Klassische Feldtheorie

Nils Blümer

Notiztitel 13.01.2013

4 Spezielle Relativitätstheorie

4.1 Grundlagen der SRT

Schnelldurchgang anhand von Theorie-1-Skript:

Postulate, Relativität Gleichzeitigkeit, Zeitdilatation, Lorentz-Kontraktion, Lorentz-Transformation, inv. Abstand, Lichtkegel, Eigenzeit, 4-Schreibweise, metrischer Tensor, Bedingung an LT, Lorentz-Boost, Trafo von Geschwindigkeiten und Winkeln, Aberration // 12.12.12

4.2 4-Vektoren

Jede (4-komponentige) Größe $a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)$, die genau so wie der 4-Ortsvektor x^μ transformiert wird

$$(a')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, a^\nu$$

heisst kontravarianter 4-Vektor; jede Größe a_μ, die gemäß $(a')_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu a_\nu$; $\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma g^{\sigma\nu}$

transformiert wird, heisst kovarianter 4-Vektor.
Umwandlung mit metrischem Tensor:

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \,;\, a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu.$$

Das Quadrat eines 4-Vektors $a^2 \equiv a_\mu a^\mu$ ist ein Lorentz-Skalar, d.h. invariant unter Lorentz-Trafos ebenso wie das allgemeine Skalarprodukt (hier nicht positiv definit!) $a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu$

Falls $\varphi(x)$ ein Skalar ist, dann ist der 4-Gradient

$\partial_\mu \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \vec{\nabla}\varphi\right)$ ein kovarianter 4-Vektor.

Dagegen ist die 4-Divergenz $\partial \cdot a \equiv \partial^\mu a_\mu = \partial_\mu a^\mu$
$= \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\mu}$ ein Lorentz-Skalar.

Wir definieren die 4-Geschwindigkeit dimensionslos als

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds} \;;\; ds = \frac{c\,dt}{\gamma} = c\,d\tau$$

(4-Vektor: dx^μ; Skalar: ds)

Offensichtlich ist u^μ 4-Vektor, im Gegensatz zu $\frac{dx^\mu}{dt}$.

Achtung: in Literatur auch $u^\mu = dx^\mu / d\tau$ gebräuchlich.

Explizite Form: $u^\mu = \frac{\gamma}{c}\frac{d}{dt}(ct, \vec{x}) = \gamma_u (1, \vec{\beta}_u)$

Beachte: $u^2 = \gamma_u^2 (1 - \beta_u^2) = 1$

Auch 4-Vektor: 4-Beschleunigung $\frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}$;
steht senkrecht auf 4-Geschwindigkeit

Anwendungen: a) Ladung/Strom

Experimentelles Faktum: elektrische Ladung ist L-Skalar.
Längen/Volumenkontraktion $\Rightarrow$ Ladungsdichte wird für $\vec{v}_{rel}(K', K) = \vec{u}$ als $\rho = \gamma_u \rho_0$ transformiert, falls die Ladung in K' ruht. Zusätzlich misst man in K auch eine Stromdichte $\vec{j} = \rho \vec{u} = \gamma_u \rho_0 \vec{u}$. Zusammen $\leadsto$ 4-Stromdichte $j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j}) = \rho_0 c \gamma_u (1, \vec{\beta}_u) = \rho_0 c u^\mu$, die als 4-Vektor transformiert wird.

Kontinuitätsgleichung: $0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = \partial_\mu j^\mu$ (L-Skalar)

b) Elektromagnetische Potentiale

Aus den Maxwell-Gleichungen lässt sich ableiten (siehe Ü 36): $\frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\mu = \underbrace{\Box A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu)}$ mit 4-Potential $A^\mu = (\phi, c\vec{A})$; muss 4-Vektor sein: dies gilt, wenn/da A^μ als 4-Vektor transformiert wird.

Lorentz-Eichung $\partial_\nu A^\nu = 0 \leadsto \boxed{\Box A^\mu = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\mu}$

(inhomogene Wellengleichung).

In Vorlesung verschoben

Hom. Lösung: Ebene Wellen $A^\mu(x) = A_0^\mu e^{-ik_\nu x^\nu}$ mit

4-Wellenvektor $k^\nu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$; $\omega = \frac{|k|}{c}$ $(\Rightarrow k^2 = 0)$

Beachte: die Phase $\varphi(x) = k_\nu x^\nu$ ist Lorentz-Skalar.

$$\partial_\rho A^\mu = -i k_\rho A^\mu \Rightarrow \Box A^\mu = \partial^\rho \partial_\rho A^\mu = -k_\rho k^\rho A^\mu \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow k^2 = 0 \Leftrightarrow k^\rho = (\omega/c, \vec{k})\,;\ \omega = \frac{k}{c}$$

$$0 \overset{!}{=} \partial_\mu A^\mu = -k_\mu A^\mu \Rightarrow 0 = \omega \phi_0 - \vec{k}\cdot\vec{A}_0$$

Explizit lautet die Trafo für den 4-Wellenvektor $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$ mit $k_\parallel = \vec{k}\cdot\hat{\beta} = k\cos(\vartheta)$;

$$\vec{k}_\perp = \vec{k} - k_\parallel \hat{\beta} = k\,\hat{k}_\perp \sin(\vartheta):$$

$$\begin{pmatrix} \omega'/c \\ \vec{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{k}_\perp \end{pmatrix} + \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\vec{\beta} & \hat{\beta} \end{pmatrix}}_{2\times 4\text{-Matrix}} \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_\parallel \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\omega' = \gamma(\omega - \beta c k_\parallel) = \gamma\omega[1 - \beta\cos(\vartheta)]}$$

Relativistischer Doppler-Effekt

Spezialfälle: (i) longitudinaler Doppler-Effekt

$$\omega' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\omega \quad (\vartheta = 0); \qquad \omega' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega \quad (\vartheta = \pi)$$

(ii) transversaler Doppler-Effekt $\omega = \frac{\omega'}{\gamma} < \omega'$ $(\vartheta = \frac{\pi}{2})$

z. B. K' Ruhesystem eines Sterns   Beobachter-System

$\rightarrow$ Rotverschiebung

Transformationsgesetz für Winkel:

$$\tan(\vartheta') = \frac{|\vec{k}_\perp'|}{k_\parallel'} = \frac{|\vec{k}_\perp|}{\gamma(k_\parallel - \beta\frac{\omega}{c})} = \frac{\sin(\vartheta)}{\gamma[\cos(\vartheta)-\beta]}$$

4.3 Masse und Energie

Betrachten wir ein Teilchen mit Ruhemasse m_0 und 4-Geschwindigkeit u^μ. Offensichtlich ist $p^\mu \equiv m_0 c u^\mu$ ein 4-Vektor. Für die Ortskomponenten gilt:

$$p^i = m_0 c \gamma \beta^i = m_0 \gamma \frac{dx^i}{dt} \xrightarrow{|\vec{u}|\to 0} m_0 \frac{dx^i}{dt}$$

$\rightsquigarrow$ relativistischer Impuls $\vec{p} = m_u \vec{u}$ mit $m_u = \gamma_u m_0$

Bedeutung der Zeitkomponente p^0?

$$p_\mu p^\mu = m_0^2 c^2 \underbrace{u_\mu u^\mu}_{=1} = m_0^2 c^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\gamma m_0 c}{\overset{\shortparallel}{p^0}} = \sqrt{m_0^2 c^2 + |\vec{p}|^2} = m_0 c \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{p}}{m_0 c}\right)^2}$$

$$= m_0 c \left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{2(m_0 c)^2} + \mathcal{O}(c^{-4})\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\gamma_u m_0 c^2 = m c^2}{\overset{\shortparallel}{c p^0}} = m_0 c^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_0} + \mathcal{O}(c^{-2})$$

↑ nichtrel. kinetische Energie

Daher ist $\mathcal{E} = c p^0$ die Energie des Teilchens; die Ruheenergie $m_0 c^2$ kann prinzipiell durch Zerstrahlung freigesetzt werden.

Also: 4-Impuls $p^\mu = \left(\frac{\varepsilon}{c}, m\vec{u}\right)$; $m \equiv m_u = m_0\gamma_u$

Quantenmechanik: Licht wird in Form von Photonen ausgesendet mit Energie $\varepsilon = \hbar\omega$. Es gilt dann:

$$p^\mu = \hbar k^\mu \qquad (\text{für } m_0 = 0).$$

4.4 Die Lorentz-Kraft und elektromagnetische Felder

Das Dyadische Produkt $D^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu$ von kontravarianten 4-Vektoren a^μ, b^μ wird wie folgt transformiert:

$$(D')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma a^\rho b^\sigma = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma D^{\rho\sigma}$$
$$\left(= (a')^\mu (b')^\nu\right)$$

Die Dyaden $\left\{\begin{matrix} D^{\mu\nu} (= a^\mu b^\nu) \\ D_{\mu\nu} (= a_\mu b_\nu) \\ D_\mu{}^\nu (= a_\mu b^\nu) \\ D^\mu{}_\nu (= a^\mu b_\nu) \end{matrix}\right\}$ heissen $\left\{\begin{matrix} \text{kontravariant} \\ \text{kovariant} \\ \text{gemischt} \\ \text{"} \end{matrix}\right\}$

Sie können mit dem metrischen Tensor ineinander überführt werden: $D_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} D^{\rho\sigma}$ etc.

Jede Größe $T^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu \in \{0,1,2,3\}$), die wie $D^{\mu\nu}$ transformiert wird, heisst kontravarianter Tensor 2. Stufe.

Analog: • kovariante und gemischte Tensoren
• Tensoren anderer Stufen.

Beachte: • 4-Vektoren sind Tensoren 1. Stufe,
• 4-Skalare sind Tensoren 0. Stufe

Die Bildung von Skalarprodukten führt zur Verjüngung der Tensoren. So sind z.B.

$$d^\mu = D^{\mu\nu} c_\nu = a^\mu b^\nu c_\nu \quad \text{und} \quad t^\mu = T^{\mu\nu} c_\nu$$

jeweils (kontravariante) 4-Vektoren.

Folglich ist der elektromagnetische Feldtensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

ein antisymmetrischer kontravarianter Tensor 2. Stufe

mit $$(F')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}$$

Mit $F^{\mu\mu} = 0$, $F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = \left[-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right]_i = E_i$

und $F^{ij} = \varepsilon_{ijk}(-c B_k)$ (wegen $B_k = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i A^j / c$)

folgt komponentenweise:

$$\boxed{F^{\mu\nu} \left(= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Damit kann man direkt das Verhalten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unter Raumspiegelungen ableiten:

$$F^{\mu\nu} \xrightarrow{\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}} (F')^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ -E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ -E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(= F_{\mu\nu})$$

d.h. $\vec{B} \to \vec{B}$ (Pseudovektor), $\vec{E} \to -\vec{E}$ (echter Vektor)

// 17.12.12