

**Aufgabe 5. Gitterebenen** (6 Punkte)

Sei  $\mathbf{m} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3 \neq \mathbf{0}$  ein Vektor eines dreidimensionalen direkten Gitters  $\Lambda$  und  $\mathbf{g} = \gamma_1 \mathbf{b}_1 + \gamma_2 \mathbf{b}_2 + \gamma_3 \mathbf{b}_3 \neq \mathbf{0}$  ein Vektor des entsprechenden reziproken Gitters  $\bar{\Lambda}$ .

(a) Zeigen Sie, dass

$$E_{\mathbf{g},p} \equiv \left\{ \mathbf{m}' \mid \mathbf{g} \cdot \mathbf{m}' = 2\pi p \quad , \quad p \equiv \sum_{l=1}^3 \gamma_l \mu_l \right\}$$

einer  $\Lambda$ -Ebene darstellt, d. h. dass  $E_{\mathbf{g},p}$  unendlich viele Punkte  $\mathbf{m}'$  enthält, wobei die Relativvektoren  $\{\mathbf{m}' - \mathbf{m}\}$  ein zweidimensionales Bravais-Gitter bilden. Was ist der Abstand von  $E_{\mathbf{g},p}$  zum Ursprung?

(b) Zeigen Sie unter der Annahme  $\text{ggT}\{\gamma_l\} = 1$ , dass es zu jedem Punkt  $\mathbf{m} \in \Lambda$  mit  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{m} = 2\pi p$  einen Punkt  $\mathbf{m}'' \in \Lambda$  mit  $\frac{1}{2\pi} \mathbf{g} \cdot \mathbf{m}'' = p+1$  (und somit auch eine ganze  $\Lambda$ -Ebene  $E_{\mathbf{g},p+1}$ ) gibt. Warum sind die Ebenen  $E_{\mathbf{g},p}$  und  $E_{\mathbf{g},p+1}$  parallel? Was ist der Abstand zwischen diesen beiden Ebenen?

**Aufgabe 6. Lineare Kette mit starren Randbedingungen** (4 Punkte)

Betrachten Sie eine lineare Kette aus  $N + 1$  Atomen der Masse  $M$ , die durch gleiche Federn (Federkonstante  $k$ ) gekoppelt sind und im (entspannten) Gleichgewichtszustand den Abstand der Gitterkonstanten  $a$  haben, mit starren Randbedingungen, d.h. die Auslenkungen  $u_n$  des  $n$ -ten Atoms müssen die Randbedingung  $u_0 = u_N = 0$  erfüllen ( $N + 1$  Atome, wovon aber nur die Atome  $1, \dots, N - 1$  schwingen können, während die Atome  $0$  und  $N$  festgehalten werden). Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie diese mit dem Ansatz

$$u_n = A \sin(nqa) e^{i\omega t}$$

Bestimmen Sie die Dispersionsrelation  $\omega(q)$ . Welche  $q$ -Werte sind erlaubt?