

## 5 Elektromagnetische Wellen

## 5.1 Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum

Im Vakuum lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Delta \vec{E} &= \Delta \vec{E} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \\ &= -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \vec{B} &= \Delta \vec{B} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Mit dem d'Alembert-Operator

$$\square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

(94) gilt also:  $\square \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{0}$ ;  $\square \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{0}$

Lösungen dieser Wellengleichungen findet man mit einem **Separationsansatz**:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(\vec{x}) f(t)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \square \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2} f''(t) \vec{E}_0(\vec{x}) - f(t) \Delta \vec{E}_0(\vec{x})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{f''(t)}{f(t)} = \frac{\Delta \vec{E}_{0,i}(\vec{x})}{\vec{E}_{0,i}(\vec{x})} =: -|\vec{k}|^2$$

$$\Rightarrow f(t) = f_0 e^{i\omega t}; \quad \omega^2 = c^2 |\vec{k}|^2$$

Die Komponenten  $\vec{E}_{0,i}(\vec{x})$  müssen dann Eigenlösungen des Laplace-Operators sein, die sich (bei freien Randbedingungen) z.B. durch einen kartesischen Produktansatz ergeben. Insgesamt erhält man:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_{\vec{k}} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}; \quad \omega^2 = c^2 |\vec{k}|^2$$

und analog

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_{\vec{k}} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

Elektromagnetische Wellen laufen also

dispersionsfrei mit Lichtgeschwindigkeit  $c$ .

Dabei erfüllen jedoch **nicht** alle Lösungen der Wellengleichungen auch die Maxwell-Gleichungen:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E}_{\vec{k}} e^{i\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_{\vec{k}} = 0$$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B}_{\vec{k}} = 0$$

$\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind also **transversale Wellen**.

Sie sind nicht unabhängig:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}} = \omega \vec{B}_{\vec{k}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{B}_{\vec{k}} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_{\vec{k}}$$

Es gilt also  $|\vec{E}| = |\vec{B}|c$ ;  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}_{\vec{k}}$  und  $\vec{B}_{\vec{k}}$  bilden ein **rechtshändiges Orthogonalsystem**.

Die physikalischen Felder ergeben sich natürlich als Real- oder Imaginärteile der angegebenen

⑨ komplexen Lösungen

## Übung: Energiedichte, Poynting-Vektor?

Für viele Zwecke, z.B. die Konstruktion nichttrivialer Lösungen sind Zugänge auf der Ebene der elm. Potentiale  $\phi, \vec{A}$  mit  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

praktischer. Dabei gilt speziell in Coulomb-

Eichung: 
$$\frac{\rho(\vec{x}, t)}{\epsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = -\Delta \phi(\vec{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)$$
$$= -\Delta \phi(\vec{x}, t)$$

mit der Lösung 
$$\phi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|},$$

die scheinbar die Kausalität verletzt. Da für  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  keine Lösung mit instantaner Fernwirkung existiert, ist dies jedoch auch für die physikalischen Felder  $\vec{E}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t)$  nicht der Fall.

Transparenter ist die Lorenz-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu A^\mu = 0,$$

die auf eine inhomogene Wellengleichung für

97  $\phi$  und  $\vec{A}$  führt. (Vorlesung: S. 89) / 19.12.12

## 5.2 Greensche Funktionen des Wellenoperators

Wir suchen nun allgemeine Lösungen der inhomogenen Wellengleichung  $\square f(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t)$  (\*)

Analog zur Elektrostatik führen wir dafür Green-Funktionen  $G$  des Wellenoperators

ein:  $\square G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t')$  ( $\Delta$ )

$$\leadsto f(\vec{x}, t) = \int dt' \int d^3x' G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') g(\vec{x}', t')$$

erfüllt die Wellengleichung (\*).

Dabei fordern wir speziell für die **retardierte**

**Green-Funktion:**  $G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = 0$  für  $t < t'$ ;

eine zur Zeit  $t'$  einsetzende Störung soll sich also nur für  $t > t'$  auf die Lösung auswirken.

Zur expliziten Konstruktion der Green-Funktionen führen wir **Fourier-Transformationen** durch:

$$G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k \tilde{G}(\vec{k}, \omega)$$

$$\exp[i(\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') - \omega(t - t'))]$$

$$\delta(t-t') \delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3\vec{k} e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}') - \omega(t-t'))}$$

Damit wird (A) äquivalent zu

$$-\left(\frac{\omega^2}{c^2} - |\vec{k}|^2\right) \tilde{G}(\vec{k}, \omega) = 1$$

$$\Rightarrow G(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{k} \int d\omega \frac{\exp[i(\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}') - \omega(t-t'))]}{|\vec{k}|^2 - \omega^2/c^2} \quad (\text{K-T})$$

## Mathematischer Exkurs: Residuensatz

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  eine einfach zusammenhängende offene Teilmenge der komplexen Ebene,  $\{z_1, \dots, z_n\}$  eine endliche Menge von Punkten aus  $D$  und  $f$  eine holomorphe (d.h. komplex differenzierbare) Funktion

auf  $D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ , so gilt für das Linienintegral entlang einer glatten positiv orientierten geschlossenen Kurve  $\Gamma \subset D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ :

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, z_a),$$

wobei sich die Summe über alle  $k$  erstreckt, für die der Punkt  $z_a$  im Inneren von  $\Gamma$  liegt.

Das Residuum  $\text{Res}(f, z_a)$  von  $f$  am Punkt  $z_a$  ergibt sich als Koeffizient  $a_{-1}$  in einer Laurent-Reihe

$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_a)^j$  um  $z_a$ ; im Fall von einfachen Polstellen gilt also

$$\text{Res}(f, z_a) = \lim_{z \rightarrow z_a} [f(z)(z-z_a)].$$

\* „Beweis“ durch explizite Berechnung für  $z = ae^{i\varphi}$  (Kreiskontur)

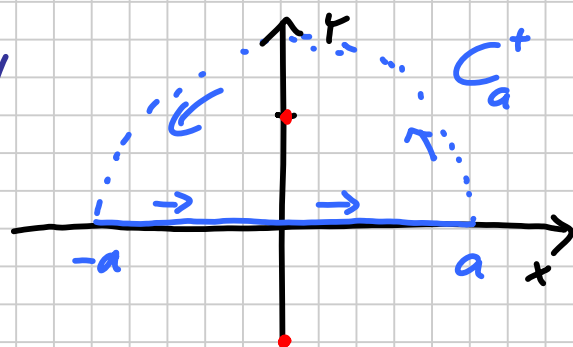
Oft lässt sich der Residuensatz zur Berechnung von Integralen  $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$  entlang der reellen Achse einsetzen, die nicht „normal“, d.h. via Stammfunktion von  $f$  ermittelt werden können.

Beispiel:  $I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos(tx)}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{itx}}{x^2+1}$

Die Funktion  $f(z) = \frac{e^{itz}}{z^2+1} = \frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)}$

hat einfache Polstellen bei  $z_{\pm} = \pm i$

Trick: Betrachte Linienintegral für halbkreisförmige Kontur



(100) mit Grundlänge  $2a$ :

Für  $t > 0$  schließen wir den Integrationsweg dabei über die obere Halbebene mit  $a > 1$ . Dann gilt:

$$\oint_{C_a} f(z) dz = \int_{-a}^a dx f(x) + \int_{C_a^+} dz f(z) \quad (\square)$$

Für  $t > 0$  und  $\text{Im}(z) > 0$  ist aber  $|e^{itz}| \leq 1$ ; mit

$$z = ae^{i\varphi} \text{ gilt: } \left| \frac{1}{z^2+1} \right| = \left| \frac{1}{a^2 e^{2i\varphi} + 1} \right| = \frac{1}{|a^2 + e^{-2i\varphi}|} \leq \frac{1}{a^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\tilde{C}_a} dz f(z) \right| \leq \pi a \max_{z \in C_a^+} [f(z)] \leq \frac{\pi a}{a^2 - 1} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} \text{Andererseits ist } \oint_{C_a} f(z) dz &= 2\pi i \text{ Res}(f, z=i) \\ &= 2\pi i \left. \frac{e^{itz}}{z+i} \right|_{z=i} = \pi e^{-t} \end{aligned}$$

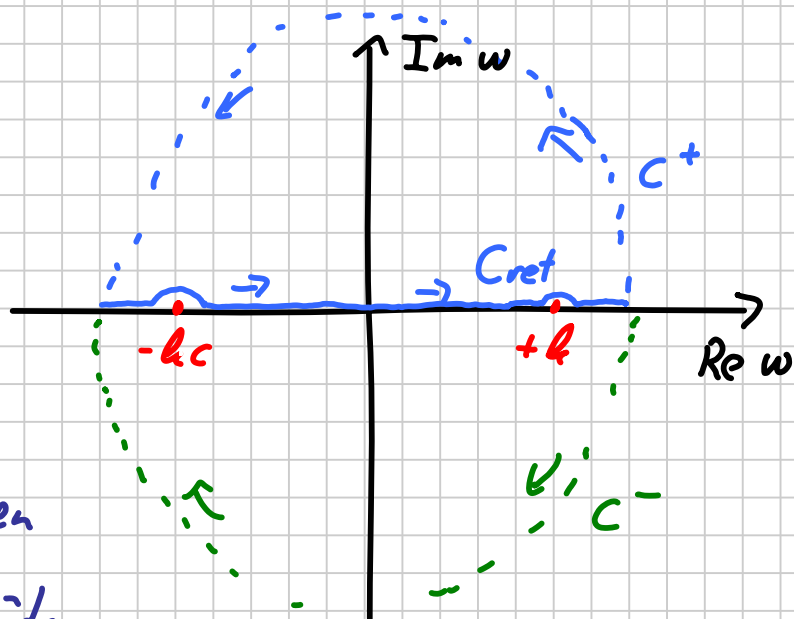
Durchführen des Grenzübergangs  $a \rightarrow \infty$  auf beiden Seiten von  $\square$  liefert das Ergebnis  $\mathcal{I}(t) = \pi e^{-t}$

Für  $t < 0$  muss die Kontur über die untere Halbebene geschlossen werden  $\rightarrow$  Residuum  $\frac{e^t}{-2i}$ , aber Vorzeichenwechsel wegen negativem Umlaufsinn.

(101) Insgesamt:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1} dx = \pi e^{-|t|} \quad \square // 7.1.13$

Bei der Anwendung des Residuensatzes auf das  $w$ -Integral in (\*\*) gibt es ein Problem: die Polstellen liegen bei  $w = \pm c|k|$ , also auf der reellen Achse, entlang der eigentlich integriert werden soll.

**Lösung:** wir deformieren den Integrationsweg.



Für die retardierte Green-Funktion passieren wir beide Singularitäten oberhalb ( $w \rightarrow w + i\epsilon$ ).

Für  $t < t'$  ist die Exponentialfunktion  $e^{-iw(t-t')}$  in der oberen Halbebene beschränkt, so dass wir das Integral über  $C^+$  ohne Beitrag schließen können (bei Radius  $a$  gilt  $|\frac{1}{w^2 - c^2 k^2}| \leq \frac{1}{a^2 - c^2 k^2}$  für  $|w| > ck$ ).

Dann sind keine Residuen im Pfad

$$\leadsto G_{\text{ret}}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = 0 \quad \text{für } t < t'$$

Für  $t > t'$  müssen wir mit  $C^-$  nach unten schließen und erhalten:

$$G_{\text{ret}}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \cdot$$

$$\int_{C_{\text{ret}} \cup C^-} dw \underbrace{\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega - ck)(\omega + ck)}}_{f(\omega)}$$

$$\left( \begin{aligned} &= -2\pi i [\text{Res}(f, \omega = ck) + \text{Res}(f, \omega = -ck)] \\ &= -2\pi i \left[ \frac{e^{-ick(t-t')}}{2ck} + \frac{e^{ick(t-t')}}{-2ck} \right] \end{aligned} \right)$$

$$= \frac{ic}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{1}{2k} [e^{-ick(t-t')} - e^{ick(t-t')}]$$

$$= \frac{ic}{8\pi^2} \int_0^\infty dk k \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|\cos\theta} [e^{-ick(t-t')} - e^{ick(t-t')}]$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{c}{16\pi^2} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \int_{-\infty}^\infty dk [e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|} - e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|}] [e^{ick(t-t')} - e^{-ick(t-t')}]$$

Symmetrie in  $k \rightarrow -k$

$$= \frac{c}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \delta(c(t-t') - |\vec{x}-\vec{x}'|)$$

↑ Grenze ausgeweitet

Insgesamt lautet die retardierte Greenfunktion:

$$G_{\text{ret}}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \Theta(t-t') \delta\left((t-t') - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)$$

(103)

↑ hier überflüssig

Die allgemeine retardierte Lösung der inhomogenen Wellengleichung  $\square f = g$  hat damit die Form:

$$f_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int dt' \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left((t-t') - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right) g(\vec{x}', t')$$

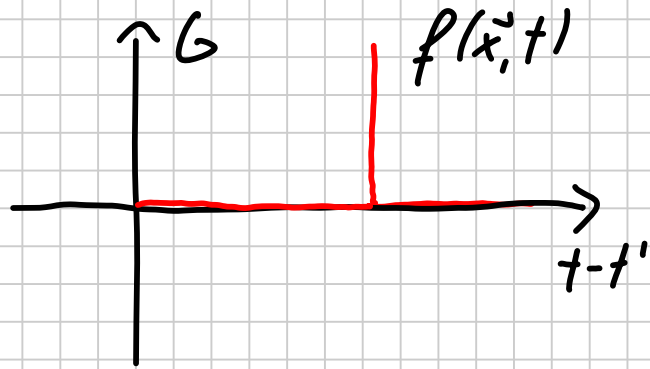
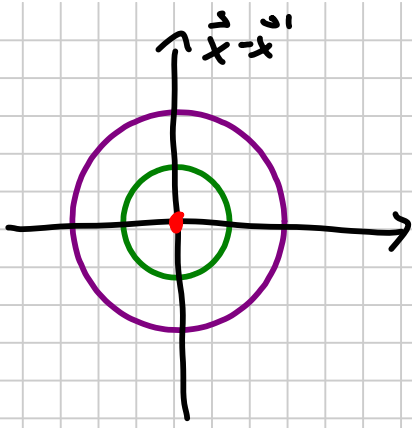
$$= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{g\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{g(\vec{x}', t_{\text{ret}})}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

mit  $t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$

Die retardierte Green-Funktion kann auch geschrieben werden als:  $G_{\text{ret}}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \frac{c}{2\pi} \theta(t - t') \delta(c^2(t - t')^2 - |\vec{x} - \vec{x}'|^2)$ .

Für die avancierte Green-Funktion trägt nur das Integral über die obere Halbebene bei (für  $t < t'$ ); man erhält:  $G_{\text{av}}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -\frac{c}{2\pi} \theta(t' - t) \delta(c^2(t - t')^2 - |\vec{x} - \vec{x}'|^2)$ .

**Beachte:** physikalisch bedeutet die Proportionalität von  $G_{\text{ret}}$  zu einer  $\delta$ -Funktion, dass jedes Signal (im freien Raum) das Feld an einer festen Stelle  $\vec{x}$  nur zu einem einzigen Zeitpunkt  $t > t'$  beeinflusst:



Nicht nur die Wellenfront breitet sich also mit Geschwindigkeit aus, sondern auch die hintere Flanke des Signals (Soliton).

Dies gilt nur bei ungerader Dimensionalität  $d=3$  des Raums! Obiger Schritt (\*\*\*) wäre z.B. in  $d=2$  nicht möglich  $\rightarrow$  keine Deltafunktion.

Stattdessen lässt lautet die Green-Funktion der Wellengleichung dann:

$$G_{\text{ret}}^{d=2}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \frac{c}{8\pi} \frac{\Theta\left(t-t' - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)}{\sqrt{c^2(t-t')^2 - |\vec{x}-\vec{x}'|^2}} \quad (\square\square)$$



Dieses Verhalten ( $\delta$ -Quelle erzeugt für alle Beobachter

zeitlich abklingendes Signal) nennt man

⑩⑤ Nachhall (Reverberation).

Das Ergebnis  $\square\square$  lässt sich als Erregung längs einer Gerade in  $d=3$  interpretieren.

In  $d=3$  ergibt sich für die elm. Potentiale

$$A^\mu(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int d^3x' \int dt' \frac{j^\mu(\vec{x}', t')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \delta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}) \quad (\square)$$

### 5.3 Das Feld bewegter Punktladungen

Wir betrachten nun eine Punktladung mit Ladung  $q$  und Koordinaten  $\vec{x}_q(t')$  sowie Geschwindigkeit  $\vec{u}(t') = \frac{d}{dt'} \vec{x}_q(t')$ ;  $\vec{\beta} = \frac{\vec{u}}{c}$

→ Ladungs- und Stromdichte

$$\vec{\rho}(\vec{x}', t') = q \delta(\vec{x}' - \vec{x}_q(t'))$$

$$\vec{j}(\vec{x}', t') = q \vec{u}(t') \delta(\vec{x}' - \vec{x}_q(t'))$$

bzw.  $j^\mu(\vec{x}', t') = \frac{qc}{\gamma_u} u^\mu \delta(\vec{x}' - \vec{x}_q(t'))$ ;  $u^\mu = \gamma_u(1, \vec{\beta})$   
*Vgl. Kontinuum:  $j^\mu = \rho_0 c u^\mu$*

Einsetzen in  $(\square)$  liefert:

$$A^\mu(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{u^\mu(t')}{\gamma_u(t') |\vec{x} - \vec{x}_q(t')|} \delta(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}_q(t')|}{c}) \quad (\square)$$

Wir führen nun die retardierte Zeit  $\tau = \tau(\vec{x}, t)$

$$\text{mit } \tau + \frac{|\vec{x} - \vec{x}_q(\tau)|}{c} = t \quad (0)$$

sowie den Relativvektor  $\vec{R}(\vec{x}, \tau) = \vec{x} - \vec{x}_q(\tau)$  ein.

Die Selbstkonsistenzgleichung (0) drücken wir als Nullstelle der Funktion  $F_{\vec{x}, t}(\tau)$  aus:

$$F_{\vec{x}, t}(\tau) \equiv \tau + \frac{R(\vec{x}, \tau)}{c} - t = 0,$$

die wegen  $|\vec{u}| < c$  eine eindeutige Lösung hat.

$$\rightarrow \delta\left(t' - t + \frac{R(\vec{x}, t')}{c}\right) = \delta[F_{\vec{x}, t}(t')] = \frac{\delta(t' - \tau)}{\left|\frac{dF_{\vec{x}, t}(\tau)}{d\tau}\right|}$$

$$\text{Hierbei gilt: } \frac{dF_{\vec{x}, t}(\tau)}{d\tau} = 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial \tau}(\vec{x}, \tau)$$

$$\text{mit } \frac{\partial R}{\partial \tau} = \frac{1}{2R} \frac{\partial (R^2)}{\partial \tau} = \frac{\vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial \tau}}{R} = -\vec{R} \cdot \vec{u}$$

$$\rightarrow \delta\left(t' - t + \frac{R(\vec{x}, \tau)}{c}\right) = \frac{\delta(t' - \tau)}{1 - \underbrace{\vec{\beta}(\tau) \cdot \vec{R}(\vec{x}, \tau)}_{\leq 1}}$$

Einsetzen in (10) liefert:

$$\begin{aligned} A^{\mu}(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( dt' \frac{u^{\mu}(t')}{\gamma_u(t') R(\vec{x}, t')} \frac{\delta(t' - \tau)}{1 - \vec{\beta}(\tau) \cdot \vec{R}(\vec{x}, \tau)} \right) \\ &= \frac{q u^{\mu}(\tau)}{4\pi\epsilon_0 \gamma_u(\tau)} \frac{1}{R(\vec{x}, \tau) - \vec{\beta}(\tau) \cdot \vec{R}(\vec{x}, \tau)} = \frac{q u^{\mu}(\tau)}{4\pi\epsilon_0 R_{\perp} u^{\nu}} \end{aligned}$$

mit dem 4-Differenzvektor

$$(\vec{R}, \vec{R}) = (c(t-\tau), \vec{x} - \vec{x}_q(\tau)) \quad // \quad 09.01.13$$

Die Lösung  $A^\mu(x^\mu) = \frac{q u^\mu}{4\pi\epsilon_0 R_\nu u^\nu}$

ist manifest kovariant. Die Aufteilung in Zeit- und Ortsanteil liefert die Liénard-Wiechert-

Potentiale:

$$\phi(\vec{R}, \vec{\beta}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}}$$

$$\vec{A}(\vec{R}, \vec{\beta}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\beta}}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}}$$

mit  $\vec{R} = \vec{R}(\vec{x}, \tau)$ ;  $\vec{\beta} = \vec{\beta}(\tau)$ ,

wobei die retardierte Zeit mit der Zeitvariable  $t$  verknüpft ist:  $\tau = \tau(\vec{x}, t)$ . Wegen dieser

impliziten Abhängigkeit ist die Berechnung der Felder  $\vec{E}(\vec{x}, t) = -\nabla_{\vec{x}}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ;  $\vec{B}(\vec{x}, t) = \nabla_{\vec{x}} \times \vec{A}$

schwierig. Eine längere Rechnung (siehe z.B. App.

108) A im van-Dongen-Skriptl liefert;

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{(1-\beta^2)(\hat{R}-\vec{\beta}) + \frac{R}{c} \hat{R} \times [(\hat{R}-\vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1-\vec{\beta} \cdot \hat{R})^3}, \quad (\square)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{R} \times \vec{E},$$

wobei  $\dot{\vec{\beta}} = \frac{d\vec{\beta}}{dt}(\tau)$  die Beschleunigung des Teilchens (geteilt durch  $c$ ) bezeichnet. Offenbar gibt es 2 Anteile mit verschiedenem Charakter:

- statischer Term:  $\beta$ -unabhängig,  $\propto \frac{1}{R^2}$
- Strahlungsterm:  $\propto \dot{\beta}$ ,  $\propto \frac{1}{R}$

Generisch dominiert der 2. Term bei großen Abständen. Nur dieser trägt auch zur Abstrahlung von Energie ins Unendliche bei (laut Relativitätsprinzip ist diese bei  $\dot{\beta} = 0$  nicht möglich).

### 5.3.1 Strahlungsleistung beschleunigter Ladungen

Für die Abstrahlung von Energie ins Unendliche ist nur der Strahlungsterm wichtig:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c R} \frac{\hat{R} \times [(\hat{R}-\vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1-\vec{\beta} \cdot \hat{R})^3}; \quad c\vec{B} = \hat{R} \times \vec{E}$$

Für den Poynting-Vektor  $\vec{S}$  folgt:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \times (\vec{R} \times \dot{\vec{E}}) = -\epsilon_0 c [(\vec{E} \cdot \vec{R}) \dot{\vec{E}} - E^2 \vec{R}] \\ &= \epsilon_0 c E^2 \hat{R}\end{aligned}$$

Die Energie strömt also radial nach außen. Die Amplitude ist im Bezugssystem des Beobachters (mit

Zeit  $t$ ):  $\vec{S} \cdot \hat{R} = \epsilon_0 c E^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c R^2} \frac{|\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{R})^6}$

Oft interessanter: Energiestromdichte im Bezugssystem der Quelle, d.h. in retardierter Zeit:

$$\vec{S} \cdot \hat{R} \frac{dt}{d\tau} = \vec{S} \cdot \hat{R} (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{R})$$

Der Energiestrom pro Raumwinkel beträgt dann:

$$\frac{dW}{d\Omega} = R^2 (\vec{S} \cdot \hat{R}) (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{R}) = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{R})^5} \quad (4)$$

Wir betrachten jetzt interessante Spezialfälle:

a) nichtrelativistischer Grenzfall

$$\frac{dW}{d\Omega} \xrightarrow{\beta \ll 1} \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \underbrace{|\hat{R} \times (\hat{R} \times \dot{\vec{\beta}})|^2}_{= |\dot{\vec{\beta}}|^2 \sin^2(\psi)} = \frac{q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2 \sin^2(\psi)}{16\pi^2 \epsilon_0 c},$$

wobei  $\psi$  den Winkel zwischen  $\hat{R}$  und  $\dot{\vec{\beta}}$  angibt.

Die Integration über den Raumwinkel

$$\int d\Omega \sin^2|\Psi| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\psi \sin^3(\psi) = 2\pi \int_{-1}^1 dx (1-x^2) = \frac{8\pi}{3}$$

liefert für die Gesamtstrahlungsleistung:

$$W = \int d\Omega \frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2}{6\pi \epsilon_0 c} = \frac{q^2 |\ddot{\vec{x}}|^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad \text{Larmor-Formel}$$

b) geradlinig beschleunigte Bewegung

Auch für  $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$  fällt  $\vec{\beta}$  im Zähler von  $|\Delta|$  weg:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\hat{R} \times (\hat{R} \times \dot{\vec{\beta}})|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{R})^5} = \frac{q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2}{16\pi \epsilon_0 c} \frac{\sin^2(\Psi)}{(1 - \beta \cos(\Psi))^5} \quad (\triangleright)$$

Mit  $x = \cos(\Psi)$  erreicht der Winkelanteil

$\frac{1-x^2}{(1-\beta x)^5}$  sein Maximum bei einem Winkel

$$x_{\max} = \cos(\Psi_{\max}) = \frac{\sqrt{1+15\beta^2} - 1}{3\beta}$$

Integration über  $x$  liefert die Gesamtleistung:

$$W = \frac{q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \int_{-1}^1 dx \frac{1-x^2}{(1-\beta x)^5} = \frac{q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2}{6\pi \epsilon_0 c}$$

Nichtrelativistischer Limes  $\rightarrow$  Larmor-Formel

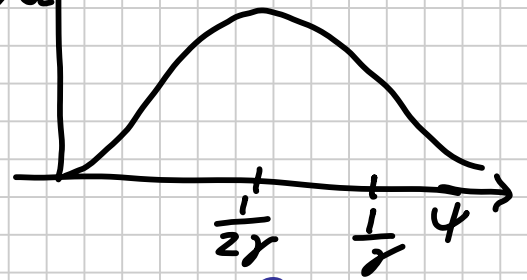
Für den ultrarelativistischen Grenzfall findet man



mit  $\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \leadsto \beta \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$   $\frac{dW}{d\Omega}$

$(\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2})$

$\psi_{\max} \sim \frac{1}{2\gamma} \rightarrow 0 \quad (\gamma \rightarrow \infty)$



Die Abstrahlung findet also bevorzugt in Bewegungsrichtung statt. Daher können wir die Winkel entwickeln:  $\sin(\psi) \approx \psi$ ;  $\cos(\psi) \approx 1 - \frac{\psi^2}{2}$

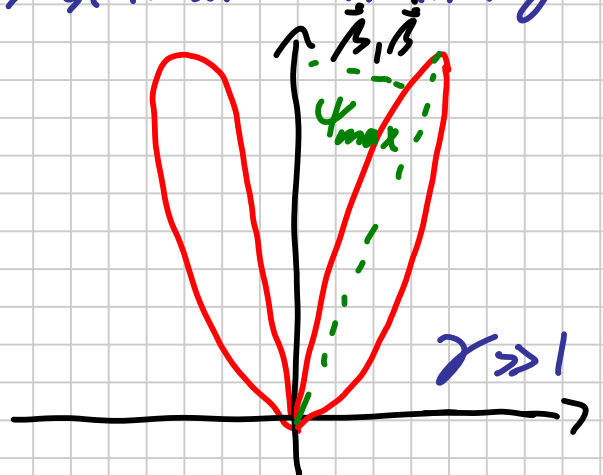
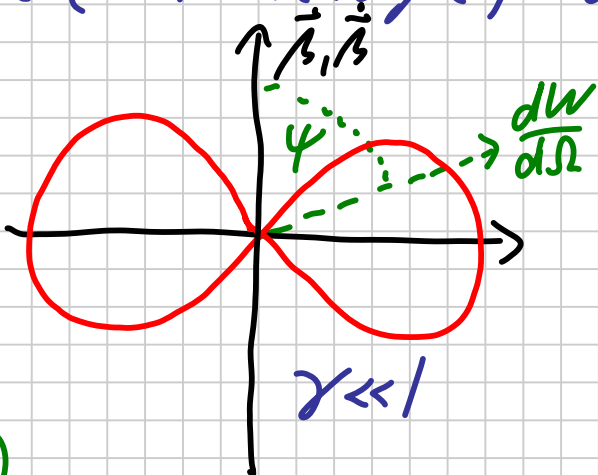
$$\rightarrow \frac{\sin^2(\psi)}{(1 - \beta \cos(\psi))^5} \approx \frac{\psi^2}{[1 - (1 - \frac{1}{2\gamma^2})(1 - \frac{1}{2}\psi^2)]^5} \approx \frac{\psi^2}{(\frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1}{2}\psi^2)^5}$$

$$= 32 \gamma^8 \frac{(\gamma\psi)^2}{(1 + (\gamma\psi)^2)^5}$$

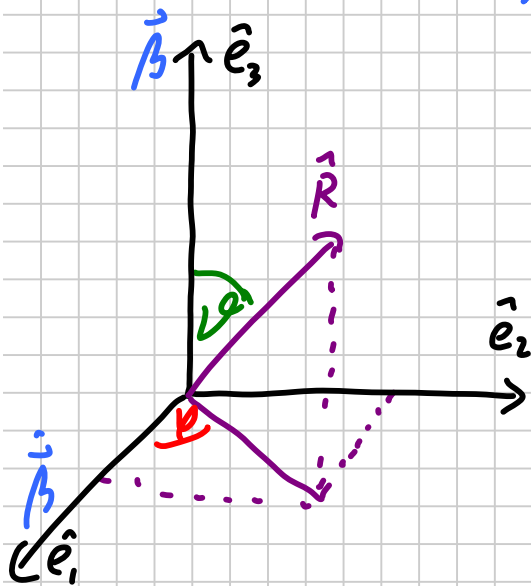
$$\Rightarrow \frac{dW}{d\Omega} \sim \frac{2q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2 \gamma^8}{\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{(\gamma\psi)^2}{(1 + (\gamma\psi)^2)^5} \quad (\gamma \rightarrow \infty)$$

$$\leadsto \sqrt{\langle \psi^2 \rangle} \sim \frac{1}{\gamma} = \frac{m_0 c^2}{E_g} \quad (\gamma \rightarrow \infty)$$

Der quadratische Mittelwert von  $\psi$  fällt also wie  $(\text{Gesamtenergie})^{-1}$  ab  $\rightarrow$  schmale Verteilung



### c) Kreisbewegung bei konstanter Geschwindigkeit



Wir wählen  $\hat{e}_3$  entlang der instantanen Geschwindigkeit und  $\hat{e}_1$  entlang der instantanen Beschleunigung.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dW}{d\Omega} &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{|\dot{\vec{R}} \times [(\dot{\vec{R}} \cdot \vec{\beta}) \times \vec{\beta}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{\vec{R}})^5} \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{[1 - \beta \cos(\vartheta)]^2 - (1 - \beta^2) \sin^2(\vartheta) \cos^2(\varphi)}{(1 - \beta \cos(\vartheta))^5} \\ \Rightarrow W &= \int d\Omega \frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c} \end{aligned}$$

Im ultrarelativistischen Limes erhält man für die Winkelverteilung:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2 \gamma^6}{2\pi^2\epsilon_0 c} \frac{[1 + (\gamma\vartheta)^2]^2 - 4(\gamma\vartheta)^2 \cos^2(\varphi)}{(1 + (\gamma\vartheta)^2)^5} \quad (\gamma \rightarrow \infty)$$

Wieder gilt:  $\sqrt{1 - \beta^2} \sim \frac{1}{\gamma} = \frac{m_0 c}{E_\gamma} \quad (\gamma \rightarrow \infty)$

In jedem Fall konzentriert sich die Strahlung  
 (113) also auf die Bewegungsrichtung. // 14.01.13

## 5.4 Strahlungsfelder lokalisierter oszillierender Quellen

Wir betrachten nun ein lokalisiertes dynamisches System von Ladungen und Strömen und das davon erzeugte elm. Feld, bzw. dessen Ausbreitung im Vakuum.

**Linearität:** betrachte Strahlung einzelner Fourier-Komponenten

$$\rho(\vec{x}, t) = \operatorname{Re} [\rho(\vec{x}) e^{-i\omega t}]$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \operatorname{Re} [\vec{j}(\vec{x}) e^{-i\omega t}]$$

der Ladungs- und Stromverteilung mit Frequenz  $\omega$ .

**Achtung:**  $\rho(\vec{x})$ ,  $\vec{j}(\vec{x})$  sind i. A. nicht reell

Kontinuitätsgleichung:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) = i\omega \rho(\vec{x})$

Das retardierte 4-Potential lautet nach Sec. 5.2:

$$A^\mu(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int d^3x' \frac{j^\mu(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\leadsto \phi(\vec{x}, t) = \operatorname{Re} [\tilde{\phi}(\vec{x}) e^{-i\omega t}], \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \operatorname{Re} [\vec{A}(\vec{x}) e^{-i\omega t}]$$

mit  $\tilde{\phi}(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}') e^{i\mathbf{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|}$ ;  $\vec{A}(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{i\mathbf{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\vec{x} - \vec{x}'|}$

Hierbei ist natürlich  $k = \frac{\omega}{c}$ . Aus der Lorenzgleichung  $\partial_\nu A^\nu = 0$  folgt:  $\tilde{\phi}(\vec{x}) = \frac{c}{ik} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x})$

Die Felder außerhalb der Quellen folgen mit  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ,  $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$  (Vakuum) als  $\vec{B}(\vec{x}, t) = \text{Re}[\vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t}]$ ;  $\vec{E}(\vec{x}, t) = \text{Re}[\vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}]$ , wobei  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ;  $\vec{E} = \frac{ic}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}$

Wir können uns im Folgenden also auf die Berechnung des Vektorpotentials  $\vec{A}$  beschränken und brauchen  $\tilde{\phi}(\vec{x})$  nicht berechnen.

**Grundannahme**, um im Folgenden konkrete Aussagen über Strahlungsverteilung und Intensität treffen zu können: die Wellenlänge der Strahlung ist **groß** gegenüber der **Ausdehnung**  $a$  der Quelle:  $ka = \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1$

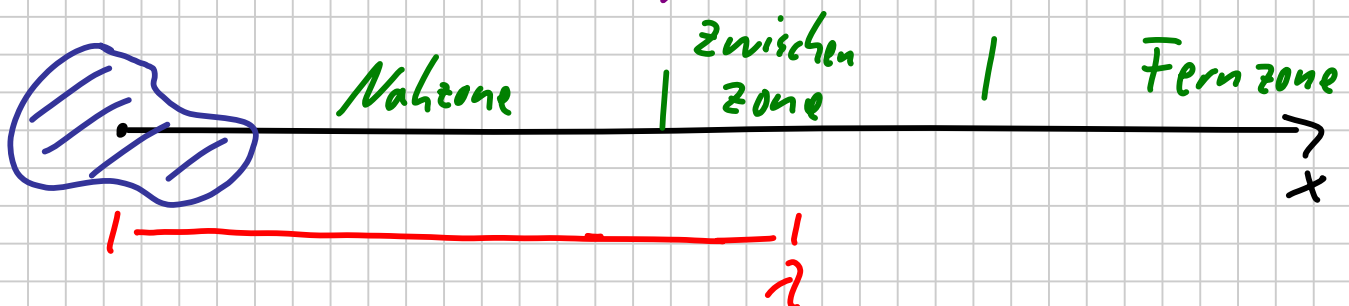
Im Rahmen einer Fourier-Zerlegung ist bei geg. Quelldurchmesser  $a$  unsere Theorie also nur

⑪ für  $\omega < \omega_c \approx \frac{c}{a}$  gültig.

Wenn wir als Beispiel ein Teilchen betrachten, das sich mit Frequenz  $\omega$  auf einem Kreis mit Radius  $a$  bewegt, bedeutet das:  $|\vec{\beta}| = \frac{|\dot{\vec{x}}|}{c} = \frac{\omega a}{c} = ka \ll 1$ . Wir beschränken uns daher auf **nichtrelativistische Systeme**. Wir nehmen auch an, dass die Quelle um den Ursprung lokalisiert ist:  $\gamma^\mu(\vec{x}', t') = 0$  für  $|\vec{x}'| > a$ .

Insgesamt existieren bei der Berechnung des Feldes am Ort  $\vec{x}$  also **3 Längenskalen**:  $a$ ,  $\lambda$  und  $x = |\vec{x}|$ , wobei n.V.  $a \ll \lambda$ . Zusätzlich fordern wir  $a \ll x$ . Damit sind für  $x$  **3 Raumbereiche** zu unterscheiden (ggf. abhängig von Fourier-Komponente):

- **Nahzone, statische Zone**:  $a \ll x \ll \lambda$
- **Zwischen-, Induktionszone**:  $a \ll x \sim \lambda$
- **Fern-, Strahlungszone**:  $a \ll \lambda \ll x$



In allen 3 Zonen können wir entwickeln:

$$|\vec{x} - \vec{x}'| \sim x \left[ 1 - \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{x^2} + \frac{\vec{x}'^T (\vec{x}' \vec{x}'^T - |\vec{x}'|^2 \mathbb{1}) \vec{x}}{2x^3} + \dots \right]$$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \sim \frac{1}{x} \left[ 1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{x^2} + \frac{\vec{x}'^T (3\vec{x}' \vec{x}'^T - |\vec{x}'|^2 \mathbb{1}) \vec{x}}{2x^3} + \dots \right]$$

Einsetzen in \* liefert:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikx}}{x} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') e^{-ik(\vec{x} \cdot \vec{x}' + \dots)} \left( 1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{x^2} + \dots \right)$$

### 5.4.1 Elm. Feld in der Nahzone

In der Nahzone gilt ( $ka \ll 1$  und)  $lx \ll 1$

$$\rightarrow \vec{A}(\vec{x}) \sim \frac{\mu_0}{4\pi x} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}')$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi x} \int d^3x' \vec{x}' \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}')}_{i\omega \rho(\vec{x}')}$$

$$= -\frac{i\omega \mu_0}{4\pi x} \vec{d}; \quad \vec{d} = \int d^3x' \vec{x}' \rho(\vec{x}')$$

Hier bezeichnet  $\vec{d}$  das elektrische Dipolmoment

Damit ergeben sich die elm. Felder als

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \frac{ik}{4\pi \epsilon_0 c x^2} \vec{x} \times \vec{d}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{ic}{\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \frac{(3\vec{x}\vec{x}^T - \mathbb{1})\vec{d}}{4\pi \epsilon_0 x^3}$$

Das magnetische Feld  $c\vec{B}$  ist also um einen Faktor  $\frac{a}{x} \ll 1$  kleiner als das elektrische Feld  $\rightarrow$  Die Nahzone ist durch das E-Feld dominiert, das die gleiche Form hat wie das Dipolfeld der E-Statik.

Erst in der Induktionszone erlangt das magn. Feld  $c\vec{B}$  („magnetische Induktion“) die Größenordnung des E-Feldes.

### 5.4.2 Elm. Feld in der Fernzone

In der Fernzone sind  $\frac{a}{x}$ ,  $\frac{a^2}{x^2}$  und  $\frac{1}{x}$  klein:

$$\vec{A}(\vec{x}) \sim \frac{\mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \left\{ \underbrace{\int d^3x' \vec{j}(\vec{x}')}_{-i\omega \vec{d}} - ik \left[ \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x}'|} \right] \vec{x} + \dots \right\}$$

Wir zerlegen den Tensor im 2. Term in symm. und antisymm. Anteile:

$$\int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x}'|} = \frac{1}{2} \int d^3x' [\vec{x}' \vec{j}^T + \vec{j}(\vec{x}')^T] + \frac{1}{2} \int d^3x' [\vec{j}(\vec{x}')^T - \vec{x}' \vec{j}^T]$$

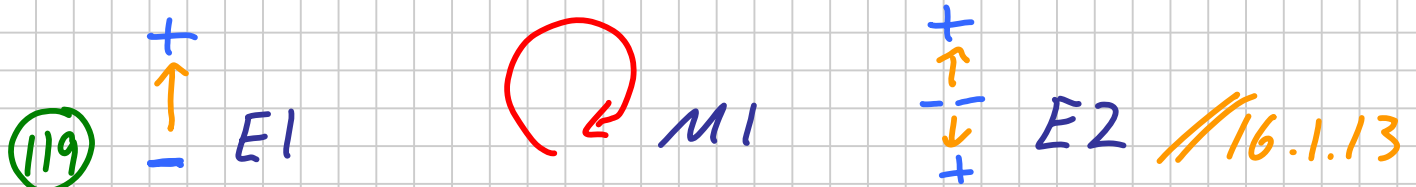
Der 2. Anteil wird als magnetischer Dipol-  
 tensor bezeichnet. Der erste Anteil lässt sich  
 dagegen (bei Periodizität) im Wesentlichen als  
 elektrisches Quadrupolmoment  $Q$  schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3x' [\vec{x}' \vec{j}^T + \vec{j}(\vec{x}')^T] &= -\frac{1}{2} \int d\vec{x}' \vec{x}'(\vec{x}')^T \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}') \\ &= -\frac{i\omega}{2} \int d\vec{x}' \vec{x}'(\vec{x}')^T \rho(\vec{x}') \\ &= -\frac{i\omega}{3} \left[ Q + \frac{1}{2} \int d^3x' |\vec{x}'|^2 \rho(\vec{x}') \underline{\underline{1}} \right] \equiv -\frac{i\omega}{3} \tilde{Q} \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &\sim \frac{\mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \left[ -i\omega \vec{d} - ik\hat{x} \cdot (D - \frac{i\omega}{3} \tilde{Q}) + \dots \right] \\ &\equiv \vec{A}_{E1} + \vec{A}_{M1} + \vec{A}_{E2} \end{aligned}$$

Diese 3 führenden Terme werden als  
 elektrische Dipolstrahlung (E1), magnetische  
 Dipolstrahlung (M1) und elektrische  
 Quadrupolstrahlung (E2) bezeichnet.



# E1: elektrische Dipolstrahlung

Ein oszillierender elektrischer Dipol  $\vec{d} \cos(\omega t)$  induziert das (komplex notierte) Magnetfeld

$$\begin{aligned}\vec{B}_{E1} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_{E1} = \vec{\nabla} \times \left( -i\omega \frac{\mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \vec{d} \right) \\ &= -\frac{i\omega \mu_0}{4\pi} \hat{x} \times \vec{d} \frac{d}{dx} \frac{e^{ikx}}{x} \\ &= -\frac{i\omega \mu_0}{4\pi} \hat{x} \times \vec{d} \left( ik \frac{e^{ikx}}{x} - \frac{e^{ikx}}{x^2} \right) \\ &= \frac{k^2 \mu_0 c e^{ikx}}{4\pi x} \left( 1 - \frac{1}{ikx} \right) \hat{x} \times \vec{d} \\ &\stackrel{kx \gg 1}{\sim} \frac{k^2 \mu_0 c e^{ikx}}{4\pi x} \hat{x} \times \vec{d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\vec{\nabla} \times (\vec{a} f(x))]_i &= \epsilon_{ijk} a_j \partial_k f(x) = \epsilon_{ija} a_j f'(x) \frac{x_i}{x} \\ &= f'(x) [\hat{x} \times \vec{a}]_i\end{aligned}$$

und das elektrische Feld

$$\begin{aligned}\vec{E}_{E1} &= \frac{ic}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}_{E1} \\ &= \frac{ik e^{ikx}}{4\pi \epsilon_0 x^2} \left[ \left( ikx - 3 + \frac{3}{ikx} \right) \hat{x} \hat{x}^T - \left( ikx - 1 + \frac{1}{ikx} \right) \mathbb{1} \right] \vec{d} \\ &\sim -\frac{k^2 e^{ikx}}{4\pi \epsilon_0 x} [\hat{x} \hat{x}^T - \mathbb{1}] \vec{d} \\ &= c \vec{B}_{E1} \times \hat{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\hat{x} \times \vec{d}) \times \hat{x} &= -\hat{x} \times (\hat{x} \times \vec{d}) \\ &= -\hat{x} (\hat{x} \cdot \vec{d}) + \vec{d} \\ &= -[\hat{x} \hat{x}^T - \mathbb{1}] \vec{d}\end{aligned}$$

Der zeitliche Mittelwert der Leistung pro Raumwinkel  $\overline{\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)}_{EI} = \frac{1}{\mu_0} \overline{\vec{E} \times \vec{B}} \cdot \hat{x} x^2$

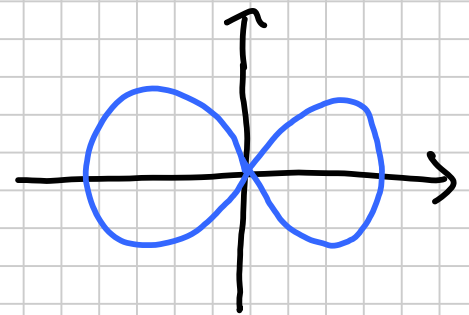
berechnet sich mit Hilfe der Beziehung

$$\begin{aligned} \overline{\vec{E} \times \vec{B}} \cdot \hat{x} &= \overline{\text{Re} [\vec{E} e^{-i\omega t} \times \vec{B} e^{-i\omega t}]} \cdot \hat{x} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} (\vec{E} \times \vec{B}^*) \cdot \hat{x} \\ &= \frac{c}{2} \text{Re} [(\vec{B} \times \hat{x}) \times \vec{B}^*] \cdot \hat{x} \\ &= \frac{c}{2} |\vec{B} \times \hat{x}|^2 \end{aligned} \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

zu  $\overline{\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)}_{EI} = \frac{cx^2}{2\mu_0} |\vec{B}_{EI} \times \hat{x}|^2 = \frac{cx^2}{2\mu_0} \left(\frac{h^2 \mu_0 c}{4\pi x}\right)^2 |(\hat{x} \times \vec{d}) \times \hat{x}|^2$

$$= \frac{c h^4}{32 \pi^2 \epsilon_0} |\hat{x} \times \vec{d}|^2 = \frac{c h^4 |\vec{d}|^2}{32 \pi^2 \epsilon_0} \sin^2(\varphi)$$

wobei  $\varphi$  den Winkel zwischen  $\hat{x}$  und  $\vec{d}$  angibt.



Der Beitrag von EI zur zeitgemittelten Gesamtleistung der Strahlung beträgt also

$$\overline{W}_{EI} = \int d\Omega \overline{\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)}_{EI} = \frac{c h^4 |\vec{d}|^2}{12 \pi \epsilon_0}$$

# M1+E2: Magnetische Dipol + elektrische Quadrupolstrahlung

Wir betrachten nun den mit

$$\vec{A}_{M1+E2} = -\frac{i\hbar\mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} (D - \frac{i\omega}{3} \tilde{Q}) \hat{x}$$

assoziierten Strahlungsbeitrag. Wieder trägt nur der auf  $e^{ikx}$  wirkende Anteil der Ableitung bei:

$$\begin{aligned}\vec{B}_{M1+E2} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_{M1+E2} \sim i\hbar \hat{x} \times A_{M1+E2} \\ &= \frac{\hbar^2 \mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \hat{x} \times \left[ (D - \frac{i\omega}{3} Q) - \frac{i\omega}{3} \left( d^2 \hat{x} \hat{x} \right) \right] \hat{x} \\ &= \frac{\hbar^2 \mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \hat{x} \times (M \hat{x}); \quad M = D - \frac{i\omega}{3} Q\end{aligned}$$

*ohne Tilde*  
*Diagonaleanteil v.  $\tilde{Q}$*

$$\vec{E}_{M1+E2} = \frac{ic}{\hbar} \vec{D} \times \vec{B}_{M1+E2} \sim -c \hat{x} \times \vec{B}_{M1+E2}$$

Mittlere Strahlungsleistung pro Raumwinkel:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)_{M1+E2} &= \frac{1}{\mu} \overline{\vec{E} + \vec{B} \cdot \hat{x}} x^2 \sim \frac{cx^2}{2\mu_0} |\hat{x} \times \vec{B}_{M1+E2}|^2 \\ &\sim \frac{\mu_0 c \hbar^4}{32\pi^2} |\hat{x} \times [\hat{x} \times (M \hat{x})]|^2 \\ &= \frac{\mu_0 c \hbar^4}{32\pi^2} |\hat{x} \times (M \hat{x})|^2\end{aligned}$$

Für die Raumwinkel-Mittelwerte  $\langle \dots \rangle_{\Omega}$  gilt:

$$\langle |\vec{x} \times (M\vec{x})|^2 \rangle_{\Omega} = \frac{1}{3} \text{Sp}(D D^+) + \frac{\omega^2}{45} \text{Sp}(Q Q^+)$$

Mit dem magnetischen Moment  $\vec{m}$

$$D_{ij} = -\epsilon_{ijk} m_k; \quad \vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3x' \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')$$

gilt:  $\text{Sp}(D D^+) = 2|\vec{m}|^2$ . Insgesamt folgt für die zeitgemittelte Gesamtleistung (aus M1 + E2):

$$\begin{aligned} \overline{W}_{M1+E2} &\sim \frac{\mu_0 c^3 \hbar^4}{8\pi} \langle |\vec{x} \times (M\vec{x})|^2 \rangle_{\Omega} \\ &= \frac{\mu_0 c^3 \hbar^4}{12\pi} \left[ \underbrace{|\vec{m}|^2}_{M1} + \underbrace{\frac{\omega^2}{30} \text{Sp}(Q Q^+)}_{E2} \right] \end{aligned}$$

Diese ist also additiv in  $\overline{W}_{M1}$  und  $\overline{W}_{E2}$ .

Die Winkelverteilung von M1-Strahlung lautet:

$$\left( \frac{dW}{d\Omega} \right)_{M1} = \frac{\mu_0 c^3 \hbar^4}{32\pi^2} |\vec{x} \times (\vec{x} + \vec{m})|^2 = \frac{\mu_0 c^3 \hbar^4 |\vec{m}|^2}{32\pi^2} \sin^2(\vartheta),$$

wobei  $\vartheta$  jetzt der Winkel zwischen  $\vec{x}$  und  $\vec{m}$  ist.

Für die E2-Strahlung gilt:

$$\left( \frac{dW}{d\Omega} \right)_{E2} = \frac{c \hbar^6}{3^2 2^5 \pi^2 \epsilon_0} |\vec{x} + (Q\vec{x})|^2,$$

(123) wobei  $Q$  spurfrei und symmetrisch, aber i.A.

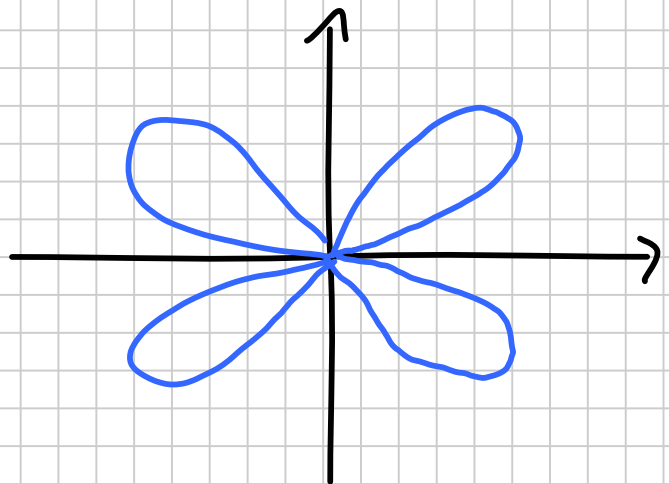
komplex und daher nicht diagonalisierbar ist.

**Beispiel:** nehmen wir zur Illustration die Form  $Q = \text{diag}(Q_0, Q_0 - 2Q_0)$  an, so folgt die Winkelverteilung des Strahlungsfeldes als

$$\left(\frac{dW}{d\Omega}\right)_{E_2} = \frac{c k^6 |Q_0|^2}{2^7 \pi^2 \epsilon_0} \sin^2(2\vartheta),$$

wobei  $\vartheta$  den Winkel zwischen  $\hat{x}$  und der angenommenen Symmetrieachse  $\hat{e}_3$  bezeichnet.

I.A. kann die Form auch komplizierter sein.



Wegen der Annahme, dass die Ladungs- und Stromverteilung einen kleinen Durchmesser (gegenüber  $\lambda$ ) hat, tragen in der Entwicklung meist nur die niedrigsten nicht-verschwindenden Momente signifikant bei.