^2 \hat{x} \hat{x}^T \right) \right] \hat{x} \\ &= \frac{\hbar^2 \mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \hat{x} \times (M \hat{x}); \quad M = D - \frac{i\omega}{3} Q\end{aligned}$$

ohne Tilde
Diagonaleanteil v. \tilde{Q}

$$\vec{E}_{M1+E2} = \frac{ic}{\hbar} \vec{D} \times \vec{B}_{M1+E2} \sim -c \hat{x} \times \vec{B}_{M1+E2}$$

Mittlere Strahlungsleistung pro Raumwinkel:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)_{M1+E2} &= \frac{1}{\mu} \vec{E} + \vec{B} \cdot \hat{x} x^2 \sim \frac{cx^2}{2\mu_0} |\hat{x} \times \vec{B}_{M1+E2}|^2 \\ &\sim \frac{\mu_0 c \hbar^4}{32\pi^2} |\hat{x} \times [\hat{x} \times (M \hat{x})]|^2 \\ &= \frac{\mu_0 c \hbar^4}{32\pi^2} |\hat{x} \times (M \hat{x})|^2\end{aligned}$$

Für die Raumwinkel-Mittelwerte $\langle \dots \rangle_{\Omega}$ gilt:

$$\langle |\vec{x} \times (M\vec{x})|^2 \rangle_{\Omega} = \frac{1}{3} \text{Sp}(D D^+) + \frac{\omega^2}{45} \text{Sp}(Q Q^+)$$

Mit dem magnetischen Moment \vec{m}

$$D_{ij} = -\epsilon_{ijk} m_k; \quad \vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3x' \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')$$

gilt: $\text{Sp}(D D^+) = 2|\vec{m}|^2$. Insgesamt folgt für die zeitgemittelte Gesamtleistung (aus M1 + E2):

$$\begin{aligned} \overline{W}_{M1+E2} &\sim \frac{M_0 c k^4}{8\pi} \langle |\vec{x} \times (M\vec{x})|^2 \rangle_{\Omega} \\ &= \frac{M_0 c k^4}{12\pi} \left[\underbrace{|\vec{m}|^2}_{M1} + \underbrace{\frac{\omega^2}{30} \text{Sp}(Q Q^+)}_{E2} \right] \end{aligned}$$

Diese ist also additiv in \overline{W}_{M1} und \overline{W}_{E2} .

Die Winkelverteilung von M1-Strahlung lautet:

$$\left(\frac{dW}{d\Omega} \right)_{M1} = \frac{M_0 c k^4}{32\pi^2} |\vec{x} \times (\vec{x} + \vec{m})|^2 = \frac{M_0 c k^4 |\vec{m}|^2}{32\pi^2} \sin^2(\vartheta),$$

wobei ϑ jetzt der Winkel zwischen \vec{x} und \vec{m} ist.

Für die E2-Strahlung gilt:

$$\left(\frac{dW}{d\Omega} \right)_{E2} = \frac{c k^6}{3^2 2^5 \pi^2 \epsilon_0} |\vec{x} + (Q\vec{x})|^2,$$

(123) wobei Q spurfrei und symmetrisch, aber i.A.

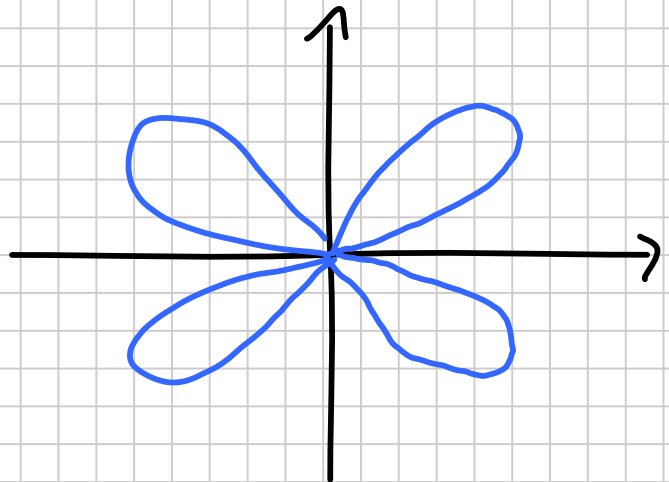
komplex und daher nicht diagonalisierbar ist.

Beispiel: nehmen wir zur Illustration die Form $Q = \text{diag}(Q_0, Q_0 - 2Q_0)$ an, so folgt die Winkelverteilung des Strahlungsfeldes als

$$\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)_{E_2} = \frac{c k^6 |Q_0|^2}{2^7 \pi^2 \epsilon_0} \sin^2(2\vartheta),$$

wobei ϑ den Winkel zwischen \hat{x} und der angenommenen Symmetrieachse \hat{e}_3 bezeichnet.

I.A. kann die Form auch komplizierter sein.



Wegen der Annahme, dass die Ladungs- und Stromverteilung einen kleinen Durchmesser (gegenüber λ) hat, tragen in der Entwicklung meist nur die niedrigsten nicht-verschwindenden Momente signifikant bei.

Kapitel 6: Relativistische Dynamik

Theorie 1: $\vec{F} = m \vec{a}$

Kapitel 4: relativistische Verallgemeinerung

Theorie 2: Analytische Mechanik:
Hamilton'sches Prinzip
Lagrange - Gleichungen
Hamilton - Gleichungen
Hamilton - Jacobi - Formalismus
...

Frage: Relativistische Verallgemeinerung der Methoden von Theorie 2 möglich?

Antwort: Im Prinzip ja: sogar relativ einfach für einzelne Teilchen

Aber: Fernwirkungen verboten \rightarrow
Zwangsbedingungen problematisch,
(Gravitation \rightarrow allgemeine Relativitätstheorie)

6.1 Kräftefreie Teilchen

Der gesuchte Formalismus muss folgendes reproduzieren:

(i) die freie Bewegungsgleichung $m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$

(mit Lösung: $u^\mu = \text{konstant}$, d.h. geradlinig gleichförmige Bewegung)

(ii) die „Einstein-Formel“ $E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$

(iii) den nichtrelativistischen Grenzfall.

Ansatz für Lorentz-invariantes Wirkungsfunktional

(Max Planck, 1906):

$$S_M = S_1[x] = \underbrace{-m_0 c}_{\substack{\uparrow \\ \text{Materie}}} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} ds}_{\substack{\uparrow \uparrow \\ \text{Lorentz-Skalare}}} = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma_u(t)}$$

Hierbei sind den Ereignissen „1“ und „2“ die Koordinaten

$x_1^\mu = (ct_1, \vec{x}_1)$ bzw. $x_2^\mu = (ct_2, \vec{x}_2)$ zugeordnet (in einem beliebig, aber fest, gewählten Inertialsystem).

Diese sind bei Variation von S festzuhalten.

(i) Zur Bestimmung des stationären Punkts $\vec{0} = \frac{\delta S}{\delta \vec{x}(t)}$ schreiben wir $S_M = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$

mit $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; t) = -\frac{m_0 c^2}{\gamma_u(t)} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{c^2}}$

(Kontrolle: im nichtrelativistischen Limes erhält man:

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; t) = -m_0 c^2 \left[1 - \frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{2c^2} + \mathcal{O}(c^{-4}) \right] \quad \mathcal{L} = -m_0 c^2 t$$

$$= -m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 |\dot{\vec{x}}|^2 + \mathcal{O}(c^{-2}) \xrightarrow{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2} m_0 |\dot{\vec{x}}|^2 + \frac{d}{dt} \mathcal{L} \quad \text{o.k.}$$

// 21.1.13

Verallgemeinerter Impuls (wie üblich):

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m_0 \dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2}} = \gamma m_0 \vec{u}$$

$$\Rightarrow p_i = m_0 c u^i$$

$$\Rightarrow \vec{0} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = -\frac{d}{dt} \left[-m_0 c^2 \frac{-\dot{\vec{x}}/c^2}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2}} \right]$$

$$= -m_0 \frac{d}{dt} (\gamma_u \vec{u})$$

Lösung: \vec{u} konstant $\Rightarrow m_0 \frac{d\dot{x}^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad \square$

(ii) Hier: S_m ist für physikalische Bahn minimal:

Abstand $\|x_1^\mu - x_2^\mu\|$ zeitartig (sonst keine Bahn 1 \rightarrow 2)

\Rightarrow es existiert ein Inertialsystem K' mit $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$

\Rightarrow Gesamtabstand $\int_1^2 ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\frac{1}{\gamma_u(t)}}_{\leq 1}$

(127) wird durch ruhendes Teilchen maximiert

→ ruhendes Teilchen (in K') minimiert S_m

→ Bewegung in jedem IS geradlinig gleichförmig. □

Lagrange-Funktion nicht explizit zeitabhängig

→ Energie ist durch das Jacobi-Integral gegeben:

(iii)

$$\mathcal{E}(\dot{\vec{x}}) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L = \frac{m_0 |\dot{\vec{x}}|^2}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2}} - (-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{c^2}})$$

$$= \gamma_u m_0 c^2 (\beta^2 + (1 - \beta^2))$$

$$= \gamma_u m_0 c^2 = m_0 c u^0$$

↑ „Einstein-Formel“ $\mathcal{E} = mc^2$

$$\Rightarrow p^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p} \right) = m_0 c u^\mu$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m_0^2 c^2 u^2 = m_0^2 c^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(\vec{p}) = H(\vec{x}, \vec{p}; t) = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

(nichtrelativistischer Limes: $\mathcal{E}(\vec{p}) = m_0 c^2 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + \dots$)
(ultrarelativistischer Limes: $\mathcal{E}(\vec{p}) = |\vec{p}|c$ ($m_0 = 0$))

Hamilton-Gleichungen:

$$\textcircled{128} \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = 0; \quad \dot{\vec{x}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p} c^2}{\sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m_0^2 c^4}}$$

$\rightarrow \vec{u} = \dot{\vec{x}}$ konstant \rightarrow geradlinig gleichf. Bewegung. \square

(iv) Manifest kovariante Formulierung:

$$\delta S_m = -m_0 c \int_1^2 \delta(ds) = -m_0 c \int_1^2 \delta \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$$
$$= -m_0 c \int_1^2 \frac{dx^\mu}{ds} \delta(dx_\mu) = -m_0 c \int_1^2 u^\mu d(\delta x_\mu)$$

$$\delta \sqrt{f} = \frac{\delta f}{2\sqrt{f}}$$

$$= -m_0 c u^\mu \delta x_\mu \Big|_1^2 + m_0 c \int_1^2 \delta x_\mu \frac{du^\mu}{ds} ds \stackrel{!}{=} 0$$

Dies kann für beliebige δx^μ nur gelten, falls

$$\frac{du^\mu}{ds} = 0 \quad \rightarrow \text{geradlinig gleichf. Bewegung. } \square$$

Relativistische Verallgemeinerung des Drehimpulses

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} = \begin{pmatrix} x_2 p_3 - x_3 p_2 \\ x_3 p_1 - x_1 p_3 \\ x_1 p_2 - x_2 p_1 \end{pmatrix}; \quad L_i = \epsilon_{ija} x_j p_a$$

(als Erhaltungsgröße im Zentralpotential)?

\vec{L} ist Pseudovektor \rightarrow müsste räumlich-räumlichen Komponenten eines 4-Tensors entsprechen.

Ansatz: $L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$

Check: $\frac{dL^{\mu\nu}}{ds} = \frac{dx^\mu}{ds} p^\nu + x^\mu \frac{dp^\nu}{ds} - \frac{dx^\nu}{ds} p^\mu - x^\nu \frac{dp^\mu}{ds}$ (da kräftefrei) $= 0$

$$= u^\mu p^\nu - u^\nu p^\mu$$

$$= m_0 c (u^\mu u^\nu - u^\nu u^\mu) = 0$$

Der Tensor ist also (für freies Teilchen tatsächlich) erhalten. Explizit in Komponenten:

$$L^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline \vec{\ell} & 0 & L_3 & -L_2 \\ & -L_3 & 0 & L_1 \\ & L_2 & -L_1 & 0 \end{array} \right); \quad \vec{\ell} = \frac{\epsilon}{c} \vec{x} - \vec{p} ct$$

($L^{0i} = x^0 p^i - x^i p^0 = ct p^i - x_i \frac{\epsilon}{c} = -\ell_i$)

Neben dem (Pseudovektor) Drehimpuls finden wir also eine weitere Erhaltungsgröße, den echten Vektor $\vec{\ell}$, der die geradlinig gleichförmige Bewegung beschreibt:

$$\vec{x} = \frac{c}{\epsilon} \vec{\ell} + \vec{u} t; \quad \vec{u} = \frac{c^2}{\epsilon} \vec{p} = \frac{\vec{p}}{\gamma u m_0}$$

Wie zuvor entsprechen die Erhaltungsgrößen
Invarianzen der Wirkung:

Translation \Leftrightarrow Impuls (Ort) bzw. Energie (Zeit),

Lorentzinvarianz \Leftrightarrow 4-Drehimpuls-Tensor

Insgesamt: Invarianz unter Poincaré-Transf.

6.2 Wechselwirkung mit elektromagnetischem Feld

Ausgangspunkt: (i) Relativistische Wirkung

$$S_m = -m_0 c \int_1^2 ds \quad \text{des freien Teilchens}$$

(ii) Ansatz für Wechselwirkung (vgl. Theorie 1+2),
wie im nicht-relativistischen Fall:

$$L_{ww} = q [\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} - \phi]$$

$$\leadsto S_{ww} = q \int_{t_1}^{t_2} dt [\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) - \phi(\vec{x}, t)]$$

$$= q \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma_u} [\gamma_u \dot{\vec{x}} \cdot (c \vec{A}) - \gamma_u \phi]$$

$$u_\mu = \gamma_u (1, -\dot{\vec{x}})$$

$$u^\nu = \frac{dx^\nu}{ds} = \frac{dr}{c}$$

$$A^\mu = (\phi, c \vec{A}) \quad \Rightarrow \quad = -\frac{q}{c} \int_1^2 ds u_\nu A^\nu$$

(131) Ausdruck ist kovariant \Rightarrow relativistisch korrekt

$$\Rightarrow S = S_m + S_{ww} = \int_1^2 ds \left(-m_0 c - \frac{q}{c} u_\nu A^\nu \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{u}}|^2}{c^2}} + q \dot{\vec{u}} \cdot \vec{A} - q \phi \right)$$

Der Integrand ist natürlich die relativistisch korrekte Lagrange-Funktion $L = L_m + L_{ww} = L_m + \tilde{L}_{ww}$
 Hieraus leiten wir den kanonischen Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{u}}} = \gamma m_0 \dot{\vec{u}} + q \vec{A} \equiv \vec{\pi} + q \vec{A}$$

ab, wobei $\vec{\pi} \equiv \vec{p} - q \vec{A} = \gamma_u m_0 \dot{\vec{u}}$ den kinetischen Impuls bezeichnet.
 Faktor $\frac{1}{c}$ wegen $A^\mu = (\phi, c\vec{A})$

In 4-Vektoren: $\underline{p}^\mu = m_0 c u^\mu + \frac{q}{c} A^\mu \equiv \underline{\pi}^\mu + \frac{q}{c} A^\mu$

Die Hamilton-Funktion folgt durch Legendre-Transfo:

$$H = \dot{\vec{u}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{u}}} - L$$

$$= \dot{\vec{u}} \cdot (\gamma_u m_0 \dot{\vec{u}} + q \vec{A}) - \left(\frac{-m_0 c^2}{\gamma_u} + q \dot{\vec{u}} \cdot \vec{A} - q \phi \right)$$

$$= \gamma_u m_0 c^2 \left(\frac{\dot{\vec{u}}^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) + q \phi = \underline{\gamma_u m_0 c^2 + q \phi(\vec{x}, t)}$$

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \sqrt{\vec{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4} + q \phi$$

$$= \sqrt{(\vec{p} - q \vec{A})^2 c^2 + m_0^2 c^4} + q \phi$$

Für die Zeitkomponente des 4-Impulses gilt:

$$p^0 = m_0 c \gamma_u + \frac{q}{c} \phi = \frac{H}{c} \Rightarrow p^\mu = \left(\frac{H}{c}, \vec{p} \right)$$

Beachte: H darf nur als Energie interpretiert werden, falls ϕ nicht explizit zeitabhängig ist: $\phi = \phi(\vec{x})$.

Dies legt die Eichung von ϕ bis auf eine Konstante fest. In jedem Fall ist die **intrinsische Energie**

$$E(\vec{u}) = \gamma_u m_0 c^2 = \sqrt{\vec{u}^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

(kinetische E. + Ruheenergie) wohldefiniert.

Ableitung der Bewegungsgleichung aus Hamilton'schem Prinzip in kovarianter Form:

$$0 = \delta S = \delta \int_1^2 \left(-m_0 c \sqrt{dx_\mu dx^\mu} - \frac{q}{c} A^\nu dx_\nu \right)$$

$$\delta(dx^\mu) = d(\delta x^\mu)$$

($\nu \rightarrow \mu$)

$$\downarrow = \int_1^2 \left[-m_0 c \frac{dx^\mu}{ds} d(\delta x_\mu) - \frac{q}{c} A^\mu d(\delta x_\mu) - \frac{q}{c} (\partial^\mu A^\nu) (\delta x_\mu) dx_\nu \right]$$

$$= - \underbrace{\left(m_0 c u^\mu + \frac{q}{c} A^\mu \right) \delta x_\mu \Big|_1^2}_{=0}$$

$$+ \int_1^2 \delta x_\mu ds \left[m_0 c \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{q}{c} \partial^\nu A^\mu \frac{dx_\nu}{ds} - \frac{q}{c} \partial^\mu A^\nu \frac{dx_\nu}{ds} \right]$$

Variationsprinzip: $[\dots] = 0$

$$\rightarrow m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = m_0 c^2 \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = q u_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \\ = q u_\nu F^{\mu\nu} = K^\mu \quad (*)$$

Alt. Ableitung über Lagrange-/Hamilton-Gleichungen:

Kompliziert. Zur Interpretation schreiben wir um:

$$m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = m_0 \gamma_u \frac{d}{dt} (c u^\mu) = \gamma_u \frac{d\pi^\mu}{dt}$$

$$* K^\mu = q \gamma_u (\vec{E} \cdot \vec{\beta}_u, \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

Mit $\pi^\mu = (\frac{\epsilon}{c}, \vec{\pi})$ folgt daraus

$$\frac{d}{dt} \vec{\pi} = q (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}); \quad (\vec{\pi} = \gamma_u m_0 \vec{u})$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{u}$$

Die Ausdrücke für die zeitliche Änderung des kinetischen Impulses und für die zugeführte

Leistung haben also die gleiche Form wie im nichtrelativistischen Fall.

Invarianzen: Zeitumkehr ($t \rightarrow -t$), Parität ($\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$),
 allg. Poincaré-Transformation $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$
 und Eichung $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ \nwarrow L-Skalar
// 23.1.13

6.3 Das Coulomb-Problem für ein einzelnes Teilchen

Wir betrachten die Dynamik eines geladenen relativistischen Teilchens (Ladung q , Ruhemasse m_0) in einem Zentralpotential der Form

$\phi(\vec{x}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 x}$ (mit $x = |\vec{x}|$); das Vektorpotential sei $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{0}$. Interpretation: immobiles Teilchen (mit Masse $M_0 \rightarrow m_0$) im Ursprung.

Aus der Wirkung $S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} - q \phi(\vec{x}) \right]$

folgen die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = q \vec{E}; \quad \vec{\pi} = \gamma_u m_0 \vec{u}; \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi = \frac{q_0 \hat{e}_x}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

Neben der Gesamtenergie $E_{\text{ges}} = \sqrt{\pi^2 c^2 + m_0^2 c^4} - \frac{q_0}{x}$;

$a = \frac{-q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$ ist der Drehimpuls des Teilchens erhalten:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{x} \times \vec{\pi}) = \vec{u} \times \vec{\pi} + \vec{x} \times \frac{d\vec{\pi}}{dt} = \vec{x} \times q_1 \vec{E} = \vec{0}$$

Erinnerung: im nichtrelativistischen Grenzfall ist zusätzlich der Runge-Lenz-Vektor $\vec{a} = \vec{u} \times \vec{L} - a \hat{e}_x$ erhalten, der für $E_{ges}^{NR} < 0$ vom Brennpunkt der Bahnellipse zum Perihel zeigt.

Wir wählen nun $\hat{e}_3 = \hat{L}$ und beschreiben die Umlaufbahn in der (x_1, x_2) -Ebene in Polarkoordinaten (x, φ) .

$$\leadsto L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\varphi}^2)} + \frac{a}{x}$$

Daraus ergeben sich die zu x bzw. φ konjugierten

$$\text{Impulse } \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \gamma m_0 \dot{x} \equiv \pi_x; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \gamma m_0 x^2 \dot{\varphi} \equiv \pi_\varphi$$

und die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d\pi_x}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} = \gamma m_0 x \dot{\varphi}^2 - \frac{a}{x^2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d\pi_\varphi}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

φ zyklisch $\leadsto \pi_\varphi$ erhalten mit $\pi_\varphi = |\vec{L}|$:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{x} \times \vec{\pi} = \gamma m_0 \vec{x} \times \vec{u} = \gamma m_0 \vec{x} \times (\dot{x} \hat{e}_x + x \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi) \\ &= \gamma m_0 x^2 \dot{\varphi} (\hat{e}_x \times \hat{e}_\varphi) = \pi_\varphi \hat{e}_3\end{aligned}$$

Wir werden sehen, dass sich die Form der Bahnen im relativistischen Fall teils fundamental von den Kepler-Bahnen unterscheidet. Zunächst betrachten wir jedoch den einfachsten Fall:

Kreisbahnen. Bei Kreisbahnen gilt: x konstant

$$\leadsto \dot{x} = 0 \leadsto \pi_x = 0 \leadsto \gamma m_0 x \dot{\varphi}^2 = \frac{a}{x^2} \quad *$$

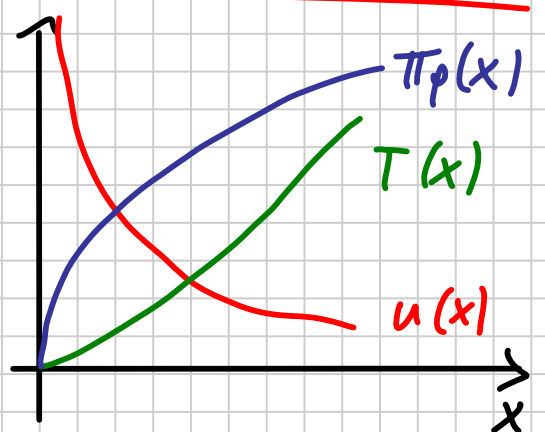
Frage: sind beliebige Radien, Geschwindigkeiten, Drehimpulse, Umlaufzeiten möglich?

Zunächst **nichtrelativistisch:**

$$m_0 x \dot{\varphi}^2 = \frac{a}{x^2} \Leftrightarrow m_0 u^2 = \frac{a}{x} \Leftrightarrow \underline{u(x) = \sqrt{\frac{a}{m_0 x}}}$$

$$\underline{\pi_\varphi = |\vec{L}| = m_0 u x = \sqrt{m_0 a x}}$$

$$\underline{T = \frac{2\pi x}{u} = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{a}} x^{3/2}}$$



Antwort 1: Im nichtrelativistischen Grenzfall ja!

Eine Einschränkung bei der relativistischen Betrachtung ist klar: $u(x) < c$

Konsequenzen für $x_{\min/\max}, \pi_\varphi$?

$$\leadsto a = \gamma m_0 x^3 \dot{\varphi}^2 = \pi_\varphi x \dot{\varphi} = \pi_\varphi u < \pi_\varphi c$$

$$\Rightarrow \bar{a} = \frac{a}{\pi_\varphi c} = \beta < 1$$

$$\Leftrightarrow \pi_\varphi > \frac{a}{c}$$

Antwort 2a:

Bei gegebener Wechselwirkungsstärke $a = \frac{-qq_0}{4\pi\epsilon_0}$ sind Kreisbahnen also nur mit einem **Mindest-drehimpuls** $\pi_{\varphi, \min}^k = \frac{a}{c}$ möglich.

Mechanismus? Werden die möglichen Radien dadurch eingeschränkt? Wie ändert sich die Abhängigkeit $\pi_\varphi(x)$?

Rechnung komplizierter wegen $\gamma = \gamma(u)$:

$$\gamma m_0 x \dot{\varphi}^2 = \frac{a}{x^2} \Leftrightarrow \frac{m_0 x^3 \dot{\varphi}^2}{a} = \gamma^{-1}$$

$$\frac{c^4 m_0^2 x^2 x^4 \dot{\varphi}^4}{a^2 c^4} = 1 - \underbrace{\left(\frac{x \dot{\varphi}}{c}\right)^2}_{\beta^2}$$

$$\Leftrightarrow \beta^4 + \alpha \beta^2 - \alpha = 0; \quad \alpha \equiv \left(\frac{a}{m_0 x c^2} \right)^2$$

$$\beta^2 = \sqrt{\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{4} \right)} - \frac{\alpha}{2}$$

$\alpha \rightarrow 0 \rightarrow \sqrt{\alpha} \sim \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow \infty)$
 $\alpha \rightarrow \infty \rightarrow 1 - \frac{1}{\alpha} \quad (x \rightarrow 0)$
 $\sim \gamma \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sqrt{\alpha} \sim \frac{1}{x}$

$$\frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \frac{\alpha}{4}} \approx \frac{\alpha}{2} \left[1 + \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha}{4} \right)^2 \right]$$

→ Antwort 2b

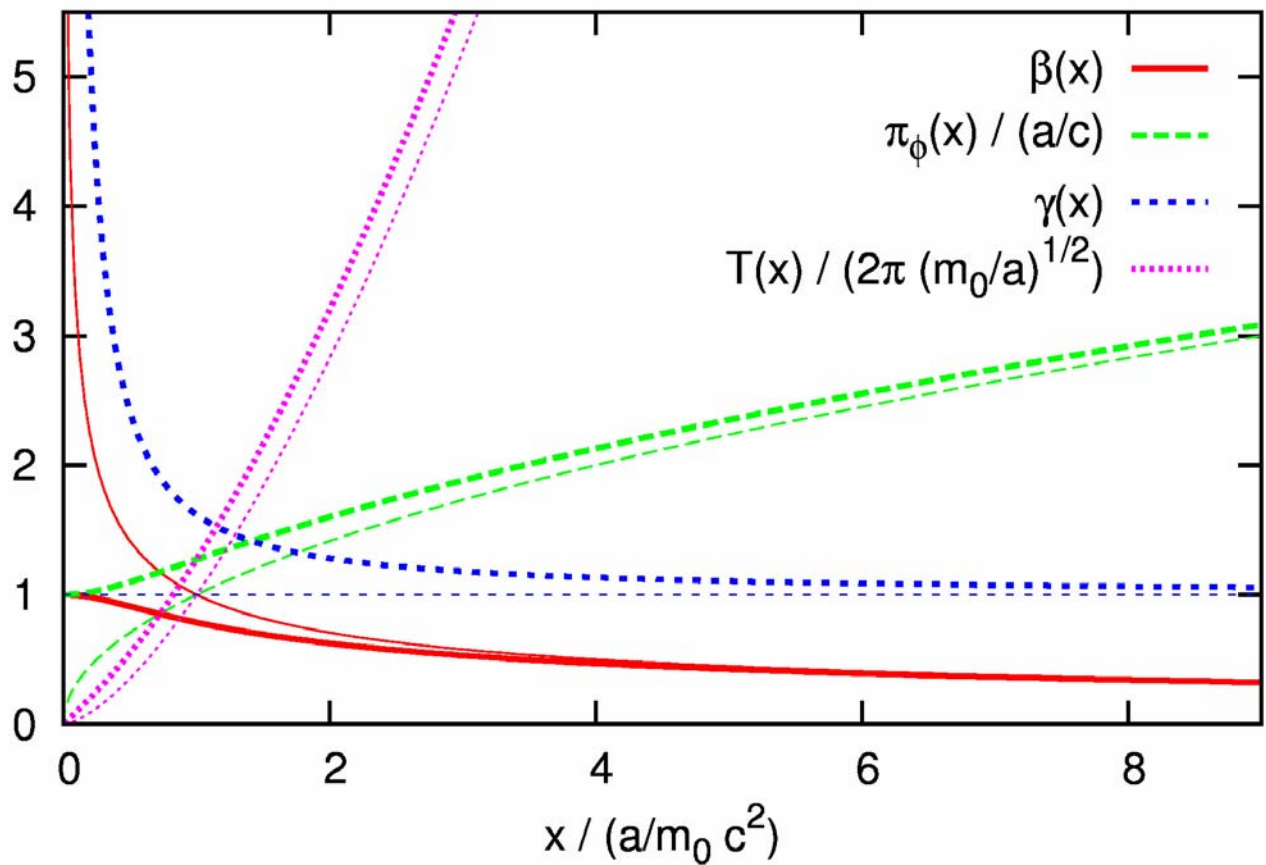
Kreisbahn mit beliebigem Radius möglich, auch jede Geschwindigkeit $0 < \beta < 1$ möglich.

Jetzt Drehimpuls explizit:

$$\pi_\varphi = m_0 x \dot{\varphi} \gamma = m_0 c x \frac{\beta(x)}{\sqrt{1 - \beta^2(x)}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{a}{c}$$

Alternativer Ausdruck: $\pi_\varphi = \frac{a}{\beta c} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$

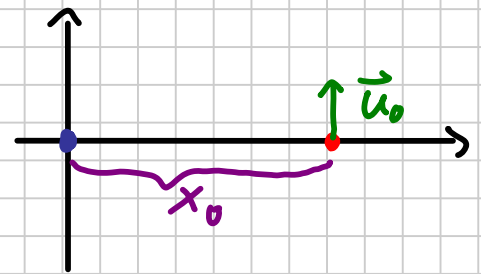
Abbildung: Verlauf der dynamischen Größen für Kreisbahnen mit Radius x



dicke Linien: relativistisch, dünne Linien: nichtrel.

Jetzt allgemeinere Interpretation: Kreisbahnen als Gleichgewichtszustände, bezogen auf den radialen Abstand x (bei festem Drehimpuls π_ϕ)

Gedankenexperiment: Das geladene Teilchen wird im Abstand x_0 vom Ursprung mit tangentialer Geschwindigkeit



$\vec{u}_0 = u_0 \hat{e}_\phi$ „gestartet“ Bahn?

klar: $\pi_\phi = m_0 \gamma u_0 x_0$ erhalten

Index 0: Start - kein 4-Vektor!

a) nichtrelativistisch: 4 Fälle

(i) $\pi_\varphi = \pi_\varphi^K(x_0) \rightarrow$ Kreisbahn

\uparrow Drehimpuls für
Kreisbahn mit
Radius x_0

(ii) $\pi_\varphi > \pi_\varphi^K(x_0), \epsilon_g^{NR} < 0$

\rightarrow es existiert ein „gleichgewichts-
radius“ x_g mit $\pi_\varphi = \pi_\varphi^K(x_g)$

\rightarrow Abstand $x(\varphi)$ schwingt um $x_g > x_0$ mit

$x_{\min}|\varphi| = x_0$ (Startpunkt = Perihel)

genauer (3.4.5): $x^{-1}(\varphi) = p^{-1} + A \cos(\varphi)$; $p \approx x_g$ Ellipse

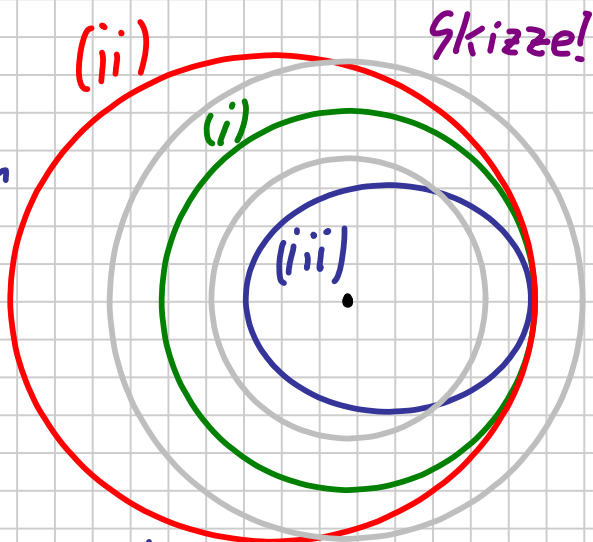
(iii) $0 < \pi_\varphi < \pi_\varphi^K(x_0)$: analog zu (ii) mit $x_g < x_0$
(Ellipse mit Startpunkt = Aphel)

(iv) $\epsilon_g^{NR} \geq 0$: offene Bahnen (Parabel/Hyperbel)

b) relativistisch:

(i') $\pi_\varphi = \pi_\varphi^K(x_0)$ wie (i)

(ii') $\pi_\varphi > \pi_\varphi^K(x_0), \epsilon_g < m_0 c^2$



Abstand $x(\varphi)$ schwingt um Gleichgewichts-
abstand $x_g > x_0$ mit $x_{\min}(\varphi) = x_0$

Aber: Bahn nicht exakt periodisch (s.u.)

$$(iii'') \quad 0 < \pi_\varphi < \pi_\varphi^K(x_0)$$

Fallunterscheidung:

$$A) \quad \pi_\varphi > \pi_{\varphi, \min}^K = \frac{a}{c}$$

\rightarrow Bahnen analog zu (iii) bzw. (ii') (s.u.)

$$B) \quad \pi_\varphi \leq \pi_{\varphi, \min}^K = \frac{a}{c}$$

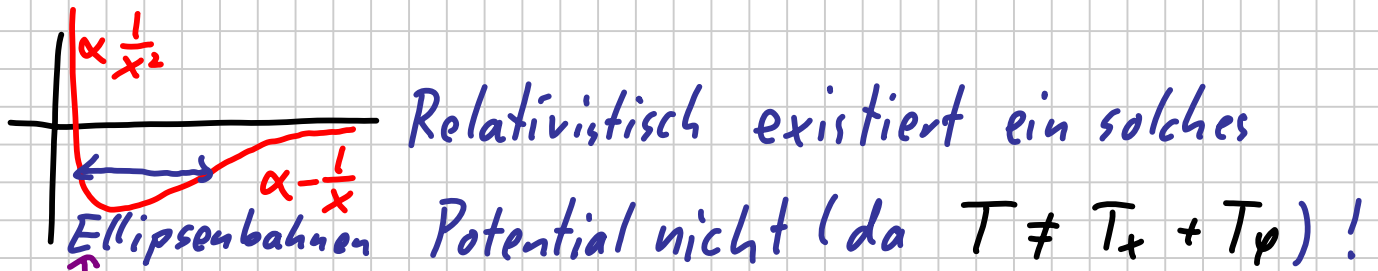
\rightarrow Zu diesem Startdrehimpuls existiert
kein Gleichgewichtsradius (> 0)

\rightarrow Teilchen spiralt in kern (s.u.)

(iv') $E_g \geq m_0 c^2$ offene Bahnen (wie iv), aber
andere Gestalt

Bemerkung: Im nichtrelativistischen Fall lässt sich ein
minimaler Abstand für $\pi_\varphi \neq 0$ aus dem effektiven

Potential $V_f(x) = V(x) + \frac{L^2}{2\mu x^2} = \frac{L^2}{2\mu x^2} - \frac{a}{x}$ ableiten.



Barriere für kleine Abstände

Jetzt Rechnung für allgemeine Bahnen:

Wegen $\vec{\pi} = \gamma m_0 (\dot{x} \hat{e}_x + x \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi) = \pi_x \hat{e}_x + \frac{\pi_\varphi}{x} \hat{e}_\varphi$

gilt für die erhaltene Gesamtenergie

$$E_g = \sqrt{\vec{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4} - \frac{a}{x} = c \sqrt{\pi_x^2 + \frac{\pi_\varphi^2}{x^2} + (m_0 c)^2} - \frac{a}{x}$$

$$\leadsto (\pi_x)^2 = \frac{1}{c^2} \left(E_g + \frac{a}{x} \right)^2 - \frac{\pi_\varphi^2}{x^2} - (m_0 c)^2$$

$$\leadsto \left(\frac{\pi_x}{\pi_\varphi} \right)^2 = \frac{1}{\pi_\varphi^2 c^2} \left(E_g + \frac{a}{x} \right)^2 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{m_0 c}{\pi_\varphi} \right)^2$$

Andererseits gilt:

$$\frac{\pi_x}{\pi_\varphi} = \frac{\gamma m_0 \dot{x}}{\gamma m_0 x^2 \dot{\varphi}} = \frac{dx/dt}{x^2 d\varphi/dt} = \frac{dx}{x^2 d\varphi} = - \frac{d(x^{-1})}{d\varphi}$$

Mit $\bar{a} = \frac{a}{\pi_\varphi c}$ (dimensionslos) erhalten wir also:

$$\left(\frac{d(x^{-1})}{d\varphi} \right)^2 = \frac{E_g^2 - (m_0 c)^2}{(\pi_\varphi c)^2} - (1 - \bar{a}^2) \frac{1}{x^2} + 2 \frac{E_g \bar{a}}{\pi_\varphi c} \frac{1}{x} \quad (\square)$$

Gewöhnliche Differentialgleichung für $x^{-1}(\varphi)$!

Wir führen die dimensionslose Länge bzw. Energie

$$\xi \equiv \frac{|a| m_0 x}{\pi \varphi^2} = \frac{|\bar{a}| m_0 c x}{\pi \varphi} \quad \text{bzw.} \quad \eta = \frac{E_g}{m_0 c^2} \quad \text{ein.}$$

Fall a) $\bar{a} = 1$ (d.h. $\pi \varphi = \pi \varphi^K(0)$)

$$\left(\frac{dx^{-1}}{d\varphi} \right)^2 = \frac{(E_g/m_0 c^2)^2 - 1}{\pi \varphi^2} (m_0 c)^2 + 2 \frac{E_g}{m_0 c^2} \overset{=1}{\frac{\bar{a} m_0 c}{\pi \varphi x}}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\xi^{-1}}{d\varphi} \right)^2 &= \left(\frac{\pi \varphi}{m_0 c} \right)^2 \left[(\eta^2 - 1) \left(\frac{m_0 c}{\pi \varphi} \right)^2 + 2 \eta \frac{m_0 c}{\pi \varphi} \frac{m_0 c}{\pi \varphi \xi} \right] \\ &= \eta^2 - 1 + 2 \frac{\eta}{\xi} \end{aligned}$$

Separationsansatz: $\frac{d\xi^{-1}}{\pm \sqrt{2\eta/\xi + \eta^2 - 1}} = d\varphi$

$$\frac{1}{\eta} \sqrt{2\eta/\xi + \eta^2 - 1} = \pm (\varphi - \varphi_0)$$

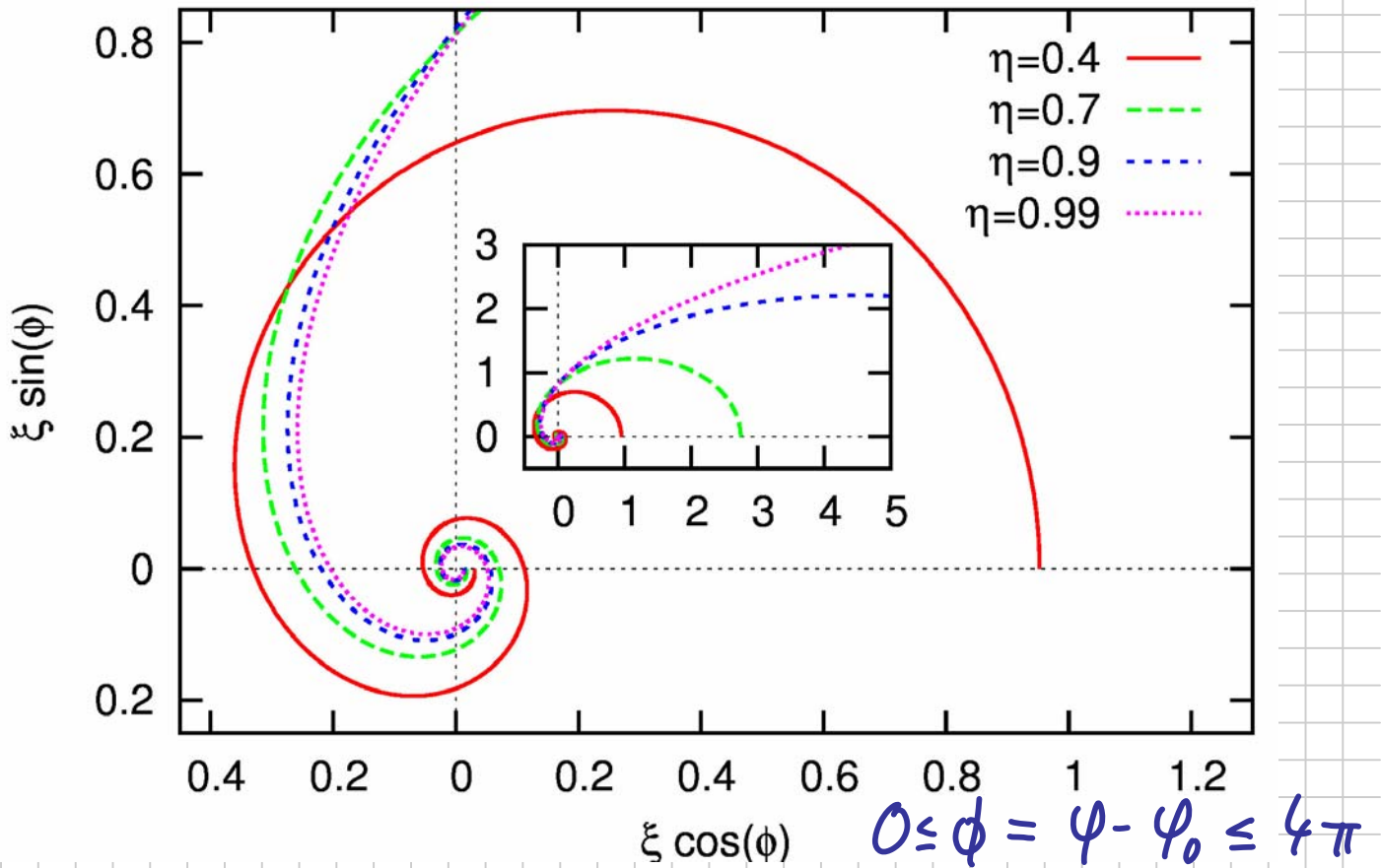
$$\xi(\varphi) = \frac{2\eta}{\eta^2 (\varphi - \varphi_0)^2 + (1 - \eta^2)} \quad (\bar{a} = 1)$$

> 0 falls $\eta < 1$

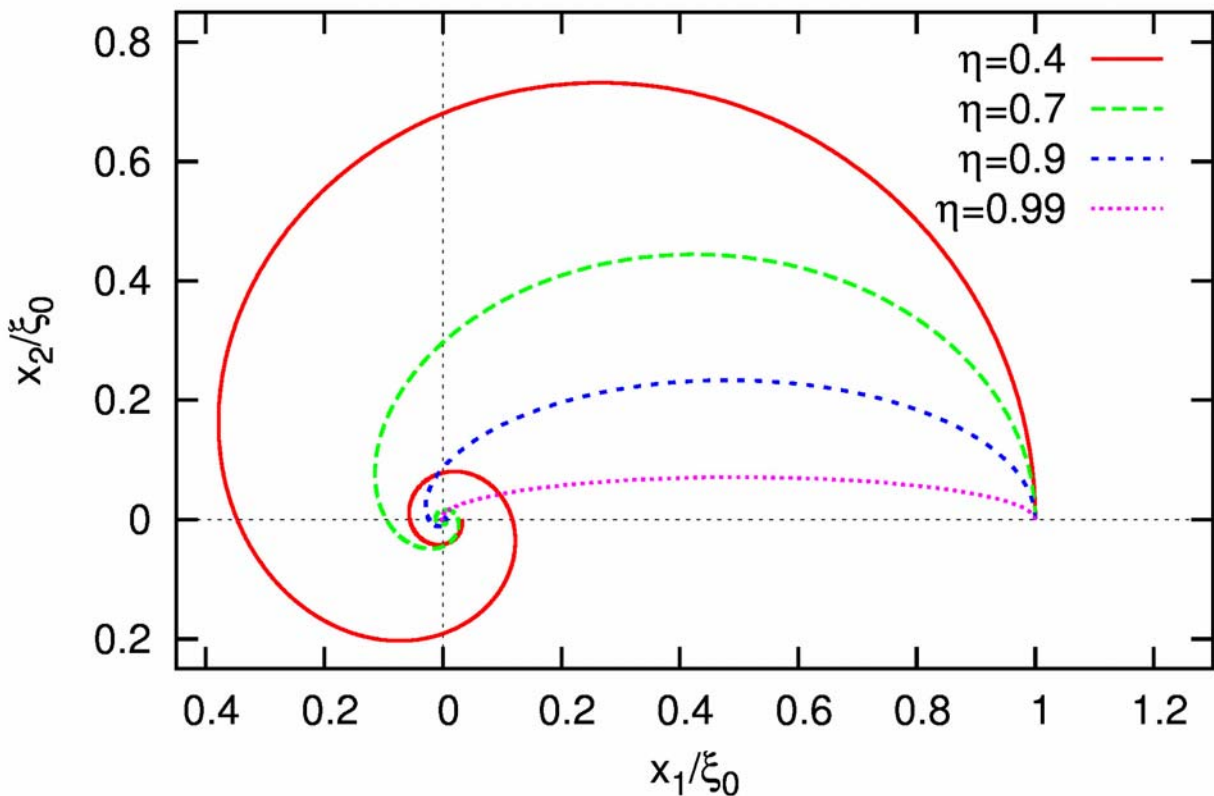
Für $\eta < 1$ (gebundener Zustand) geht $\xi \xrightarrow{\varphi \rightarrow \pm \infty} 0$

\rightarrow Teilchen spiralt in das Zentrum.

28.1.13



Hier Bahnen reskaliert auf Anfangsabstand:



Für $\eta \geq 1$ gibt es Bahnen mit $\xi = \infty$.

Fall b) $0 < \bar{a} \neq 1$ „epsilon“ $\neq \epsilon$

$$\leadsto \left(\frac{d\varphi}{d\psi} \right)^2 = \frac{\epsilon^2}{1-\bar{a}^2} - (1-\bar{a}^2) \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{\eta}{1-\bar{a}^2} \right)^2; \quad \epsilon \equiv \sqrt{1 - \frac{1-\eta^2}{\bar{a}^2}}$$

Lösungen für $\bar{a} \neq 1$, d.h. $\pi_\varphi > \pi_\varphi^K(0)$: Mit

$$X^{-1} = \frac{1-\bar{a}^2}{\epsilon} \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{\eta}{1-\bar{a}^2} \right); \quad \phi \equiv \sqrt{|1-\bar{a}^2|} \varphi \text{ lautet } *:$$

$$\left(\frac{dX^{-1}}{d\phi} \right)^2 = \operatorname{sgn}(1-\bar{a}^2) (1-X^{-2})$$

Für schwache Coulomb-Anziehung ($0 < \bar{a} < 1$) ist das Vorzeichen positiv \leadsto Lösung $X^{-1} = \cos(\phi - \phi_0)$
(starke Anziehung $\leadsto X^{-1} = \cosh(\phi - \phi_0)$)

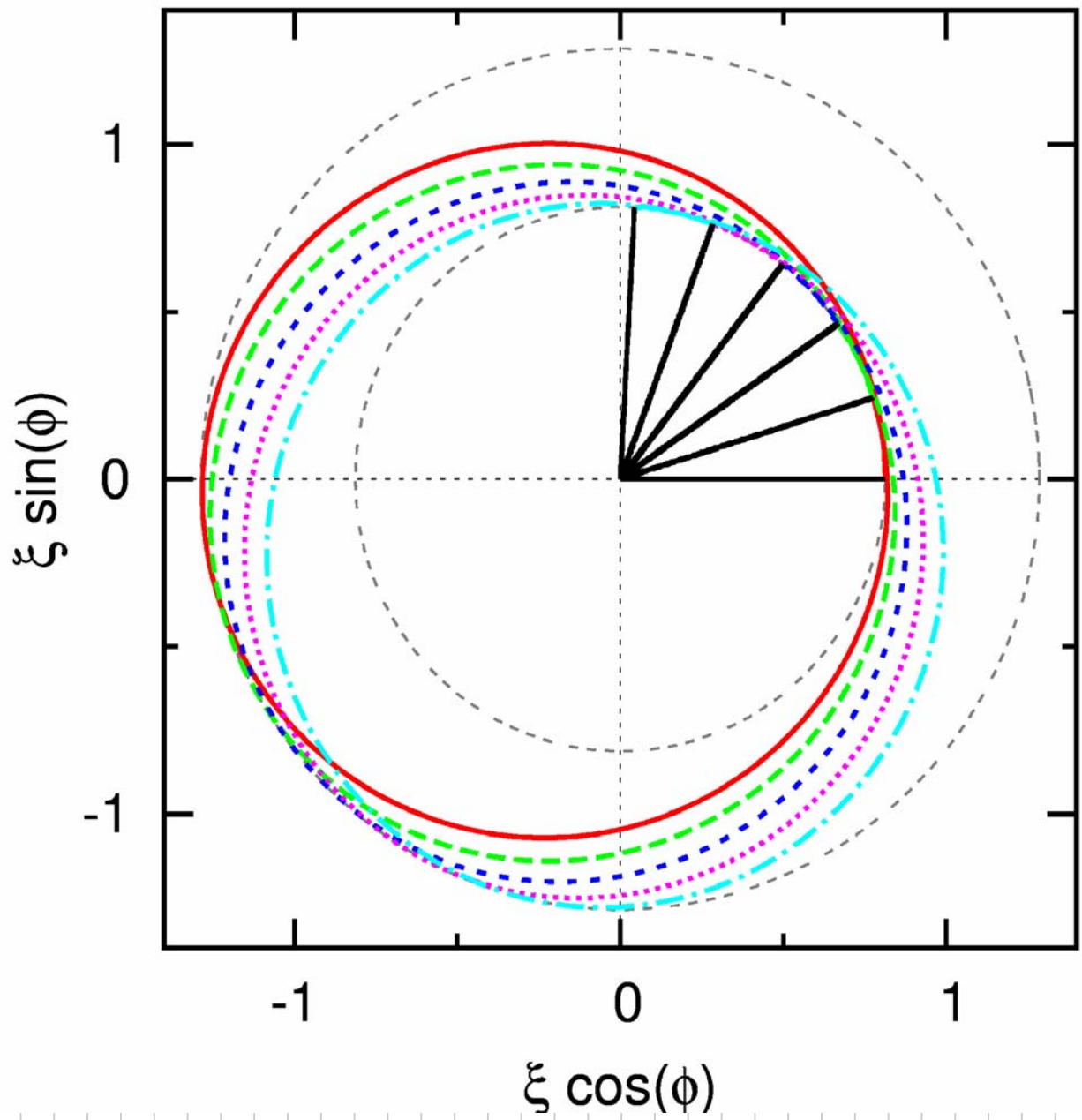
$$\leadsto \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{1-\bar{a}^2} \left\{ \eta + \epsilon \cos \left[\sqrt{1-\bar{a}^2} (\varphi - \varphi_0) \right] \right\}$$

NR limit: $\eta = 1, \bar{a} = 0$

fast Ellipse, aber mit gestreckter φ -Skala:

$$\text{Periode des Cosinus ist } \frac{2\pi}{\sqrt{1-\bar{a}^2}} > 2\pi$$

relativistische Präzession



6.4 Das Wirkungsfunktional der Felder

Im Gegensatz zu den Beiträgen der Teilchen zur Wirkung sind jetzt keine Koordinaten ausgezeichnet, es muss also über den ganzen Raum integriert

werden:
$$S_F = \int_{t_1}^{t_2} dt L_F(t) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L}_F(\vec{x}, t)$$

Die Lagrange-Dichte \mathcal{L}_F kann dabei nur von den Feldern $\vec{E}(\vec{x}, t)$, $\vec{B}(\vec{x}, t)$ bzw., äquivalent, vom 4-Potential $A^\mu(x)$ und seinen Ableitungen abhängen:
$$\mathcal{L}_F = \mathcal{L}[A^\mu, \partial^\nu A^\mu]$$

Wegen der Homogenität des Raums ist keine explizite Abhängigkeit von Koordinaten möglich.

Analog zur Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen für materielle Teilchen

(148)
$$\left[\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{q}} \cdot \delta \vec{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot \delta \dot{\vec{q}} \right) = 0 \right]$$

variieren wir auch in der klassischen Feldtheorie die Wirkung:

$$\begin{aligned}
 0 = \delta S_F &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A^\mu} \delta A^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial (\partial^\nu A^\mu)} \partial^\nu (\delta A^\mu) \right] \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A^\mu} - \partial^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial (\partial^\nu A^\mu)} \right) \right] \delta A^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial (\partial^\nu A^\mu)} \delta A^\mu \Big|_{t_1}^{t_2}
 \end{aligned}$$

Bei der Partiellen Integration bezüglich der Ortsvariablen haben wir dabei verwendet, dass die Felder im Unendlichen verschwinden (sollen).

Bei der Variation der Wirkung sind die möglichen „Bahnen“ an den Endpunkten $t=t_1$ und $t=t_2$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ festzuhalten:

$$\delta A^\mu(ct_1, \vec{x}) = 0 = \delta A^\mu(ct_2, \vec{x})$$

Mit $\delta A^\mu(ct, \vec{x})$ beliebig für $t_1 < t < t_2$ folgt:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A^\mu} - \partial^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial (\partial^\nu A^\mu)} \right) = 0$$

Euler-Lagrange-Gleichungen für A^μ

Da die Maxwell-Gleichungen **linear** in den **ersten** Ableitungen der Felder, also **linear** in den **zweiten** Ableitungen der Potentiale sind, muss \mathcal{L}_F **quadratisch** in den **ersten** Ableitungen von A^μ sein: $\mathcal{L}_F = a_{\mu\nu,\rho\sigma} (\partial^\mu A^\nu) (\partial^\rho A^\sigma)$,

wobei wir o.B.d.A. annehmen können, dass $a_{\mu\nu,\rho\sigma}$ symmetrisch ist unter Vertauschung der Index-Paare $(\mu\nu) \leftrightarrow (\rho\sigma)$.

Fordert man **Eichinvarianz** $A^\mu \rightarrow \tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$
 $\Rightarrow 0 = a_{\mu\nu,\rho\sigma} [(\partial^\mu \tilde{A}^\nu) (\partial^\rho \tilde{A}^\sigma) - (\partial^\mu A^\nu) (\partial^\rho A^\sigma)]$

$$= a_{\mu\nu,\rho\sigma} [(\partial^\mu \partial^\nu \Lambda) (\partial^\rho A^\sigma) + (\partial^\mu A^\nu) (\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda) + (\partial^\mu \partial^\nu \Lambda) (\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda)]$$

$$= a_{\mu\nu,\rho\sigma} [2 (\partial^\mu A^\nu) (\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda) + (\partial^\mu \partial^\nu \Lambda) (\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda)]$$

$\downarrow \partial^\mu A^\nu$ beliebig

$$\rightarrow a_{\mu\nu,\rho\sigma} (\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda) = 0 \quad \forall (\mu\nu)$$

Λ (fast) beliebig

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{symm in } \rho \leftrightarrow \sigma}$

$$\rightarrow a_{\mu\nu,\rho\sigma} = -a_{\mu\nu,\sigma\rho} \quad \text{Antisymmetrie } \rho \leftrightarrow \sigma$$

$$\begin{aligned} \leadsto \mathcal{L}_F &= \frac{1}{4} a_{\mu\nu,\rho\sigma} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) \\ &= \frac{1}{4} a_{\mu\nu,\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

Die Lagrangedichte \mathcal{L}_F ist also eine quadratische Funktion des Feldtensors!

Jetzt fordern wir noch **Lorentz-Invarianz der Wirkung**. Wegen der Invarianz des Volumenelements $dt d^3x \rightarrow dt' d^3x' = |\det(\Lambda^\mu_\nu)| dt d^3x = dt d^3x$ muss \mathcal{L}_F selbst Lorentz-invariant, d.h. ein **4-Tensor 4. Stufe** sein. Unabhängigkeit von Koordinaten +

Feldern $\leadsto a_{\mu\nu,\rho\sigma} = -\frac{1}{2} \epsilon \begin{vmatrix} g_{\mu\rho} & g_{\mu\sigma} \\ g_{\nu\rho} & g_{\nu\sigma} \end{vmatrix}$ ↓ metrischer Tensor

$$\begin{aligned} \leadsto \mathcal{L}_F &= -\frac{1}{8} \epsilon (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}) F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \\ &= -\frac{\epsilon}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Wie in **Aufg. 27** gezeigt, führt die Lagrange-

Dichte $\mathcal{L}_{F+WW} = -\frac{\epsilon_0}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu$

(151) tatsächlich auf die **inhomogenen Maxwell-**

Gleichungen $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 c j^\mu = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\mu$

6.4.1 Eichinvarianz der Gesamtwirkung und Ladungserhaltung

Wir untersuchen nun die Implikationen einer Eichinvarianz der Gesamtwirkung S_{M+F+W} .

Da der Materie-Anteil A^μ nicht enthält und der Feldanteil eichinvariant ist, untersuchen wir den Wechselwirkungsanteil:

$$\begin{aligned} L'_{ww} - L_{ww} &= -\frac{1}{c} \int d^3x j_\mu \partial^\mu \Lambda \\ &= -\frac{1}{c} \int d^3x (j_0 \partial^0 \Lambda + j_i \partial^i \Lambda) \\ &= \frac{1}{c} \int d^3x (\underbrace{j_0 \partial^0 \Lambda}_{= \partial^0(j_0 \Lambda) - \Lambda(\partial^0 j_0)} + j_i \partial^i \Lambda) \\ &\stackrel{PI}{=} -\frac{1}{c} \int d^3x [\partial^0(j_0 \Lambda) - \Lambda(\partial^\mu j_\mu)] \\ &= \frac{1}{c} \int d^3x \Lambda(\partial^\mu j_\mu) - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int d^3x j_0 \Lambda \end{aligned}$$

$$\leadsto S' - S = \int_{t_1}^{t_2} dt (L'_{ww} - L_{ww})$$

$$= \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \Lambda (\partial^\mu \dot{j}_\mu) + \text{Konstante}$$

Die Wirkung ist also genau dann invariant für beliebige Λ , falls $\partial^\mu \dot{j}_\mu = 0$, d.h. falls für alle Bahnen Ladungserhaltung gilt. In diesem Sinne sind **Eichinvarianz** und **Ladungserhaltung äquivalent**. // 30.1.13

6.5 Invarianten des elektromagnetischen Feldes

Interessant: Charakteristika und quantitative Eigenschaften von \vec{E} und \vec{B} , die invariant unter einer Lorentz-Transform, d.h. für alle Beobachter gleich sind.

Schon bekannter L-Skalar: Lagrange-Dichte $-\frac{\epsilon_0}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \leadsto F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{i0} + F^{ij} F_{ij} \\ &= (-E_i | E_i + E_i (-E_i) + (-\epsilon_{ijk} c B_k) (-\epsilon_{ije} c B_e) \\ &= 2c^2 \delta_{ae} B_a B_e - 2|\vec{E}|^2 = \underline{2(c|\vec{B}|^2 - |\vec{E}|^2)} \end{aligned}$$

ist Lorentz-invariant.

⇒ die Eigenschaften $c|\vec{B}| = |\vec{E}|$, $c|\vec{B}| < |\vec{E}|$ oder $c|\vec{B}| > |\vec{E}|$ gelten (für den gleichen Punkt der Raumzeit) jeweils in jedem Bezugssystem.

Weiterer Kandidat: Kontraktion mit dualem Feldstärke-Tensor $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$, wobei

$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ der vollständig antisymmetrische Tensor

4. Stufe ist: $\epsilon^{0123} = 1$, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma}$ etc.

Es gilt: $F^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu} \hat{=} \vec{E} \rightarrow c\vec{B}$, $c\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ check sign!

$$\leadsto \tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$$

Lorentz-invariant für $\Lambda \in \mathcal{L}_+^T$ ist also:

$$F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = -4 \vec{E} \cdot (c\vec{B})$$

$\tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ liefert keine weitere Invariante.

Tatsächlich ist der gefundene Satz von Invarianten

$$I_1 = |\vec{E}|^2 - c^2 |\vec{B}|^2; \quad I_2 = c \vec{E} \cdot \vec{B}$$

L-Skalar

L-Pseudoskalar

schon vollständig.

Wichtiger Spezialfall: $\vec{E} = c|\vec{B}|$, $\vec{E} \perp \vec{B}$ (Strahlung)

6.6 Energie und Impuls des elm. Feldes

Wir wollen jetzt Erhaltungsgrößen im System aus geladenen Teilchen und elm. Feldern untersuchen. Für die Materie gilt:

$$\frac{d\epsilon_M}{dt} \stackrel{\text{Ruhe- + kin. Energie}}{=} \sum_{e=1}^N q_e \vec{E}(\vec{x}_e, t) \cdot \vec{u}_e; \quad \epsilon_M = \sum_e \epsilon_e; \quad \epsilon_e = \gamma_{u_e} m_{0e} c^2$$

$$\frac{d\vec{\pi}_M}{dt} = \sum_{e=1}^N q_e [\vec{E}(\vec{x}_e, t) + \vec{u}_e \times \vec{B}_e(\vec{x}_e, t)]; \quad \vec{\pi}_M = \sum_{e=1}^N \vec{\pi}_e;$$

$$\vec{\pi}_e = \gamma_{u_e} m_{0e} \vec{u}_e$$

Mit den Ladungs- und Stromdichten

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_{e=1}^N q_e \delta(\vec{x} - \vec{x}_e); \quad \vec{j}(\vec{x}, t) = \sum_{e=1}^N q_e \vec{u}_e \delta(\vec{x} - \vec{x}_e)$$

können wir auch schreiben:

$$\frac{d\epsilon_M}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{E} \cdot \vec{j}; \quad \frac{d\vec{\pi}_M}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{f}_{\text{Lor}}$$

mit der Lorentz-Kraftdichte $\vec{f}_{\text{Lor}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$

Diese Bilanzen lassen sich ggf. auch auf einen Raum-

Bereich \mathcal{D} einschränken mit $N_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} d^3x \sum_{e=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_e)$.

Mit $\vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \frac{1}{2} \nabla (|\vec{a}|^2) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a}$ folgt:

$$-\vec{f}_{\text{Lor}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (-T^{mn}), \text{ wobei } (\vec{\nabla} \cdot T_{ij})_j = \partial_i T_{ij}$$

ist und der Maxwell'sche Spannungstensor lautet:

$$T_{ij}^{mn} = \epsilon_0 \left[E_i E_j + c^2 (B_i B_j) - \frac{1}{2} \delta_{ij} (|\vec{E}|^2 + c^2 |\vec{B}|^2) \right]$$

Insgesamt gilt in einem Gebiet D :

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{\Pi}_{m,D} + \int_D d^3x \left(\frac{1}{c^2} \vec{S} \right) \right] = - \int_{\partial D} d\vec{F} \cdot (-T^{mn})$$

Also stellt $\frac{1}{c^2} \vec{S}$ die Impulsdichte und $-T^{mn}$ die Impulsstromdichte des elektromagnetischen Feldes dar. In 4-Schreibweise gilt:

$$-\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu = -f^\mu = \partial_\nu T^{\mu\nu}; \quad T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_E & \frac{1}{c} \vec{S}^T \\ \frac{1}{c} \vec{S} & -T^{mn} \end{pmatrix}$$

$$T^{\mu\nu} = -\epsilon_0 F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_F$$

$$= \epsilon_0 \left(-F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right)$$

(157) Spannungstensor $\hat{=}$ Energie-Impuls-Tensor

6.7 Coulomb-Vielteilchenproblem und Regularisierung der „Selbstenergie“

Aus 6.4 ergibt sich für die Wirkung von N geladenen Teilchen und dem von ihnen erzeugten elektromagnetischen Feld:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt (L_m + L_{ww} + \int d^3x \mathcal{L}_F) \quad (*)$$

mit $L_m = - \sum_{e=1}^N m_{0e} c^2 \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}_e|^2}{c^2}}$; $\mathcal{L}_F = \frac{1}{2} \epsilon_0 (|\vec{E}|^2 - c^2 |\vec{B}|^2)$

$$L_{ww} = \sum_{e=1}^N q_e [\vec{v}_e \cdot \vec{A}(\vec{x}_e, t) - \Phi(\vec{x}_e, t)]$$

sowie für die Hamilton-Funktion:

$$H = \sum_{e=1}^N \sqrt{|\vec{\pi}_e|^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3x (|\vec{E}|^2 + c^2 |\vec{B}|^2) \quad (II)$$

mit $\vec{\pi}_e = \vec{p}_e - q_e \vec{A}(\vec{x}_e, t) = \gamma_{v_e} m_{0e} \vec{v}_e$

Problem: die Ausdrücke (*) und (II) sind (für punktförmige Teilchen) jeweils divergent!

(158) $(\int d^3x |\vec{E}|^2 = +\infty$ für jede Umgebung einer Punktladung)

Ansatz: • wähle Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

• zerlege $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ in Summe von rotations- und divergenzfreien Anteilen

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &= -\vec{\nabla} \phi & \vec{E}_{\perp} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}_{\parallel} &= \vec{0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\perp} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int d^3x |\vec{E}|^2 &= \int d^3x [|\vec{E}_{\perp}|^2 - 2(\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{E}_{\perp} + (\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \phi)] \\ &= \int d^3x [|\vec{E}_{\perp}|^2 - 2\phi \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\perp})}_{=0} - \phi \Delta \phi] \\ &= \int d^3x [|\vec{E}_{\perp}|^2 + \frac{1}{\epsilon_0} \rho \phi] \\ &= \int d^3x |\vec{E}_{\perp}|^2 + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{e=1}^N q_e \phi(\vec{x}_e, t) \end{aligned}$$

mit $\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{m=1}^N \frac{q_m}{|\vec{x} - \vec{x}_m(t)|}$ (A)

In der Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} H &= \sum_{e=1}^N \sqrt{(\hbar \vec{\pi}_e)^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4} + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N q_e \phi(\vec{x}_e, t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3x \left[\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 + c^2 |\vec{\nabla} \times \vec{A}|^2 \right] \quad (B) \end{aligned}$$

entspricht die Divergenz gerade dem Term $\rho = m$, d.h. Selbstenergie - Beiträgen der

Form
$$S_e = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q_e^2}{|\vec{x}_e - \vec{x}_e|}$$

Da die Selbstenergie endlich sein muss (Paarerzeugung), ist sie durch eine Konstante zu ersetzen, die wir 0 wählen können:

$$H = \sum_{e=1}^N \sqrt{|\vec{\pi}_e|^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{e \neq m} \frac{q_e q_m}{|\vec{x}_e - \vec{x}_m|} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3x \left[\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 + c^2 |\vec{\nabla} \times \vec{A}|^2 \right]$$

„regularisierte“ Hamilton-Funktion

Analog:
$$L_{ww} = \sum_{e=1}^N q_e \vec{v}_e \cdot \vec{A}(\vec{x}_e, t) - \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{e \neq m} \frac{q_e q_m}{|\vec{x}_e - \vec{x}_m|}$$

$$\mathcal{L}_F = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3x (|\vec{E}_\perp|^2 - c^2 |\vec{B}|^2)$$

regularisierte Wirkung

7 Elektrodynamik in Materie und optische Leitfähigkeit

7.1 Maxwell-Gleichungen „in Materie“

Bisher haben wir die mikroskopischen *Maxwell-Gleichungen* im Vakuum betrachtet (SI-Einheiten):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{j} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Die inhomogenen Mbs lassen sich verallgemeinern:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j},$$

wobei der Vakuum-Fall für $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$ reproduziert wird.

Wenn man „freie“ (explizit zu beschreibende) Ladungen und Ströme von (in Materie) induzierten unter-

scheiden will, kann man auch schreiben:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{frei}} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{frei}}$$

mit den Materialgleichungen

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M},$$

in der die Polarisation \vec{P} und die Magnetisierung \vec{M} als zunächst unbekannte externe Felder auftreten.

Einfachste **Approximation**: homogenes, isotropes und lineares Medium mit instantaner, rein lokaler Antwort:

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}(\vec{x}, t), \quad \vec{H}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}(\vec{x}, t)$$

↪ Theorie innerhalb des Mediums qualitativ wie im Vakuum, aber z.B. Brechung an Grenzflächen.

7.2 Optische Leitfähigkeit: Definition und Zusammenhang mit dielektrischer Funktion

Äußere elektrische Felder führen in Materie i.A. zur Umverteilung von Ladungen und induzieren Ströme. Falls das ungestörte System zeitunabhängig und die Störung (d.h. \vec{E}) genügend klein ist, gilt in *linearer Antworttheorie*:

$$j_i(\vec{x}, t) = \sum_j \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \sigma_{ij}(\vec{x}, \vec{x}', t-t') E_j(\vec{x}', t')$$

Hier und im Folgenden vernachlässigen wir Magnetfelder und Magnetisierungen.

Falls das System *homogen* ist oberhalb einer Längenskala a gilt für genügend große Wellenlängen:

$$\sigma(\vec{x}, \vec{x}', t-t') \approx \sigma(\vec{x}-\vec{x}', t-t')$$

Wir können also Fourier-transformieren:

$$j_i(\vec{q}, \omega) = \sigma_{ij}(\vec{q}, \omega) E_j(\vec{q}, \omega)$$

Da Photonen eine viel steilere Dispersion $v_{\omega} = c/|\vec{q}|$ als Elektronen haben, gilt für optische und niedrigere Frequenzen: $\vec{q} \approx \vec{0}$

Die zugehörige Antwortfunktion $\sigma_{ij}(\omega)$ nennt man optische Leitfähigkeit.

Für Materialien mit kubischer Symmetrie ist

diese isotrop: $\vec{j}(\omega) = \sigma(\omega) \vec{E}(\omega)$

Unter den gleichen Voraussetzungen gilt für die Elektrische Verschiebung: $\vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega)$, wobei die dielektrische Funktion die Form

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{i\sigma(\omega)}{\omega}$$

hat. Offensichtlich sind $\sigma(\omega)$ und $\epsilon(\omega)$ i. A. beide komplex. Weil $\vec{j}(\vec{x}, t)$, $\vec{E}(\vec{x}, t)$ und $\vec{D}(\vec{x}, t)$ reell sind, gilt: $\sigma^*(\omega) = \sigma(-\omega)$; $\epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega)$

7.3 Leitfähigkeit und Reflektivität

Am direktesten lassen sich optische Eigenschaften von Materialien in Transmissionsexperimenten bestimmen, bei denen Absorption und Phasenverschiebung gemessen werden. Dabei gilt:

$$\epsilon_{\text{Medium}}(\omega) = \frac{c}{n(\omega)}; \quad I(d, \omega) \propto e^{-d k(\omega)},$$

↑ Intensität nach Dicke d

wo bei der Brechungsindex $n(\omega)$ und der Absorptionskoeffizient $k(\omega)$ Real- und Imaginärteil der komplexen Größe $\kappa(\omega)$ sind, mit

$$\kappa(\omega) = n(\omega) + i k(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$$

Dabei sind $\sigma(\omega)$, $\epsilon(\omega)$ und $\kappa(\omega)$ analytische Funktionen in der oberen Halbebene, erfüllen also Kramers-Kronig-Relationen wie z.B.

$$\text{Re } \sigma(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im } \sigma(\omega')}{\omega' - \omega}$$

$$\text{Im } \sigma(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Re } \sigma(\omega')}{\omega' - \omega}$$

↑ Hauptwert

Falls keine hinreichend (dünnen und) transparenten Proben hergestellt werden können, sind Reflexionsmessungen hilfreich. Bei senkrechtem Einfall gilt für die Reflektivität

$$r(\omega) = \left| \frac{1 - \kappa(\omega)}{1 + \kappa(\omega)} \right| = \frac{(1 - n(\omega))^2 + k^2(\omega)}{(1 + n(\omega))^2 + k^2(\omega)}$$

Nur eine Messung über hinreichend große Frequenzbereiche erlaubt mit Kramers-Kronig-Analyse die Bestimmung von $\kappa(\omega) \rightarrow \epsilon(\omega) \sim \nu(\omega)$

Verfeinerung: Reflexion bei Winkel θ .

Eine weitere experimentelle Methode ist die Messung des Energieverlusts von Elektronen, die durch dünne Schichten geschossen werden (EELS).

Die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust $\hbar\omega$ ist dabei proportional zu $\text{Im} \left(\frac{1}{\epsilon(\omega)} \right)$

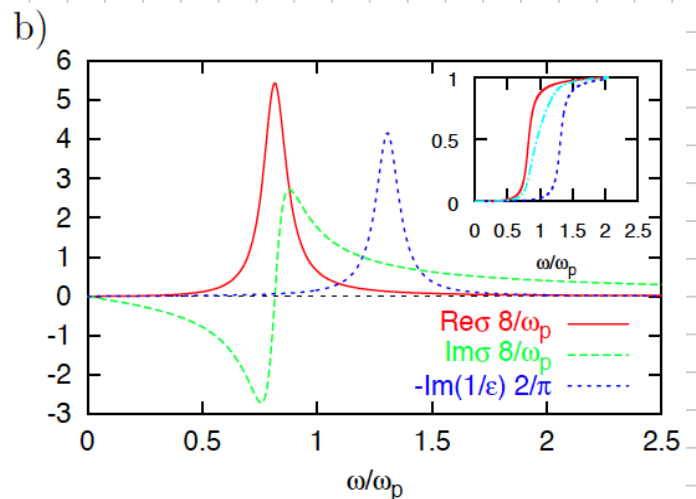
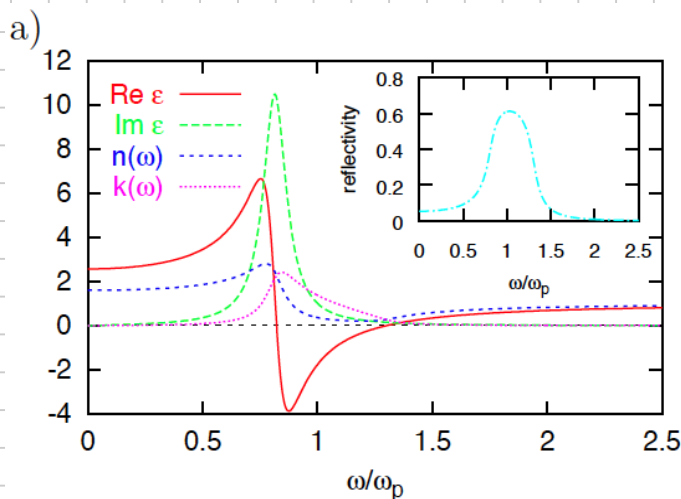
↑
Maximum für $\text{Re} \epsilon(\omega) \neq 0$

7.4 Lorentz-Oszillator-Modell

Die optischen Eigenschaften von Materialien sind eng mit ihren Anregungen verknüpft. Speziell sind $\text{Re } \epsilon(\omega)$ und damit auch $\text{Im } \epsilon(\omega)$ nur in Frequenzbereichen von 0 verschieden, die **inneren Anregungsenergien** entsprechen.

Zur Illustration betrachten wir das Lorentz-Oszillator-Modell mit einer einzigen Anregung bei der Frequenz ω_0 , die mit der Stärke γ gedämpft ist. Es gilt:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{e^2}{m} \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}$$



7.5 Optische f-Summen-Regeln und Aluminium

Wenn/da in Festkörpern das Anregungsspektrum begrenzt ist, gilt das auch für die „spektralen“ optischen Größen, z.B.: $\text{Re } \sigma(\omega) = 0$ für $|\omega| > \omega_{\text{max}}$

Daraus ergibt sich die sogenannten **f-Summen-**

Regeln:
$$\int_0^{\infty} d\omega \text{Re } \sigma(\omega) = \frac{\omega_p^2}{8}$$

ab hier nur für cgs-Einh. geprüft

$$\int_0^{\infty} d\omega \omega \text{Re } \epsilon(\omega) = \frac{\pi}{4} \omega_p^2$$

$$\int_0^{\infty} d\omega \omega \text{Im } \frac{-1}{\epsilon(\omega)} = \frac{\pi}{2} \omega_p^2$$

und andererseits, dass die jeweils durch eine Kramers-Kronig-Transformierte verbundenen Größen jeweils wie $\frac{1}{\omega}$ abfallen: $\text{Im } \sigma(\omega) \xrightarrow{|\omega| \rightarrow \infty} -\frac{\omega_p^2}{4\pi\omega}$

Da die Elektronen asymptotisch frei sind, kann ω_p nur von ihrer Dichte abhängen:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}$$

(168)

Umgekehrt kann man über Teilsummen die in einem bestimmten Frequenzbereich effektiv freien Elektronen identifizieren.

Beispiel Aluminium:

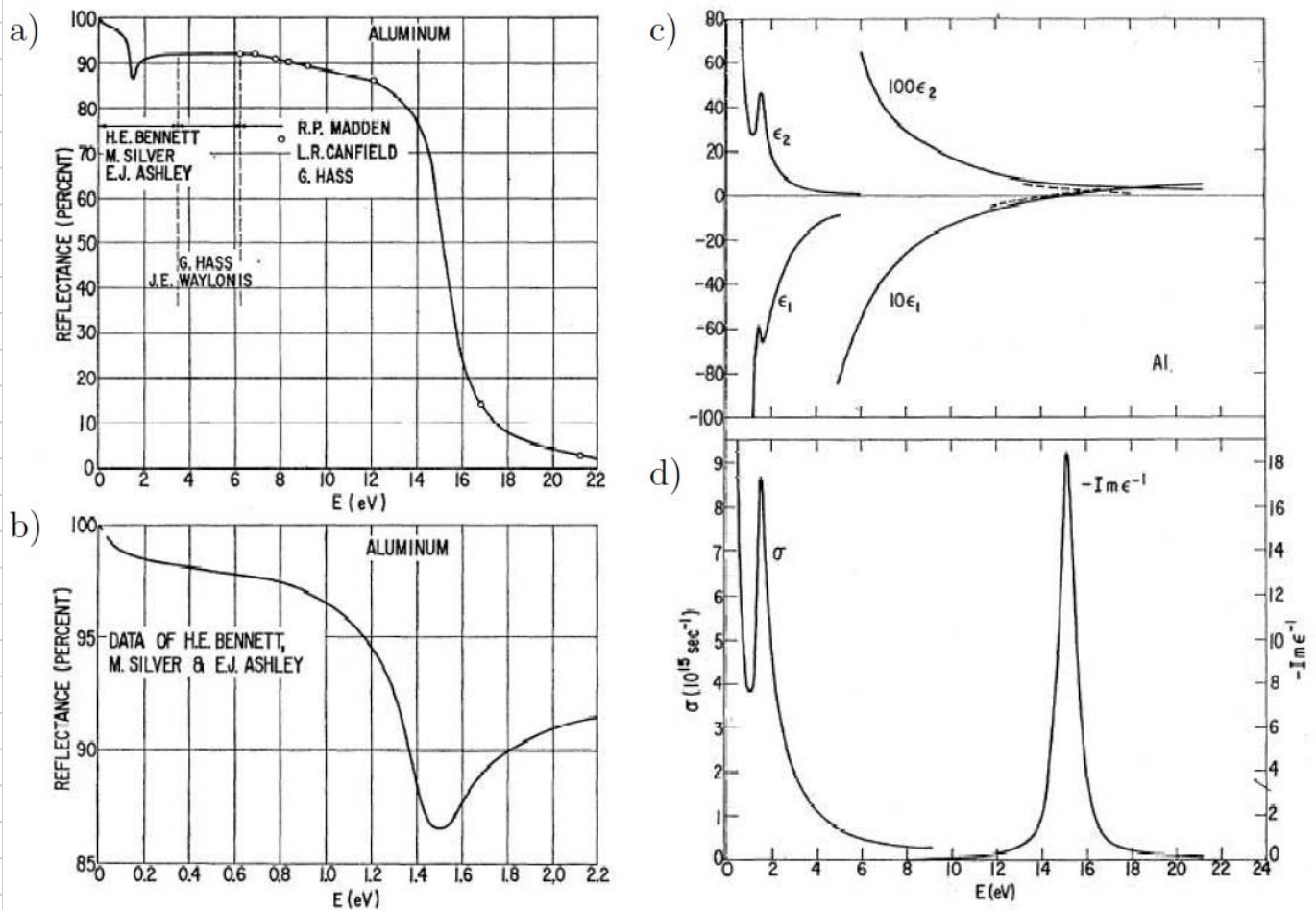


Figure 4.2: Low-energy optical properties of aluminum: a)+b) measured specular reflectivity; c) corresponding dielectric function $\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega)$. d) Optical conductivity $\sigma(\omega)$ and loss function $-\text{Im} \epsilon^{-1}(\omega)$ (Ehrenreich et al., 1963).

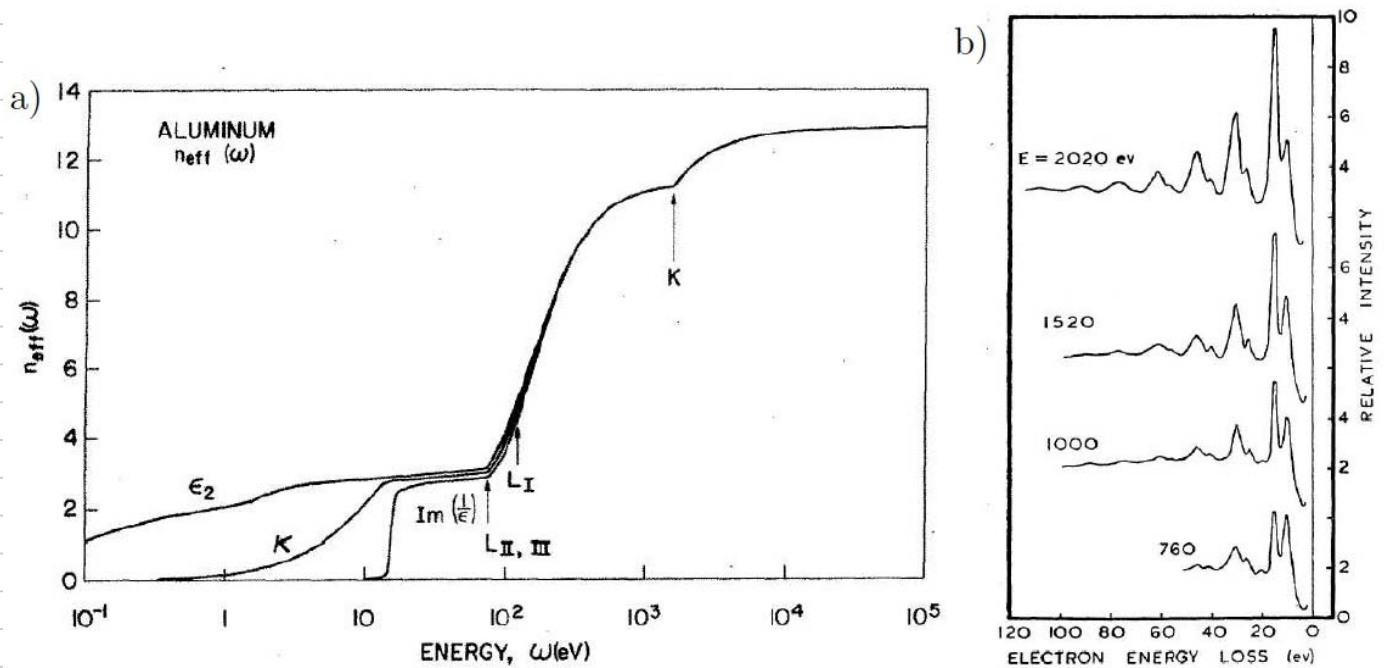


Figure 4.3: Optical properties of aluminum: a) Effective number of valence electrons defined via partial sum rules (Smith and Shiles, 1978). b) Experimental electron energy loss spectrum (reflection mode) with different incident electron energies E (Powell and Swan, 1959).

Siehe: „Mott-Hubbard Metal-Insulator Transition and Optical Conductivity in High Dimensions“,
 N. Blümer, Dissertation, Univ. Augsburg (2002)

<http://komet337.physik.uni-mainz.de/Bluemer/thesis>

6.2.13

Diese Notizen zur Vorlesung "Theoretische Physik 5: Klassische Feldtheorie" (Prof. Dr. Nils Blümer, Universität Mainz, WS 2012/13) dürfen ohne Genehmigung in keiner Form weiterverbreitet werden. Weitere Informationen zur Vorlesung:

http://komet337.physik.uni-mainz.de/Bluemer/lectures_WS2012

Kommentare/Korrekturen bitte an Nils Blümer, <mailto:Nils.Bluemer@uni-mainz.de>