Aufgabenblatt 06, Abgabe: 14. 12. 2010

Aufgabe 10. Phononenzustandsdichte für das Quadratgitter (20 Punkte)

In Aufgabe 8 wurde die Dispersionsrelation für Phononen auf dem Quadratgitter mit einem Atom pro Elementarzelle zu $\omega(\mathbf{q}) = 2\sqrt{\frac{k}{M}}\left[\sin^2(\frac{1}{2}q_1 a) + \sin^2(\frac{1}{2}q_2 a)\right]^{1/2}$ bestimmt.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 9 (a), dass man die Zustandsdichte dieser Phononen daher als $n(\omega) = \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{M}{k}}\bar{n}(\bar{\omega})$ mit $\bar{\omega} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}\omega$ schreiben kann, wobei $\bar{n}(\bar{\omega})$ und $\bar{\omega}$ nun *dimensionslos* sind und $\bar{n}(\bar{\omega})$ durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\bar{n}(\bar{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} dq_1 \int_{-\pi}^{\pi} dq_2\, \delta\left(\bar{\omega} - \sqrt{\sin^2\left(\tfrac{1}{2}q_1\right) + \sin^2\left(\tfrac{1}{2}q_2\right)}\right) \quad . \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Höchstfrequenz für das Quadratgitter $\bar{\omega}_{max} = \sqrt{2}$ $(= \sqrt{d})$. Bestimmen Sie das Verhalten von $\bar{n}(\bar{\omega})$ nahe $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{max}$. **Zusatzaufgabe:** Führen Sie diese Analyse für ein hyperkubisches Gitter in allgemeiner Dimension d durch.

(c) Berechnen Sie $\bar{n}(\bar{\omega})$ numerisch für $0 \leq \bar{\omega} \leq \sqrt{2}$. [**Hinweis:** aus Symmetriegründen können Sie den Ausdruck (1) auf ein Integral über das Dreieck $0 \leq q_1 \leq \pi$, $0 \leq q_2 \leq q_1$ zurückführen.]

(d) Beschreiben Sie das Verhalten von $\bar{n}(\bar{\omega})$ nahe $\bar{\omega} = 1$. **Zusatzaufgabe:** Leiten Sie dieses Verhalten analytisch her.