

3 Elektro- und Magnetostatik

Wir betrachten die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen (in SI-Einheiten)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0}_{= \frac{1}{c^2}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

(Einheitencheck: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow [\vec{E}] = [c][\vec{B}]$)

im statischen Limes $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$. Dieser ist zum einen gerechtfertigt, falls eine lokalisierte, langsam veränderliche Ladungs + Stromverteilung betrachtet wird und äußere Felder bzw. Strahlung abgeschirmt werden, andererseits für zeitliche Mittelwerte von Feldern: so gilt wegen der Linearität der MG z.B.: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Für betragsmäßig beschränkte Felder gilt

$$\begin{aligned}
 \text{weiterhin: } \left| \overline{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}(\vec{x}) \right| &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t, \vec{x}) \right| \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \vec{B}(T, \vec{x}) - \vec{B}(0, \vec{x}) \right| \\
 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2 B_{\max}(\vec{x})}{T} = 0
 \end{aligned}$$

Im statischen Grenzfall entkoppeln elektrische und magnetische Felder:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}); & \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) &= \vec{0} \\
 \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) &= \mu_0 \vec{j}(\vec{x}); & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

Die elektrischen und magnetischen Felder können dann separat bestimmt werden. Dabei hilft der

Satz von Helmholtz: ein Feld $\vec{f}(\vec{x})$, das stetig differenzierbar ist und im Unendlichen schneller als $\frac{1}{r}$ gegen 0 geht, lässt sich in folgender Form darstellen:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \underbrace{-\vec{\nabla} a(\vec{x})}_{\text{wirbelfrei}} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{b}(\vec{x})}_{\text{quellenfrei}}$$

Daraus folgt für das (statische) elektrische Feld:
 $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \quad (\leadsto \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0)$
und die Bestimmungsgleichung

$$\Delta\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{x}) \quad (*)$$

Für das magnetische Feld folgt zunächst
 $\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x}) \quad (\leadsto \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0)$
mit der Bestimmungsgleichung

$$\mu_0\vec{j} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

Wählen wir zusätzlich die Coulomb-Eichung
 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$, so erhalten wir:

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\vec{j}(\vec{r}) \quad (\Delta)$$

Für jede Komponente A_i ist die Bestimmungsgleichung Δ also identisch zu $*$ mit den Ersetzungen $\phi \rightarrow A_i$, $\frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0 j_i$. Unterschiede
(37) ergeben sich erst auf der Ebene von \vec{E} und \vec{B} .

3.1 Elektrostatik

Die Grundaufgabe der Elektrostatik, die Bestimmung des elektrischen Feldes für eine geg. Ladungsverteilung und geg. Randbedingungen, entspricht mit $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{x})$ offensichtlich der Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$

Wegen ihrer **Linearität** gilt für Ladungsverteilungen

$\rho(\vec{x}) = \rho_1(\vec{x}) + \rho_2(\vec{x})$, dass sich (bei geeigneten RBs)

die Gesamtlösung additiv aus den Teillösungen

zusammensetzt: $\Delta \phi_{1/2}(\vec{x}) = -\frac{\rho_{1/2}(\vec{x})}{\epsilon_0} \Rightarrow \Delta \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$

für $\phi(\vec{x}) = \phi_1(\vec{x}) + \phi_2(\vec{x})$

Zusätzlich lässt sich noch eine Lösung der homogenen Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)

$$\Delta \phi_{\text{hom}}(\vec{x}) = 0 \quad \text{addieren.}$$

Strategie: löse zuerst ein Standardproblem; konstruiere aus dieser Standardlösung die allg. Lösung.

③⑧ Lege dabei die RB eindeutig fest.

3.1.1 Lösung für natürliche Randbedingungen

Wir betrachten zunächst den ganzen Raum und fordern für die Lösung $\phi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$

Unter diesen Bedingungen ist die (zweimal stetig diffbare) Lösung der Laplace-Gleichung eindeutig: $\phi_{\text{hom}}(\vec{x}) \equiv 0$

Beweis durch Mittelwertsatz von Gauß (s.u.):

Lösungen der Laplace-Gleichung nehmen alle Extrema auf dem Rand eines beschränkten Volumens an.

Falls $\phi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$, existiert für

jedes $\varepsilon > 0$ ein R_ε so dass $|\phi(\vec{x})| < \varepsilon$ für $|\vec{x}| > R_\varepsilon$

Wähle z.B. Kugel $V = \{\vec{x}; |\vec{x}| \leq R_\varepsilon\} \rightarrow |\phi(\vec{x})| < \varepsilon$

(Widerspruchsbeweis über Taylorentwicklung um angenommenes Extremum im Inneren)

$$\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_0)^T \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) (\vec{x} - \vec{x}_0) + \mathcal{O}(|\vec{x} - \vec{x}_0|^3)$$

nicht scharf genug)

(39) Also ist auch die Lösung der Poisson-

Gleichung mit natürlichen RB eindeutig:
 aus $\phi_1 \neq \phi_2$ Lösung Poisson-Gleichung folgt
 $\phi_1 - \phi_2 \neq 0$ Lösung Laplace-Gleichung \Downarrow

Als Standardproblem wählen wir das Feld
 einer punktförmigen Quelle bei \vec{x}' :

$$\Delta_{\vec{x}} G(\vec{x}; \vec{x}') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

↑
Parameter

Behauptung: $G(\vec{x}; \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$

Beweis I: (i) $G(\vec{x}; \vec{x}') \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$ RB o.k. ✓

(ii) für $\vec{x} \neq \vec{x}'$ muss gelten:

$$0 = \Delta_{\vec{x}} G(\vec{x}; \vec{x}') = \Delta_{\vec{r}} G(\vec{x}; \vec{x}')$$

mit $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$

$$\Delta_r h(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r h(r))$$

$$\Rightarrow \Delta_r G(\vec{x}; \vec{x}') = \Delta_r \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{r}{r} = 0 \checkmark$$

(iii) für $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$ integriere über Vollkugel

(40) um \vec{x}' (Radius $\varepsilon > 0$ beliebig):

$$\int_{|\vec{r}'| \leq \epsilon} d^3 r' \Delta_r G(|\vec{r}|) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\vec{r}'| \leq \epsilon} d^3 r' \Delta_r \frac{1}{|\vec{r}'|}$$

$$\stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{r}' = \epsilon} d\vec{f} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}'|}}_{= \vec{e}_r \frac{1}{r^2} = -\vec{e}_r \frac{1}{r^2}}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_{\vec{r}' = \epsilon} d\vec{f} = -1$$

$$= \int_{|\vec{r}'| \leq \epsilon} d^3 r' \delta(\vec{r}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \delta(|\vec{r}'|) \quad \checkmark$$

Die Standardlösung $G(\vec{x}; \vec{x}') \stackrel{\text{hier}}{=} G(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}$ nennt man *Green-Funktion* der Poisson-Gleichung.

Allgemeine Lösung:

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3 x' G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Beachte: Wir haben zur Bestimmung der Greenfunktion einen Ausdruck gesucht, der

(4)

- (i) radialsymmetrisch war (Symmetrie des Problems): $G(\vec{r}) = g(r)$
- (ii) die Laplace-Gleichung „fast überall“ erfüllt: $\Delta G(\vec{r}) = 0$ für $0 < r < \infty$
- (iii) die Randbedingung bei $r = \infty$ erfüllt
- (iv) die Inhomogenität bei $r = 0$ reproduziert

Lösung nur für (i) + (ii):

$$\Delta f(r) = 0 \quad \text{für } 0 < r < \infty$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f(r)) = 0 \quad "$$

$$r f(r) = A + Br$$

$$f(r) = \frac{A}{r} + B$$

→ (iii) legt B fest, (iv) legt A fest.

12.11.12

Mathematischer Exkurs

1) Mehrdimensionale partielle Integration

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit abschnittsweise glattem Rand ∂V . Seien $\vec{v}(\vec{x})$ und $\varphi(\vec{x})$ stetig differenzierbar auf V . Dann gilt:

$$\int_V d^n x [\vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) + \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{v}] = \int_V d^n x \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{v})$$

Green

$$= \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \vec{v})$$

$$\Rightarrow \int_V d^n x \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \vec{v}) - \int_V d^n x \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) \quad (\square)$$

check $n=1$:

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \varphi \frac{dv}{dx} = [\varphi v]_{x_{\min}}^{x_{\max}} - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx v \frac{d\varphi}{dx}$$

2) Mittelwertsatz von Gauß

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u(\vec{x})$ zweimal stetig differenzierbar auf V mit $\Delta u(\vec{x}) = 0$

(43)

für alle $\vec{x} \in V$. Dann gilt für jede in V enthaltene Kugel

$$K_{R, \vec{x}_0} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n; |\vec{x} - \vec{x}_0| \leq R \}$$

$$(ii) u(\vec{x}_0) = \frac{1}{S_n(R)} \int_{|\vec{x} - \vec{x}_0| = R} u(\vec{x}) ds$$

↑
ungerichtetes
Flächenelement

mit $S_n(R)$ = Oberfläche einer Kugel vom Radius R in \mathbb{R}^n

D.h.: $u(\vec{x}_0)$ entspricht dem Mittelwert von $u(\vec{x})$ über jede Kugeloberfläche um \vec{x}_0 :

$$u(\vec{x}_0) = \frac{\int_{\partial K_{R, \vec{x}_0}} ds u(\vec{x})}{\int_{\partial K_{R, \vec{x}_0}} ds 1}$$

$$(iii) u(\vec{x}_0) = \frac{1}{V_n(R)} \int_{|\vec{x} - \vec{x}_0| \leq R} d^n x u(\vec{x})$$

mit $V_n(R)$ = Volumen einer Kugel mit Radius R in \mathbb{R}^n . Also Volumen-Mittelwert:

$$u(\vec{x}_0) = \frac{\int_{K_{R, \vec{x}_0}} ds u(\vec{x})}{\int_{K_{R, \vec{x}_0}} ds 1}$$

Beweis von (1) über Dirac-Deltafunktion und ihren Zusammenhang mit der Green-Funktion des Laplace-Operators (Alternativ-Beweis: Übung)

$$\begin{aligned}
 u(\vec{x}_0) &= \int_V d^n x \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) u(\vec{x}) \\
 &= - \int_V d^n x \underbrace{u(\vec{x})}_{\varphi} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} G(\vec{x} - \vec{x}_0))}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} G} \\
 &\stackrel{\square}{=} - \int_{\partial V} u(\vec{x}) d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} G(\vec{x} - \vec{x}_0) + \int_V d^n x \underbrace{\vec{\nabla} G(\vec{x} - \vec{x}_0)}_{\vec{\nabla} G} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} u(\vec{x})}_{\vec{\nabla} \varphi} \\
 &\stackrel{\square'}{=} - \int_{\partial V} u(\vec{x}) d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} G(\vec{x} - \vec{x}_0) + \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot G(\vec{x} - \vec{x}_0) \vec{\nabla} u(\vec{x}) \\
 &\quad - \int_V d^n x G(\vec{x} - \vec{x}_0) \underbrace{\Delta u(\vec{x})}_{=0}
 \end{aligned}$$

Jetzt spezifizieren wir, dass das (bisher weitgehend beliebige) Volumen V einem Kreis um \vec{x}_0 entspricht. Dann gilt:

(45) $\vec{\nabla} G(\vec{r}) = g(r) \hat{e}_r; \quad d\vec{f} = df \hat{e}_r \quad (\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_0)$

Anwendung: der dreidimensionale Einschlass geladener Teilchen durch elektrostatische Fallen (oder von magnetischen Dipolen durch statische Magnetfelder) ist **unmöglich!**

2) Falls $\phi_{\text{hom}}(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein Radius R_ε , so dass $|\phi_{\text{hom}}(\vec{x})| < \varepsilon$ für $|\vec{x}| > R_\varepsilon$. Für gegebenes \vec{x}_0 und ε wähle Kugel $V = \{ \vec{x}; |\vec{x}| \leq R_\varepsilon + |\vec{x}_0| \}$

$$\Rightarrow |\phi_{\text{hom}}(\vec{x}_0)| < \varepsilon$$

Also: $\phi_{\text{hom}}(\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \rightarrow \phi_{\text{hom}} = 0$ **eindeutig!**

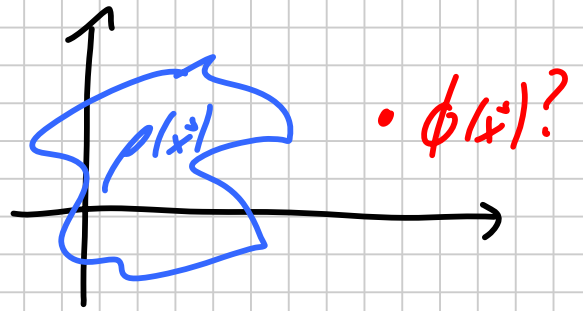
Die eindeutige Lösung der Poisson-Gleichung in \mathbb{R}^3 mit der Randbedingung $\phi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$ lautet also tatsächlich:

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

(17)

3.1.2 Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten

Wir betrachten eine räumlich beschränkte Ladungsverteilung:



$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{für } \vec{x} \gg R$$

und möchten das Fernfeld $\vec{E}(\vec{x})$ bzw. $\phi(\vec{x})$ für $\vec{x} \gg R$ charakterisieren.

Anwendung: • Wechselwirkung zwischen Molekülen,
• Gravitationspotential von nicht-sphärischen Himmelskörpern (Newtonsche Gravitation)

Ansatz: wegen $|\vec{x}'| \ll |\vec{x}|$ können wir die allgemeine Lösung (D) nach \vec{x}' entwickeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= [x^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}' + (x')^2]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{x} \left[1 - \frac{2\vec{x} \cdot \vec{x}'}{x} + \left(\frac{x'}{x}\right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{x} \left\{ 1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{x} + \frac{1}{2x^2} \vec{x}'^T [3\vec{x}'(\vec{x}')^T - (x')^2 \mathbb{1}] \vec{x} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2x^3} \vec{x}'_\alpha \vec{x}'_\beta \vec{x}'_\gamma [5x'_\alpha x'_\beta x'_\gamma - x'_\alpha \delta_{\beta\gamma} - x'_\beta \delta_{\alpha\gamma} - x'_\gamma \delta_{\alpha\beta}] + \dots \}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 x} \left(q + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{d}}{x} + \frac{\vec{x}'^T Q \vec{x}'}{x^2} \right) + \mathcal{O}(x^{-4})$$

mit der Gesamtladung $q = \int d^3x' \rho(\vec{x}')$,

dem Dipolmoment $\vec{d} = \int d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{x}'$

und dem Quadrupoltensor

$$Q = \int d^3x' \rho(\vec{x}') \left[\frac{3}{2} \vec{x}'(\vec{x}')^T - \frac{1}{2} (x')^2 \mathbb{1} \right],$$

\uparrow Dyade

einem symmetrischen spurfreien Tensor 2. Stufe (also 5 unabhängige Komponenten).

Die Koeffizienten nennt man insgesamt **Multipolmomente**.

Exakte Realisierungen von reinen Multipolen der Ordnung n (\sim) $\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) x^{-(n+1)}$ für $\vec{x} > R$

1) **Monopol**: Punktladung q im Ursprung

(oder sphärisch symmetrische Ladungsverteilung)

2) Dipol: $\rho(\vec{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho_\lambda(\vec{x})$

$$\rho_\lambda(\vec{x}) = \frac{d}{\lambda} \left[\delta(\vec{x} - \frac{\lambda}{2} \hat{d}) - \delta(\vec{x} + \frac{\lambda}{2} \hat{d}) \right]$$

$$\Rightarrow \vec{d} = d \hat{d}; \quad q_{\text{ges}} = 0 \quad \text{für jedes } \lambda$$

Alle höheren Multipolmomente (Ordnung n)
konvergieren wie $\lambda^{(n-1)}$ gegen 0. / 14.11.12

3.1.3 Separation der Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten

Bei nichttrivialen Randbedingungen oder z.B. im Rahmen einer Multipolentwicklung ist es oft nützlich, zur Lösung der Laplace-Gleichung eine Entwicklung nach einem vollständigen Orthornormalsystem zu benutzen. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall: kartesischen Koordinaten.

Für die Lösung ϕ der Laplace-Gleichung machen wir einen **Produktansatz**: $\phi(\vec{x}) = U(x)V(y)W(z)$

$$\Delta\phi = 0 \Leftrightarrow U''VW + V''UW + W''UV = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{U''}{U}(x) + \frac{V''}{V}(y) + \frac{W''}{W}(z) = 0 \quad (*)$$

Wegen der verschiedenen Argumente müssen alle Terme in **(*)** offensichtlich konstant sein:

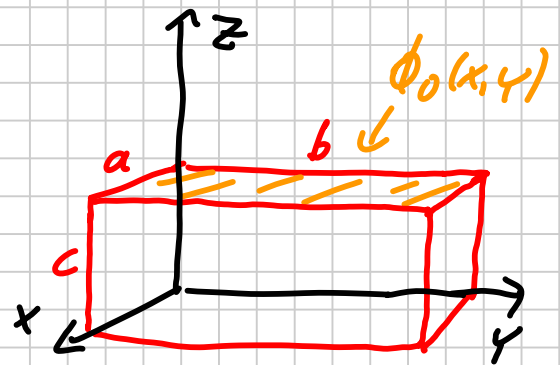
$$\textcircled{51} \quad \frac{U''}{U}(x) = -\alpha^2; \quad \frac{V''}{V}(y) = -\beta^2; \quad \frac{W''}{W}(z) = -\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Damit lautet die spezielle (faktorisierende) Lösung

$$\phi_{\alpha\beta\gamma}(\vec{x}) = e^{i\alpha x} e^{i\beta y} e^{i\gamma z}; \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

und die allgemeine Lösung

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0}} A_{\alpha\beta\gamma} \phi_{\alpha\beta\gamma}(\vec{x}) \quad (\Delta)$$



Anwendung: Randwertproblem für Quader mit

Koordinaten $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$; $0 \leq z \leq c$ mit

Randbedingung: $\phi(x, y, c) = \phi_0(x, y)$ (\square)

$$\phi(x, y, 0) = \phi(0, y, z) = \phi(a, y, z) = \phi(x, 0, z) = \phi(x, b, z) = 0$$

Hier bietet sich die folgende Parametrisierung der

Lösung (Δ) an: $\alpha_m = \frac{\pi m}{a}$; $\beta_n = \frac{\pi n}{b}$

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \sinh(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} z)$$

Diese erfüllt „automatisch“ die Randbedingung $\phi = 0$

an 5 der Randflächen. Die verbleibende Rand-

bedingung lautet:

$$\phi_0(x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sinh(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} c) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y)$$


(52)

A_{mn} Fourier-Koeffizienten auf Randfläche

Wegen der Orthogonalitätsbedingung

$$\frac{2}{a} \int_0^a dx \sin(\alpha_n x) \sin(\alpha_l x) = \delta_{nl} \quad \text{folgt:}$$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab \sinh(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} c)} \int_0^a dx \int_0^b dy \phi(x, y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y)$$

Für allgemeine Randbedingungen auf der Quaderoberfläche kann man 6 Lösungen der obigen Art superponieren. Analog lassen sich alle Körper behandeln, deren Grenzflächen sämtlich  normal zu einer der Koordinatenachsen sind, indem man sie für jede Teillösung passend in Quader zerlegt.

3.1.4 Separation der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Für viele Zwecke sind kartesische Koordinaten schlecht geeignet. Besonders nützlich ist die Zerlegung in Kugelkoordinaten: $\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{u(r)}{r} P(\cos \vartheta) Q(\varphi)$

$$\text{Mit } \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

(53) ergibt sich unter Benutzung von

$$x = \cos(\vartheta) \Rightarrow \frac{dx}{d\vartheta} = -\sin(\vartheta) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}; \quad \sin^2\vartheta = 1-x^2$$

$$\underbrace{r^2(1-x^2)}_{f(x)} \left\{ \underbrace{\frac{u''}{u}}_{f(r)} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{d}{dx} [(1-x^2) P']}_{f(x)} \right\} + \underbrace{\frac{Q''}{Q}}_{f(\vartheta)} = 0$$

Nur $\frac{Q''}{Q}$ hängt von ϑ ab $\leadsto \frac{Q''}{Q} = -m^2; \quad \underline{Q(\vartheta) = e^{\pm im\vartheta}}$

Damit Q stetig ^{diffbar} ist, muss m ganzzahlig sein. Es folgt:

$$\underbrace{r^2 \frac{u''}{u}}_{f(r)} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{d}{dx} [(1-x^2) P'] - \frac{m^2}{1-x^2}}_{f(x)} = 0$$

Nur $r^2 \frac{u''}{u}(r)$ hängt vom Radius ab. Also:

$$r^2 \frac{u''}{u}(r) = \ell(\ell+1) \Leftrightarrow \underline{u(r) = A r^{\ell+1} + B r^{-\ell}}$$

Dabei ist zunächst nur klar, dass $\ell \in \mathbb{R}$.

Für den Winkelanteil verbleibt die verallgemeinerte Legendre-DGL:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} \right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0} \quad (**)$$

A Zylindersymmetrische Probleme: Falls Ladungen

(54) und Randbedingungen Zylindersymmetrie

aufweisen, muss dies auch für die Lösung

gelten: $Q(\psi) = 1 \Leftrightarrow m = 0$

Dann vereinfacht sich **(*)** zur Legendre-DGL:

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + l(l+1)P(x) = 0$$

Da alle Koeffizienten Potenzen von x sind und der Winkelanteil für die Lösung der Laplace-Gleichung **regulär** sein muss, bietet sich ein **Potenzreihen-Ansatz** an:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad // \quad 19.11.12$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[(1-x^2) \underline{k(k-1)x^{k-2}} - 2xkx^{k-1} + l(l+1)x^k \right] = 0$$

$$\sum_k x^k \left[a_{k+2} (k+2)(k+1) + a_k \left[-k(k-1) - 2k + l(l+1) \right] \right] = 0$$

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - l(l+1)}{(k+2)(k+1)} a_k$$

Man erhält also separate Rekursionsreihen für gerade und ungerade Koeffizienten. Falls diese nicht abbrechen, gilt: $a_{k+2}/a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$,

55) d.h. $P(l)$ divergiert. \downarrow

Also müssen 2 Bedingungen erfüllt sein:

(i) $a_0 a_1 = 0$, d.h. $a_0 = 0$ oder $a_1 = 0$

(ii) $\exists h$ mit $h(h+1) = \ell(\ell+1)$

$$\Leftrightarrow \ell \in \mathbb{N}_0$$

Genauer: $\ell = 0, 2, 4, \dots$ falls $a_0 \neq 0$

$$\ell = 1, 3, 5, \dots \text{ falls } a_1 \neq 0$$

Die Winkelanteile $P(\cos(\vartheta))$ haben also eine wohldefinierte Parität: (un)gerade wie ℓ .

Die ersten Legendre-Polynome lassen sich leicht (unnormiert) durch Rekursion bestimmen:

$$\ell = 0: a_0 = 1 \quad \rightarrow P_0(x) = 1$$

$$\ell = 1: a_1 = 1 \quad \rightarrow P_1(x) = x$$

$$\ell = 2: a_0 = 1; a_2 = \frac{1 \cdot 0 - 3 \cdot 2}{2 \cdot 1} a_0 = -3a_0 \rightarrow P(x) \propto 3x^2 - 1$$

Mit der Konvention $P_\ell(1) = 1$ ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 \quad \rightarrow \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Allgemein lassen sich die Legendre-Polynome

(56) angeben als:
$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell$$

Als DGL 2. Art hat die Legendre-DGL für festes l je 2 unabhängige Lösungen.
 Irreguläre Lösung: Legendre-Polynome 2. Art

Die allgemeine Lösung (auch für $m \neq 0$) ist durch die zugeordnete Legendre-Polynome gegeben, wobei $-\ell \leq m \leq \ell$ gilt:

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell$$

Dabei ist die Zuordnung der lin. unabhängigen Lösungen für $\pm m$ Konvention.

Für festes m sind die P_ℓ^m (mit $\ell = |m|, |m|+1, \dots$) paarweise orthogonal: $= 0$ u.v.

$$0 = \int_{-1}^1 dx P_\ell^m \left\{ \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_\ell^m}{dx} \right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_\ell^m \right\}$$

$$\stackrel{\text{PI}}{=} \int_{-1}^1 dx (x^2-1) \frac{dP_\ell^m}{dx} \frac{dP_{\ell'}^m}{dx} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_\ell^m P_{\ell'}^m$$

Die Randterme bei der partiellen Integration

(57) verschwinden wegen des Faktors $(1-x^2)$.

Jetzt vertauschen wir in der obigen Gleichung ℓ und ℓ' , subtrahieren beide Gleichungen und erhalten: $\underbrace{[\ell(\ell+1) - \ell'(\ell'+1)]}_{\neq 0 \text{ für } \ell \neq \ell' - 1} \int_{-1}^1 dx P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) = 0$ \square

Die Normierung lautet:

$$\int_{-1}^1 dx P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell,\ell'}$$

Insgesamt lautet die Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten also:

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (A_{\ell m} r^\ell + B_{\ell m} r^{-\ell-1}) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$$

mit den Kugelflächenfunktionen $(*)$

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\vartheta) e^{im\varphi}$$

Diese sind orthonormal

$$\int d\Omega Y_{\ell m}^*(\Omega) Y_{\ell' m'}(\Omega) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

und vollständig:

$$\sum_{l,m} Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega') = \delta(\Omega - \Omega')$$

Jede auf der Einheitskugel definierte Funktion $f(\Omega)$ lässt sich also in Kugelflächenfunktionen entwickeln.

3.1.5 Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten

Im Fall einer beschränkten Ladungsverteilung muss die Laplace-Gleichung für $r > R$ erfüllt sein und das Potential für $r \rightarrow \infty$ gegen Null gehen. Damit müssen in (*) alle Koeffizienten A_{lm} verschwinden:

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} r^{-l-1} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (\square)$$

Ein Vergleich mit Abschnitt 3.1.2 zeigt, dass auch (7) eine Multipolentwicklung darstellt, da die Terme nach Potenzen von r^{-1} geordnet sind.

Wegen $-l \leq m \leq l$ folgt sofort, dass es in

Ordnung l (d.h. Abfall mit $r^{-(l+1)}$) $2l+1$ linear unabhängige sphärische Multipolmomente gibt.

Frage: wie lassen sich die B_{lm} aus $\rho(\vec{x})$ berechnen?

Benutze dazu die Entwicklung der Green-Funktion nach Kugelflächenfunktionen (Übung):

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega')$$

für $r > r'$

$$\leadsto \phi(r, \Omega) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} q_{lm} Y_{lm}(\Omega)$$

mit $q_{lm} = \int dr' \int d\Omega' \rho(r', \Omega') (r')^{l+2} Y_{lm}^*(\Omega')$

Hinweis zur Übung: die Fourier-Bessel-Reihe beruht auf der Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_0^1 x J_{\alpha}(x u_{\alpha, n}) J_{\alpha}(x u_{\alpha, m}) dx = \frac{\delta_{mn}}{2} [J_{\alpha+1}(u_{\alpha, n})]^2$$

\uparrow Ordnung Bessel-Funktion
 \uparrow n -te Nullstelle

3.1.6 Energie von Ladungsverteilungen und Feldern

Wir betrachten zunächst die Energie einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ im vorgegebenen Feld $\phi_{\text{ex}}(\vec{x})$ (aus externen Quellen):

$$\begin{aligned} U^{\text{ww}} &= \int d^3x \rho(\vec{x}) \phi_{\text{ex}}(\vec{x}) = \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{1}{\rho!} \int d^3x \rho(\vec{x}) (\vec{r} \cdot \vec{\nabla})^\rho \phi_{\text{ex}}(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \\ &= q \phi_{\text{ex}}(\vec{x}_0) + \underbrace{(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \phi_{\text{ex}}(\vec{x})}_{= -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ex}}(\vec{x}_0)} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} + \frac{1}{6} q_{ij} \vec{\nabla}_i \vec{\nabla}_j \phi_{\text{ex}}(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} + \dots \end{aligned}$$

Speziell gilt für einen reinen Dipol: $U^{\text{ww}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ex}}(\vec{x})$

→ Kraft $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ex}})(\vec{x})$

Drehmoment $\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}_{\text{ex}}(\vec{x})$

Für eine Punktladung gilt dagegen: $U^{\text{ww}} = q \phi_{\text{ex}}(\vec{x})$

→ Kraft $\vec{F} = q \vec{E}_{\text{ex}}(\vec{x})$. (Um die Ladung von \vec{x}_1 nach \vec{x}_2 zu bringen, muss man die Arbeit W

leisten: $W_{12} = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = q (\phi_{\text{ex}}(\vec{x}_2) - \phi_{\text{ex}}(\vec{x}_1))$

Um die Gesamtenergie des elektrischen Feldes zu bestimmen, stellen wir uns vor, dass alle Ladungen nacheinander aus dem Unendlichen an ihre Position gebracht werden. Die aufgewendete Arbeit

$$\text{ist: } U = \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

Für kontinuierliche (nichtsinguläre*) Ladungsverteilungen ergibt sich:

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x} \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x})$$

$$\text{Mit } \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \rightarrow \rho \phi = \epsilon_0 \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$= \epsilon_0 [\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{E})}_{\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi} - \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi}_{|\vec{E}|^2}]$$

Wegen $\phi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$ folgt: $U = \frac{1}{8\pi} \int d^3x |\vec{E}(\vec{x})|^2$

Also ist $u(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi} |\vec{E}(\vec{x})|^2$ (A)

die Energiedichte des elektrostatischen Feldes.

* Für singuläre Ladungsverteilungen, insbesondere

Punktladungen enthält Δ Divergenzen, die einer unendlichen Selbstenergie entsprechen (Ultraviolett-Divergenzen der QFT).

3.1.7 Randwertprobleme

Für das Verhalten des elektrischen Feldes an Grenzflächen folgt aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ mit Stokes: $\vec{E}_{||}^{(1)} = \vec{E}_{||}^{(2)}$

sowie aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ mit Gauß und Flächenladungsdichte σ : $(\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Speziell gilt bei Metallen (für statische Felder) im Inneren: $\vec{E} = \vec{0}$ ($\sim \phi = \text{const}$)

Somit gilt außen: $\hat{n} \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$; $\vec{n} \times \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$
 $= -\hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi$

Eindeutigkeit der Lösung von Randwertproblemen

Wir geben nun für ein Gebiet $V \subset \mathbb{R}^3$ die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ vor.

Behauptung: Für geeignete Randbedingungen ist das Potential ϕ eindeutig bestimmt.

Beweis: Annahme: ϕ_1 und ϕ_2 seien Lösung
 $\tilde{\phi} := \phi_1 - \phi_2; \tilde{E} = -\nabla \tilde{\phi} \Rightarrow 0 = \Delta \tilde{\phi} = -\nabla \cdot \tilde{E}$

Mit $\nabla \cdot (\tilde{\phi} \tilde{E}) = -\tilde{\phi} \Delta \tilde{\phi} - |\tilde{E}|^2 = -|\tilde{E}|^2$ folgt:

$$\int_V |\tilde{E}|^2 d^3x = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\tilde{\phi} \tilde{E}) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \tilde{\phi} \hat{n} \cdot \tilde{E}$$

Falls überall auf dem Rand $\tilde{\phi} = 0$ oder $\tilde{E}_n = 0$,
so verschwindet das Integral, also (wegen
 $|\tilde{E}|^2 \geq 0$) auch der Integrand. \square

Es gibt also 2 Randbedingungen, die die Lösung eindeutig festlegen:

1) Dirichletsche Randbedingung: ϕ auf dem Rand vorgegeben

2) von Neumannsche Randbedingung: Normalenfeld $E_n = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi$ auf Rand vorgegeben

Auch gemischte RB sind möglich.

Dabei ist ϕ (zusätzlich zu \vec{E}) nur eindeutig, falls es an mindestens einer Stelle des Randes vorgegeben wird.

Existenz und Konstruktion von Lösungen von Randwertproblemen

Ziel: Geschlossene Lösung mit Hilfe von Green-Funktionen (spezifisch für Randbedingung).

Für in $V \subset \mathbb{R}^3$ differenzierbare Funktionen $\varphi(\vec{x})$ und $\psi(\vec{x})$ gilt: $\vec{\nabla}(\varphi \vec{\nabla} \psi) = \varphi \Delta \psi + (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \psi)$

$$\Rightarrow \int_V [\varphi \Delta \psi + (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \psi)] d^3x = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi)$$

1. Greensche Formel

Vertauschen von φ und ψ und Subtraktion liefert:

$$\int_V d^3x (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \varphi)$$

Dies ist die 2. Greensche Formel

Beachte: $d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \varphi = d\vec{f}(\vec{\nabla} \varphi)_n = d\vec{f} \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ gibt die Ableitung entlang der Flächennormalen (mal $d\vec{f}$) an.

Wir setzen nun $\varphi(\vec{x}) = \phi(\vec{x})$ mit $\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ ein:

$$\int_V d^3x' \phi(\vec{x}') \Delta \psi(\vec{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \psi(\vec{x}') \rho(\vec{x}') d^3x' + \int_{\partial V} d\vec{f} [\phi(\vec{x}') \vec{\nabla}' \psi(\vec{x}') - \psi(\vec{x}') \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')]]$$

Jetzt wählen wir speziell für $\psi(\vec{x}')$ eine Green-Funktion mit $\Delta G(\vec{x}, \vec{x}') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ für $\vec{x} \in V$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(\vec{x}) &= \int_V d^3x' \phi(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') && (\square\square) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') - \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot [\phi(\vec{x}') \vec{\nabla}' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \vec{\nabla}' \phi(\vec{x}')] \\ &= \int_V d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} - \int_{\partial V} d\vec{f}' \cdot [\phi(\vec{x}') \frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{x}, \vec{x}') + G(\vec{x}, \vec{x}') E_n(\vec{x}')] \end{aligned}$$

Achtung: dies ist i.A. noch nicht die Lösung des Randwertproblems, da in der Regel nur eine der beiden Funktionen $\phi(\vec{x}')$ und $E_n(\vec{x}')$ auf dem Rand ∂V bekannt ist.

Im Allgemeinen hat die Green-Funktion G offenbar die Struktur

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}'),$$

wobei $F(\vec{x}, \vec{x}')$ harmonisch in V ist, d.h.

$$\text{es gilt: } \Delta' F(\vec{x}, \vec{x}') = 0$$

Gleichung (2.1) gilt für jede Wahl von F .

26.11.12

Speziell wählen wir für Dirichlet-Randbed.

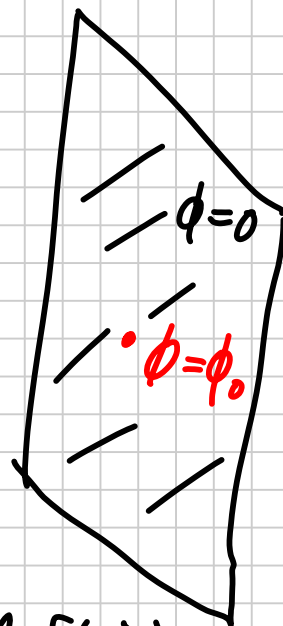
$$G = G_D \text{ mit } G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0 \text{ für } \vec{x}' \in \partial V$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \int_V G_D(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} d^3x' - \int_{\partial V} d\vec{x}' \phi(\vec{x}') \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'}$$

Analog löst man das von-Neumann-Randwert

⑥7 Problem mit $G = G_N$ und $\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\vec{x}, \vec{x}') = 0$.

Anwendung 1: Es sei eine große Metallplatte gegeben (bei $z=0$) mit $\phi=0$. Im Ursprung befinde sich eine gegenüber der Platte isolierte Elektrode mit hoher



Spannung. Wir nehmen an: $\phi_0(\vec{x}_0) = A \delta(\vec{x}_0)$.

Bestimme das Potential $\phi(\vec{x})$ für $z < 0$.

Ansatz: Dirichlet-Greenfunktion

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}''|} \right]; \quad \vec{x}'' = \vec{x}' - 2(\vec{x}' \cdot \hat{n})\hat{n}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2]^{1/2}} \right]$$

$$\left. \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \right|_{z'=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \Big|_{z'=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{z - z'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^{3/2}} \Big|_{z'=0}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{z}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= - \int_{\partial V} d\phi(\vec{x}') \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \\ &= - \frac{A}{2\pi} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = - \frac{A}{2\pi} \frac{\vec{x} \cdot \hat{n}}{|\vec{x}|^3} \quad (z < 0) \end{aligned}$$

Verifikation: S. 71

Entsprechend müsste man bei kontinuierlich auf ∂V vorgegebener Potentialverteilung integrieren. (In Vorlesung: Limits für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$)

Anwendung 2: Jetzt sei eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}_\perp)$ bei $z=0$ vorgegeben

$$\rightarrow \text{verwende } G_D(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}''|} \right] \dots$$

3.1.8 Kapazität und Kondensator

Wir betrachten eine Anordnung von N geladenen Leitern (Potential Ψ_ν , Volumen V_ν mit Oberfläche $S_\nu = \partial V_\nu$) im ladungsfreien Raum.

Sei $G_D(\vec{x}, \vec{x}')$ die zugehörige Greenfunktion

$$\rightarrow \phi(\vec{x}) = - \sum_{\nu=1}^N \Psi_\nu \oint_{S_\nu} d\phi' \frac{\partial G_D(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'}$$

69

Das elektrische Feld an der Oberfläche der Leiter ist also

$$E_n(\vec{x}) = -\frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial n} = \sum_{\nu=1}^N \varphi_{\nu} \int_{S_{\nu}} \frac{\partial^2 G_0(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n \partial n'} df'$$

Mit $E_n(\vec{x}) = -4\pi\sigma(\vec{x})$ ergibt sich die Ladung q_{μ} auf dem μ -ten Leiter zu

$$q_{\mu} = \sum_{\nu=1}^N c_{\mu\nu} \varphi_{\nu} \quad (\heartsuit)$$

mit der symmetrischen Kapazitätsmatrix

$$c_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_{\mu}} df \int_{S_{\nu}} df' \frac{\partial^2 G_0(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n \partial n'}$$

Die Elemente heißen auch Influenzkoeffizienten $c_{\mu\nu}$ bzw. Kapazitätskonstante $c_{\mu\nu}$.

Die Energie der Ladungsverteilung lässt sich schreiben als $U = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^N q_{\mu} \varphi_{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^N c_{\mu\nu} \varphi_{\mu} \varphi_{\nu}$

Wegen $U \geq 0$ ist die Matrix positiv definit.

Als Kondensator wird üblicherweise ein System aus 2 Leitern mit $q_1 = -q_2 = Q$ bezeichnet.

Umkehrung von \square , d.h. $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$

ergibt: $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{12} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ -Q \end{pmatrix}$
 $= \frac{Q}{\det C} \begin{pmatrix} C_{22} + C_{12} \\ -C_{11} - C_{12} \end{pmatrix}$

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q \\ -Q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{Q^2}{2} \frac{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}{\det C} =: \frac{Q^2}{2C}$$

mit der Kapazität $C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}$

Es gilt auch: $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{C}$, d.h. mit der Spannung $\tilde{U} = \varphi_1 - \varphi_2$: $Q = C \tilde{U}$.

Beispiel: Kugelkondensator: Für das Potential

gilt: $\phi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|}$ für $R_i \leq |\vec{x}| \leq R_a$

Mit $\varphi_a - \varphi_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_i} \right)$ folgt

die Kapazität $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i}$

Für den Zylinderkondensator gilt mit dem Satz von Gauss für jeden Abschnitt der Länge

$$L: \quad 2\pi r L E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad \text{für } R_i < r < R_a$$

$$E(r) = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\phi(r) = -\frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_a}$$

$$\tilde{U} = \phi(R_i) - \phi(R_a) = -\frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_i}{R_a}$$

$$\Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_a/R_i)} \quad // 28.11.12$$

Verifikation der Lösung $\phi(\vec{x}) = -\frac{A}{2\pi} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

des Randwertproblems (Anwendung!) von S. 68-69:

$$1) \quad \phi(\vec{x}) \begin{matrix} z > 0 \\ z < 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{falls } x^2 + y^2 > 0 \\ \infty & \text{" } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Betrachte Integral $I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \phi(\vec{x}) \begin{matrix} \xrightarrow{!} \\ z > 0 \\ z < 0 \end{matrix} A$

Für $z < 0$ gilt:
$$I(z) = \frac{A}{2\pi} \int_0^{\infty} 2\pi r dr \frac{|z|}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

setze $r = |z|s \Rightarrow dr = |z|ds$

$$\Rightarrow I(z) = A \int_0^{\infty} |z|s |z|ds \frac{|z|}{|z|^3 (1+s^2)^{3/2}}$$

$$= A \int_0^{\infty} ds s (1+s^2)^{-3/2}$$

$$= -A \left[(1+s^2)^{-1/2} \right]_0^{\infty} = A \xrightarrow[z < 0]{z > 0} A \quad \square$$

Überraschung: das Integral über $\phi(\vec{x})$ über Flächen parallel zur Grenzfläche ist konstant
 \rightarrow Realisierung der zweidimensionalen Delta-Fkt.

3.1.9 Lösung der Laplace-Gleichung in Zylinder-Koordinaten

In Zylinder-Koordinaten (r, φ, z) lautet der Laplace-Operator $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Der Separationsansatz $\phi(r, \varphi, z) = R(r)Q(\varphi)U(z)$

folgt:
$$\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{Q''}{Q} + \frac{U''}{U} = 0$$

(73) $\underbrace{\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{Q''}{Q}}_{\text{nur von } r, \varphi \text{ abhängig}} + \underbrace{\frac{U''}{U}}_{\text{nur von } z \text{ abhängig}} = 0$

$$\Rightarrow \frac{U''}{U} = k^2 \text{ konstant} \Rightarrow U(z) = e^{\pm kz}$$

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \underbrace{Q''}_{\text{einzigster } \varphi\text{-abh. Anteil}} + k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Q''}{Q} = -n^2 \text{ konstant}; \quad Q(\varphi) = e^{\pm in\varphi}$$

$Q(\varphi)$ stetig + diffbar $\leadsto n \in \mathbb{Z}$

Es folgt eine gewöhnliche DGL für den Radial-

anteil: $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0$

Durch Umskalierung $x = kr$ erhalten wir die Bessel-DGL in Standardform:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dR}{dx} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) R = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 R''(x) + x R'(x) + (x^2 - n^2) R(x) = 0$$

Alle Lösungen sind analytisch, ausgenommen ggf. den singulären Punkt $x=0$. Sie werden Zylinderfunktionen genannt.

Die regulären Lösungen (d.h. $|R(x)| < \infty$ für $x \rightarrow 0$) lassen sich durch Potenzreihenansatz finden:

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\Rightarrow k(k-1)a_k + k a_k + a_{k-2} - n^2 a_k = 0$$

↓ mit Konvention $a_{-1} = a_{-2} = 0$

$$(k^2 - n^2) a_k + a_{k-2} = 0$$

speziell folgt: $n^2 a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ falls $n \neq 0$

$$(1 - n^2) a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$
 falls $n \neq 1$

sowie für $n \in \mathbb{N}$: $a_k = 0$ für $k < n$

$$n \begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{2k+1} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ a_{2k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Die nicht verschwindenden Koeffizienten ergeben

sich zu
$$a_{n+2q} = \frac{-a_{n+2(q-1)}}{2q \cdot 2(n+q)} = \frac{(-1)^q n! a_n}{2^{2q} q! (n+q)!}$$

Mit der Konvention $a_n = \frac{1}{n! 2^{2n}}$ resultieren ← Korrektur zu Vorl.

die Bessel-Funktionen (der ersten Art) von

Ordnung n :

$$J_n(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q! (n+q)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2q}$$

75 Der Konvergenzradius ist unendlich.

Für nichtganzzahliges n sind J_n und J_{-n} die beiden linear unabhängigen Lösungen der Bessel-DGL. Im betrachteten Fall $n \notin \mathbb{Z}$ gilt jedoch: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ (sowie $J_{-n}(-x) = J_n(x)$)

Die 2. linear unabh. Lösung ist dann durch die **Neumann-Funktion** $N_n(x)$ gegeben:

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos(\pi \nu) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi \nu)}$$

Diese wird auch **Weber-Funktion** oder **Bessel-Funktion zweiter Art** genannt und **divergiert**

bei $x=0$: $N_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \begin{cases} x^{-n} & n \in \mathbb{N} \\ \ln(x) & n = 0 \end{cases}$

Insgesamt lautet also die allgemeinste Lösung, die die Laplace-Gleichung im Bereich $0 < r < \infty$ erfüllt:

$$\phi(r, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk [A_{m,k} J_{|m|}(k|r|) + B_{m,k} N_{|m|}(k|r|)] \cdot e^{im\varphi} e^{kz}$$

↑ auch ohne Betragstriche gültig!

Falls die Laplace-Gleichung auch bei $x=0$ gelten soll, muss die Lösung ϕ dort regulär sein, d.h. $B_{m,l} = 0 \quad \forall m, l$.

Bemerkung: auch die Hankel-Funktion

$H_n^{1/2}(x) = J_n(x) \pm i Y_n(x)$ wird als Basis der Zylinderfunktionen verwendet.

Für große Argumente haben die Besselfunktionen asymptotisch die Form von gedämpften Sinus- bzw. Kosinus-Schwingungen:

$$J_n(x) \stackrel{x \gg 1}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}(2n+1)\right)$$

Insbesondere hat jedes J_n **unendlich viele Nullstellen** $x_{n,e}$, die sämtlich paarweise verschieden sind. Es gilt: $x_{n,e} < x_{n+1,e} < x_{n,e+1}$

Lösung in beschränktem Radialbereich: oft, z.B. in der Hydrodynamik, sucht man Lösungen, die **(77)** außerhalb eines Radius a verschwinden.

Diese lassen sich aus allgemeinen Lösungen konstruieren, bei denen der Radialteil jeweils eine Nullstelle bei $r=a$ hat:

$$k a = x_{n,\ell} \quad \leadsto \quad k_{n,\ell} = \frac{x_{n,\ell}}{a}$$

Wenn wir zusätzlich Regularität bei $r=0$ fordern, lautet die allgemeine Lösung:

$$\phi(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm} A_{n,\ell}^{(\sigma)} J_n(x_{n,\ell} \frac{r}{a}) e^{in\varphi} e^{\sigma x_{n,\ell} \frac{z}{a}}$$

und die allgemeine Lösung mit Zylinder-Symmetrie:

$$\phi(r, z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\sigma=\pm} A_{0,\ell}^{(\sigma)} J_0(x_{0,\ell} \frac{r}{a}) e^{\sigma x_{0,\ell} \frac{z}{a}}$$

Die Koeffizienten folgen für gegebene Randbedingungen (bei $z=z_0$ und/oder $z=\pm\infty$) aus der Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^a r dr J_n(x_{n,\ell} \frac{r}{a}) J_n(x_{n,s} \frac{r}{a}) = \frac{a^2}{2} \delta_{\ell,s} J_{n+1}^2(x_{n,\ell})$$

3.2 Magnetostatik

Aus den Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x}) \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0$$

folgt die Existenz eines **Vektorpotentials** $\vec{A}(\vec{x})$

mit $\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$. Offensichtlich gilt die

Eichfreiheit $\vec{A}(\vec{x}) \rightarrow \tilde{\vec{A}}(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) + \vec{\nabla} \chi(\vec{x})$:

A und \tilde{A} führen zu dem gleichen Magnetfeld, sind also äquivalent. Es gilt:

$$\mu_0 \vec{j}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x})) - \Delta \vec{A}(\vec{x})$$

In **Coulomb-Eichung** $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = 0$ folgt:

$$\mu_0 \vec{j}(\vec{x}) = -\Delta \vec{A}(\vec{x})$$

Damit ist $\vec{A}(\vec{x})$ bis auf eine Lösung der **Laplace-Gleichung** festgelegt. Bei einer räumlich begrenzten Stromverteilung und $V = \mathbb{R}^3$

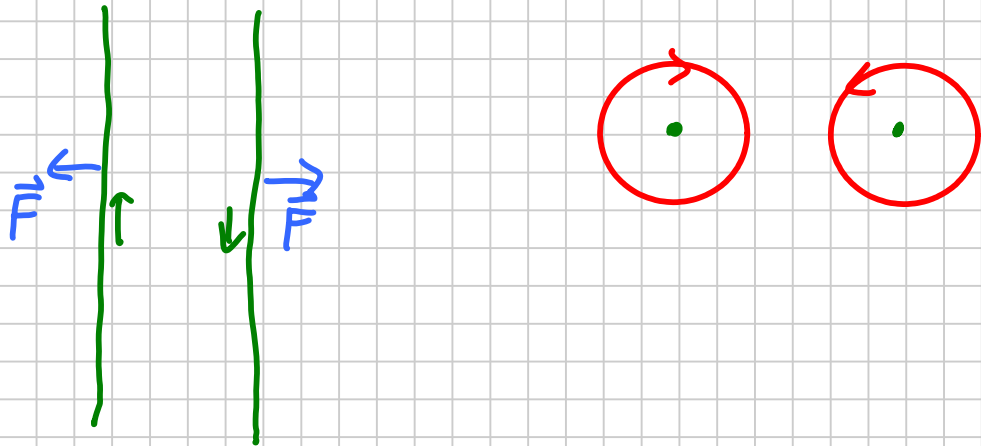
resultiert **Eindeutigkeit** aus der Forderung

$\vec{A}(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \vec{0}$. Lösung wie in 3.1 **Elektrostatik**.

Die magnetische Feldenergiedichte ist

$$\rho_m = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}$$

Beachte: Während die Kräfte in der Elektrostatik in Richtung **niedrigerer** Feldenergie wirken, treiben die Kräfte der Magnetostatik stromdurchflossene Leiterschleifen zu **höherer** Feldenergie:



Dies ist nur möglich, weil bei dem Auseinanderführen der Leiter eine Induktionsspannung abfällt, also **Arbeit** durch die Stromquellen aufgebracht werden muss (\rightarrow Römert/Forger) Kap. 5

Feld eines magnetischen Dipols $\vec{m} = \frac{1}{2} (d\vec{r} \vec{r} \times \vec{j})(\vec{r})$:

(80)
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{m}}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Induktivität,} \\ \text{Drehmoment...} \end{array} \right.$$

3.3 Numerische Lösung der Laplace- (Poisson-) Gleichung

Die Strategien zur numerischen Lösung von Differentialgleichung hängen stark vom genauen Problem, insbesondere den Randbedingungen ab. Wir betrachten zunächst gewöhnliche DGLs:

1) DGL 1. Ordnung:

löse $f'(x) = g(x)$ für $x \in [0, L]$ mit $f(0) = f_0$

Ansatz: $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + \mathcal{O}(x_{i+1} - x_i)$

Beachte: Auch bei gegebener Diskretisierung

$$\{x_i\}_{i=0}^N \text{ mit } x_0 = 0; x_N = L \quad ; \quad x_i < x_{i+1} \quad \forall 0 \leq i \leq N-1$$

ist die diskretisierte Form des Differentialoperators

nicht eindeutig. Alternativen: $f'(x_{i+1}) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$

• $f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}}$ (symm. Form)

→ Algorithmus: 1) $f(x_0) = f_0$

⑧ 2) $f(x_{i+1}) = f(x_i) + g(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad \forall 0 \leq i \leq N-1$

Modifikation: ersetze $g(x_i)$ durch $\frac{1}{2}(g(x_i) + g(x_{i+1}))$

2) DGL 2. Ordnung mit einseitiger RB

löse $f''(x) = g(x)$ mit $f(0) = f_0, f'(0) = f_1$

Der Einfachheit halber (und wie meist in der Praxis) wählen wir eine homogene Diskretisierung

$$x_i = x_0 + i \Delta x = \frac{i}{N} L$$

Ansatz: $f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{(\Delta x)^2}$

→ Algorithmus 1) $f(x_0) = f_0$ 2) $f(x_1) = f_0 + f_1 \Delta x$

$$3) f(x_{i+1}) = 2f(x_i) - f(x_{i-1}) + g(x_i)(\Delta x)^2 \quad \forall 1 \leq i \leq N-1$$

3) DGL 2. Ordnung mit Dirichlet-RB

löse $f''(x) = g(x)$ mit $f(0) = f_0, f(L) = f_1$

Problem: direkte schrittweise Lösung nicht möglich, da Ableitung an Rändern unbekannt.

Ansatz: erzeuge iterativ Folge $f^{(k)}$ von

diskretisierten Funktionen, die für $k \rightarrow \infty$

gegen Lösung der diskretisierten DGL konvergiert.
Dabei muss der Differentialoperator aus Stabilitätsgründen **symmetrisch** angewendet werden.

→ **Algorithmus:**

0) Wähle **Initialisierung** $f^{(0)}(x_0)$ mit $f^{(0)}(x_0) = f_0$,
 $f^{(0)}(x_N) = f_1$; z.B. $f^{(0)}(x_i) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{L} (f_1 - f_0)$.

1) Update $k \rightarrow k+1$: $f^{(k+1)}(x_0) = f_0$; $f^{(k+1)}(x_N) = f_1$

$$f^{(k+1)}(x_i) = \frac{1}{2} \left[f^{(k)}(x_{i-1}) + f^{(k)}(x_{i+1}) - g(x_i) (\Delta x)^2 \right] \quad (*)$$

$\forall 1 \leq i < N$

Wiederhole Schritt 1), bis gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Das konkrete Schema **(*)**, bei dem auf der rechten Seite nur die alte Lösung steht, nennt man **Jacobi-Iteration**.

Alternative **Gauß-Seidel-Iteration**: auf rechter Seite wird $f^{(k+1)}$ eingesetzt. Dann hängt das

(83) Ergebnis von der **Reihenfolge der Updates** ab.

Speziell nennt man dieses Verfahren auch **Schachbrett-Iteration** (red-black iteration), falls alternierend Untergitter $\{x_{2n+1}\}$ und $\{x_{2n}\}$ aktualisiert werden.

4) Laplace-Gleichung für Rechteck mit Dirichlet-RB

Vorgehen analog zu 3), mit Update:

$$f^{(k+1)}(x_i, y_j) = \frac{1}{4} [f^{(k)}(x_{i-1}, y_j) + f^{(k)}(x_{i+1}, y_j) + f^{(k)}(x_i, y_{j+1}) + f^{(k)}(x_i, y_{j-1})]$$

bzw. GS- und red-black-Iteration

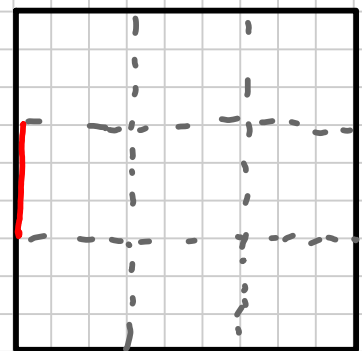
Beispiel: auf dem mittleren

Drittel des Rands eines $f=100 \rightarrow$

Quadrats ist die Lösung

$f=100$ vorgegeben, ansonsten

$f=0$. Diskrete Lösung?



In Vorlesung: „von Hand“ iterativ gelöst.

Vergleich Jacobi vs. Schachbrett-Iteration

Vorstellung Computer-Implementation

Beobachtung: in konvergierter Lösung hat das zentrale Feld exakt den Wert $12.5 = \frac{100}{8}$.

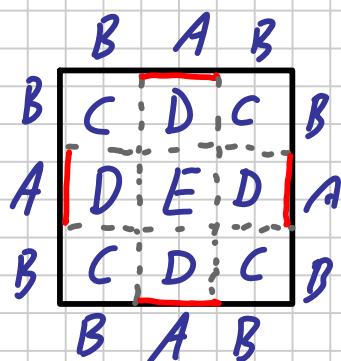
Einfacher: symmetrisiertes Problem

$$A=100, B=0 \rightarrow D=E$$

$$C = \frac{D+B}{2} = \frac{D}{2}$$

$$D = \frac{1}{4}(A+E+2C)$$
$$= \frac{1}{4}(A+2D)$$

$$\frac{1}{2}E = \frac{1}{4}A \Rightarrow E = \frac{A}{2} = 50$$



Linearität \rightarrow in ursprünglichem Problem ist $E = \frac{A}{8}$

Beachte: auch das volle Problem ist einem linearen Gleichungssystem äquivalent, lässt sich also nicht iterativ exakt lösen. Aber: zu teuer für große Probleme!