

## Kapitel 6: Relativistische Dynamik

Theorie 1:  $\vec{F} = m \vec{a}$

Kapitel 4: relativistische Verallgemeinerung

Theorie 2: Analytische Mechanik:  
Hamilton'sches Prinzip  
Lagrange - Gleichungen  
Hamilton - Gleichungen  
Hamilton - Jacobi - Formalismus  
...

**Frage:** Relativistische Verallgemeinerung der Methoden von Theorie 2 möglich?

**Antwort:** Im Prinzip ja: sogar relativ einfach für einzelne Teilchen

**Aber:** Fernwirkungen verboten  $\rightarrow$   
Zwangsbedingungen problematisch,  
(Gravitation  $\rightarrow$  allgemeine Relativitätstheorie)

## 6.1 Kräftefreie Teilchen

Der gesuchte Formalismus muss folgendes reproduzieren:

(i) die freie Bewegungsgleichung  $m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$

(mit Lösung:  $u^\mu = \text{konstant}$ , d.h. geradlinig gleichförmige Bewegung)

(ii) die „Einstein-Formel“  $E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$

(iii) den nichtrelativistischen Grenzfall.

Ansatz für Lorentz-invariantes Wirkungsfunktional

(Max Planck, 1906):

$$S_M = S_1[x] = \underbrace{-m_0 c}_{\substack{\uparrow \\ \text{Materie}}} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} ds}_{\substack{\uparrow \uparrow \\ \text{Lorentz-Skalare}}} = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma_u(t)}$$

Hierbei sind den Ereignissen „1“ und „2“ die Koordinaten

$x_1^\mu = (ct_1, \vec{x}_1)$  bzw.  $x_2^\mu = (ct_2, \vec{x}_2)$  zugeordnet (in einem beliebig, aber fest, gewählten Inertialsystem).

Diese sind bei Variation von  $S$  festzuhalten.

(i) Zur Bestimmung des stationären Punkts  $\vec{0} = \frac{\delta S}{\delta \vec{x}(t)}$  schreiben wir  $S_M = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$

mit  $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; t) = -\frac{m_0 c^2}{\gamma_u(t)} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{c^2}}$

(Kontrolle: im nichtrelativistischen Limes erhält man:

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; t) = -m_0 c^2 \left[ 1 - \frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{2c^2} + \mathcal{O}(c^{-4}) \right] \quad \mathcal{L} = -m_0 c^2 t$$

$$= -m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 |\dot{\vec{x}}|^2 + \mathcal{O}(c^{-2}) \xrightarrow{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2} m_0 |\dot{\vec{x}}|^2 + \frac{d}{dt} \mathcal{L} \quad \text{o.k.}$$

// 21.1.13

Verallgemeinerter Impuls (wie üblich):

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m_0 \dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2}} = \gamma m_0 \vec{u}$$

$$\Rightarrow p_i = m_0 c u^i$$

$$\Rightarrow \vec{0} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = -\frac{d}{dt} \left[ -m_0 c^2 \frac{-\dot{\vec{x}}/c^2}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2}} \right]$$

$$= -m_0 \frac{d}{dt} (\gamma_u \vec{u})$$

Lösung:  $\vec{u}$  konstant  $\Rightarrow m_0 \frac{d\dot{x}^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad \square$

(ii) Hier:  $S_m$  ist für physikalische Bahn minimal:

Abstand  $\|x_1^\mu - x_2^\mu\|$  zeitartig (sonst keine Bahn 1 $\rightarrow$ 2)

$\Rightarrow$  es existiert ein Inertialsystem  $K'$  mit  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$

$\Rightarrow$  Gesamtabstand  $\int_1^2 ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\frac{1}{\gamma_u(t)}}_{\leq 1}$

(127) wird durch ruhendes Teilchen maximiert

→ ruhendes Teilchen (in  $K'$ ) minimiert  $S_m$

→ Bewegung in jedem IS geradlinig gleichförmig. □

Lagrange-Funktion nicht explizit zeitabhängig

→ Energie ist durch das Jacobi-Integral gegeben:

(iii)

$$\mathcal{E}(\dot{\vec{x}}) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L = \frac{m_0 |\dot{\vec{x}}|^2}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2}} - (-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{c^2}})$$

$$= \gamma_u m_0 c^2 (\beta^2 + (1 - \beta^2))$$

$$= \gamma_u m_0 c^2 = m_0 c u^0$$

↑ „Einstein-Formel“  $\mathcal{E} = mc^2$

$$\Rightarrow p^\mu = \left( \frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p} \right) = m_0 c u^\mu$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m_0^2 c^2 u^2 = m_0^2 c^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(\vec{p}) = H(\vec{x}, \vec{p}; t) = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

(nichtrelativistischer Limes:  $\mathcal{E}(\vec{p}) = m_0 c^2 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + \dots$ )  
(ultrarelativistischer Limes:  $\mathcal{E}(\vec{p}) = |\vec{p}|c$  ( $m_0 = 0$ ))

Hamilton-Gleichungen:

$$\textcircled{128} \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = 0; \quad \dot{\vec{x}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p} c^2}{\sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m_0^2 c^4}}$$

$\rightarrow \vec{u} = \dot{\vec{x}}$  konstant  $\rightarrow$  geradlinig gleichf. Bewegung.  $\square$

(iv) Manifest kovariante Formulierung:

$$\delta S_m = -m_0 c \int_1^2 \delta(ds) = -m_0 c \int_1^2 \delta \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$$
$$= -m_0 c \int_1^2 \frac{dx^\mu}{ds} \delta(dx_\mu) = -m_0 c \int_1^2 u^\mu d(\delta x_\mu)$$

$$\delta \sqrt{f} = \frac{\delta f}{2\sqrt{f}}$$

$$= -m_0 c u^\mu \delta x_\mu \Big|_1^2 + m_0 c \int_1^2 \delta x_\mu \frac{du^\mu}{ds} ds \stackrel{!}{=} 0$$

Dies kann für beliebige  $\delta x^\mu$  nur gelten, falls

$$\frac{du^\mu}{ds} = 0 \quad \rightarrow \text{geradlinig gleichf. Bewegung. } \square$$

Relativistische Verallgemeinerung des Drehimpulses

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} = \begin{pmatrix} x_2 p_3 - x_3 p_2 \\ x_3 p_1 - x_1 p_3 \\ x_1 p_2 - x_2 p_1 \end{pmatrix}; \quad L_i = \epsilon_{ija} x_j p_a$$

(als Erhaltungsgröße im Zentralpotential)?

$\vec{L}$  ist Pseudovektor  $\rightarrow$  müsste räumlich-räumlichen Komponenten eines 4-Tensors entsprechen.

Ansatz:  $L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$

Check:  $\frac{dL^{\mu\nu}}{ds} = \frac{dx^\mu}{ds} p^\nu + x^\mu \frac{dp^\nu}{ds} - \frac{dx^\nu}{ds} p^\mu - x^\nu \frac{dp^\mu}{ds}$  (da kräftefrei)  $= 0$

$$= u^\mu p^\nu - u^\nu p^\mu$$

$$= m_0 c (u^\mu u^\nu - u^\nu u^\mu) = 0$$

Der Tensor ist also (für freies Teilchen tatsächlich) erhalten. Explizit in Komponenten:

$$L^{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline \vec{\ell} & 0 & L_3 & -L_2 \\ & -L_3 & 0 & L_1 \\ & L_2 & -L_1 & 0 \end{array} \right); \quad \vec{\ell} = \frac{\epsilon}{c} \vec{x} - \vec{p} ct$$

( $L^{0i} = x^0 p^i - x^i p^0 = ct p^i - x_i \frac{\epsilon}{c} = -\ell_i$ )

Neben dem (Pseudovektor) Drehimpuls finden wir also eine weitere Erhaltungsgröße, den echten Vektor  $\vec{\ell}$ , der die geradlinig gleichförmige Bewegung beschreibt:

$$\vec{x} = \frac{c}{\epsilon} \vec{\ell} + \vec{u} t; \quad \vec{u} = \frac{c^2}{\epsilon} \vec{p} = \frac{\vec{p}}{\gamma u m_0}$$

Wie zuvor entsprechen die Erhaltungsgrößen  
Invarianzen der Wirkung:

Translation  $\Leftrightarrow$  Impuls (Ort) bzw. Energie (Zeit),

Lorentzinvarianz  $\Leftrightarrow$  4-Drehimpuls-Tensor

Insgesamt: Invarianz unter Poincaré-Transf.

## 6.2 Wechselwirkung mit elektromagnetischem Feld

Ausgangspunkt: (i) Relativistische Wirkung

$$S_M = -m_0 c \int_1^2 ds \quad \text{des freien Teilchens}$$

(ii) Ansatz für Wechselwirkung (vgl. Theorie 1+2),  
wie im nicht-relativistischen Fall:

$$L_{ww} = q [\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} - \phi]$$

$$\leadsto S_{ww} = q \int_{t_1}^{t_2} dt [\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) - \phi(\vec{x}, t)]$$

$$= q \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma_u} [\gamma_u \dot{\vec{x}} \cdot (c \vec{A}) - \gamma_u \phi]$$

$$u_\mu = \gamma_u (1, -\dot{\vec{x}})$$

$$dx^\mu = dt = \frac{ds}{c}$$

$$A^\mu = (\phi, c \vec{A}) \quad \Rightarrow \quad = -\frac{q}{c} \int_1^2 ds u_\nu A^\nu$$

(131) Ausdruck ist kovariant  $\Rightarrow$  relativistisch korrekt

$$\Rightarrow S = S_m + S_{ww} = \int_1^2 ds \left( -m_0 c - \frac{q}{c} u_\nu A^\nu \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{u}}|^2}{c^2}} + q \dot{\vec{u}} \cdot \vec{A} - q \phi \right)$$

Der Integrand ist natürlich die relativistisch korrekte Lagrange-Funktion  $L = L_m + L_{ww} = L_m + \tilde{L}_{ww}$   
 Hieraus leiten wir den kanonischen Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{u}}} = \gamma m_0 \dot{\vec{u}} + q \vec{A} \equiv \vec{\pi} + q \vec{A}$$

ab, wobei  $\vec{\pi} \equiv \vec{p} - q \vec{A} = \gamma_u m_0 \dot{\vec{u}}$  den kinetischen Impuls bezeichnet.  
 Faktor  $\frac{1}{c}$  wegen  $A^\mu = (\phi, c\vec{A})$

In 4-Vektoren:  $\underline{p}^\mu = m_0 c u^\mu + \frac{q}{c} A^\mu \equiv \underline{\pi}^\mu + \frac{q}{c} A^\mu$

Die Hamilton-Funktion folgt durch Legendre-Transf.

$$H = \dot{\vec{u}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{u}}} - L$$

$$= \dot{\vec{u}} \cdot (\gamma_u m_0 \dot{\vec{u}} + q \vec{A}) - \left( \frac{-m_0 c^2}{\gamma_u} + q \dot{\vec{u}} \cdot \vec{A} - q \phi \right)$$

$$= \gamma_u m_0 c^2 \left( \frac{\dot{\vec{u}}^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) + q \phi = \underline{\gamma_u m_0 c^2 + q \phi(\vec{x}, t)}$$

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \sqrt{\vec{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4} + q \phi$$

$$= \sqrt{(\vec{p} - q \vec{A})^2 c^2 + m_0^2 c^4} + q \phi$$

Für die Zeitkomponente des 4-Impulses gilt:

$$p^0 = m_0 c \gamma_u + \frac{q}{c} \phi = \frac{H}{c} \Rightarrow p^\mu = \left( \frac{H}{c}, \vec{p} \right)$$

Beachte:  $H$  darf nur als Energie interpretiert werden, falls  $\phi$  nicht explizit zeitabhängig ist:  $\phi = \phi(\vec{x})$ .

Dies legt die Eichung von  $\phi$  bis auf eine Konstante fest. In jedem Fall ist die **intrinsische Energie**

$$E(\vec{u}) = \gamma_u m_0 c^2 = \sqrt{\vec{u}^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

(kinetische E. + Ruheenergie) wohldefiniert.

Ableitung der Bewegungsgleichung aus Hamilton'schem Prinzip in kovarianter Form:

$$0 = \delta S = \delta \int_1^2 \left( -m_0 c \sqrt{dx_\mu dx^\mu} - \frac{q}{c} A^\nu dx_\nu \right)$$

$$\delta(dx^\mu) = d(\delta x^\mu)$$

$$\downarrow \int_1^2 \left[ -m_0 c \frac{dx^\mu}{ds} d(\delta x_\mu) - \frac{q}{c} A^\mu d(\delta x_\mu) - \frac{q}{c} (\partial^\mu A^\nu) (\delta x_\mu) dx_\nu \right]$$

$$= - \underbrace{\left( m_0 c u^\mu + \frac{q}{c} A^\mu \right) \delta x_\mu} = 0 \Big|_1^2$$

$$+ \int_1^2 \delta x_\mu ds \left[ m_0 c \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{q}{c} \partial^\nu A^\mu \frac{dx_\nu}{ds} - \frac{q}{c} \partial^\mu A^\nu \frac{dx_\nu}{ds} \right]$$

Variationsprinzip:  $[\dots] = 0$

$$\rightarrow m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = m_0 c^2 \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = q u_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \\ = q u_\nu F^{\mu\nu} = K^\mu \quad (*)$$

Alt. Ableitung über Lagrange-/Hamilton-Gleichungen:

Kompliziert. Zur Interpretation schreiben wir um:

$$m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = m_0 \gamma_u \frac{d}{dt} (c u^\mu) = \gamma_u \frac{d\pi^\mu}{dt}$$

$$* K^\mu = q \gamma_u (\vec{E} \cdot \vec{\beta}_u, \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

Mit  $\pi^\mu = (\frac{\epsilon}{c}, \vec{\pi})$  folgt daraus

$$\frac{d}{dt} \vec{\pi} = q (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}); \quad (\vec{\pi} = \gamma_u m_0 \vec{u})$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{u}$$

Die Ausdrücke für die zeitliche Änderung des kinetischen Impulses und für die zugeführte

Leistung haben also die gleiche Form wie im nichtrelativistischen Fall.

Invarianzen: Zeitumkehr ( $t \rightarrow -t$ ), Parität ( $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ ),  
 allg. Poincaré-Transformation  $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$   
 und Eichung  $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$   $\nwarrow$  L-Skalar  
// 23.1.13

### 6.3 Das Coulomb-Problem für ein einzelnes Teilchen

Wir betrachten die Dynamik eines geladenen relativistischen Teilchens (Ladung  $q$ , Ruhemasse  $m_0$ ) in einem Zentralpotential der Form

$\phi(\vec{x}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 x}$  (mit  $x = |\vec{x}|$ ); das Vektorpotential sei  $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{0}$ . Interpretation: immobiles Teilchen (mit Masse  $M_0 \rightarrow m_0$ ) im Ursprung.

Aus der Wirkung  $S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} - q \phi(\vec{x}) \right]$

folgen die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = q \vec{E}; \quad \vec{\pi} = \gamma_u m_0 \vec{u}; \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi = \frac{q_0 \hat{e}_x}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

Neben der Gesamtenergie  $E_{\text{ges}} = \sqrt{\pi^2 c^2 + m_0^2 c^4} - \frac{q_0}{x}$ ;

$a = \frac{-q q_0}{4\pi\epsilon_0}$  ist der Drehimpuls des Teilchens erhalten:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{x} \times \vec{\pi}) = \vec{u} \times \vec{\pi} + \vec{x} \times \frac{d\vec{\pi}}{dt} = \vec{x} \times q\vec{E} = \vec{0}$$

Erinnerung: im nichtrelativistischen Grenzfall ist zusätzlich der Runge-Lenz-Vektor  $\vec{a} = \vec{u} \times \vec{L} - a\hat{e}_x$  erhalten, der für  $E_{ges}^{NR} < 0$  vom Brennpunkt der Bahnellipse zum Perihel zeigt.

Wir wählen nun  $\hat{e}_3 = \hat{L}$  und beschreiben die Umlaufbahn in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene in Polarkoordinaten  $(x, \varphi)$ .

$$\leadsto L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\varphi}^2)} + \frac{a}{x}$$

Daraus ergeben sich die zu  $x$  bzw.  $\varphi$  konjugierten

$$\text{Impulse } \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \gamma m_0 \dot{x} \equiv \pi_x; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \gamma m_0 x^2 \dot{\varphi} \equiv \pi_\varphi$$

und die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d\pi_x}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} = \gamma m_0 x \dot{\varphi}^2 - \frac{a}{x^2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d\pi_\varphi}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$\varphi$  zyklisch  $\leadsto \pi_\varphi$  erhalten mit  $\pi_\varphi = |\vec{L}|$ :

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{x} \times \vec{\pi} = \gamma m_0 \vec{x} \times \vec{u} = \gamma m_0 \vec{x} \times (\dot{x} \hat{e}_x + x \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi) \\ &= \gamma m_0 x^2 \dot{\varphi} (\hat{e}_x \times \hat{e}_\varphi) = \pi_\varphi \hat{e}_3\end{aligned}$$

Wir werden sehen, dass sich die Form der Bahnen im relativistischen Fall teils fundamental von den Kepler-Bahnen unterscheidet. Zunächst betrachten wir jedoch den einfachsten Fall:

**Kreisbahnen.** Bei Kreisbahnen gilt:  $x$  konstant

$$\leadsto \dot{x} = 0 \leadsto \pi_x = 0 \leadsto \gamma m_0 x \dot{\varphi}^2 = \frac{a}{x^2} \quad *$$

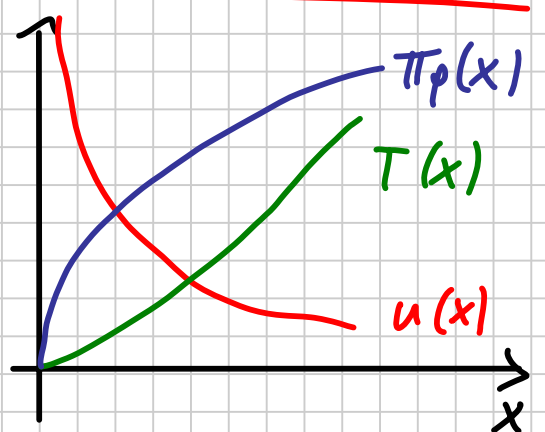
**Frage:** sind beliebige Radien, Geschwindigkeiten, Drehimpulse, Umlaufzeiten möglich?

Zunächst **nichtrelativistisch:**

$$m_0 x \dot{\varphi}^2 = \frac{a}{x^2} \Leftrightarrow m_0 u^2 = \frac{a}{x} \Leftrightarrow \underline{u(x) = \sqrt{\frac{a}{m_0 x}}}$$

$$\underline{\pi_\varphi = |\vec{L}| = m_0 u x = \sqrt{m_0 a x}}$$

$$\underline{T = \frac{2\pi x}{u} = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{a}} x^{3/2}}$$



**Antwort 1:** Im nichtrelativistischen Grenzfall ja!

Eine Einschränkung bei der relativistischen Betrachtung ist klar:  $u(x) < c$

Konsequenzen für  $x_{\min/\max}, \pi_\varphi$ ?

$$\leadsto a = \gamma m_0 x^3 \dot{\varphi}^2 = \pi_\varphi x \dot{\varphi} = \pi_\varphi u < \pi_\varphi c$$

$$\Rightarrow \bar{a} = \frac{a}{\pi_\varphi c} = \beta < 1$$

$$\Leftrightarrow \pi_\varphi > \frac{a}{c}$$

Antwort 2a:

Bei gegebener Wechselwirkungsstärke  $a = \frac{-qq_0}{4\pi\epsilon_0}$  sind Kreisbahnen also nur mit einem **Mindest-drehimpuls**  $\pi_{\varphi, \min}^k = \frac{a}{c}$  möglich.

**Mechanismus?** Werden die möglichen Radien dadurch eingeschränkt? Wie ändert sich die Abhängigkeit  $\pi_\varphi(x)$ ?

Rechnung komplizierter wegen  $\gamma = \gamma(u)$ :

$$\gamma m_0 x \dot{\varphi}^2 = \frac{a}{x^2} \Leftrightarrow \frac{m_0 x^3 \dot{\varphi}^2}{a} = \gamma^{-1}$$

$$\frac{c^4 m_0^2 x^2 x^4 \dot{\varphi}^4}{a^2 c^4} = 1 - \underbrace{\left(\frac{x \dot{\varphi}}{c}\right)^2}_{\beta^2}$$

$$\Leftrightarrow \beta^4 + \alpha \beta^2 - \alpha = 0; \quad \alpha \equiv \left( \frac{a}{m_0 x c^2} \right)^2$$

$$\beta^2 = \sqrt{\alpha \left( 1 + \frac{\alpha}{4} \right)} - \frac{\alpha}{2}$$

$\alpha \rightarrow 0 \rightarrow \sqrt{\alpha} \sim \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow \infty)$   
 $\alpha \rightarrow \infty \rightarrow 1 - \frac{1}{\alpha} \quad (x \rightarrow 0)$   
 $\sim \gamma \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sqrt{\alpha} \sim \frac{1}{x}$

$$\frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \frac{\alpha}{4}} \approx \frac{\alpha}{2} \left[ 1 + \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{8} \left( \frac{\alpha}{4} \right)^2 \right]$$

$\leadsto$  Antwort 2b

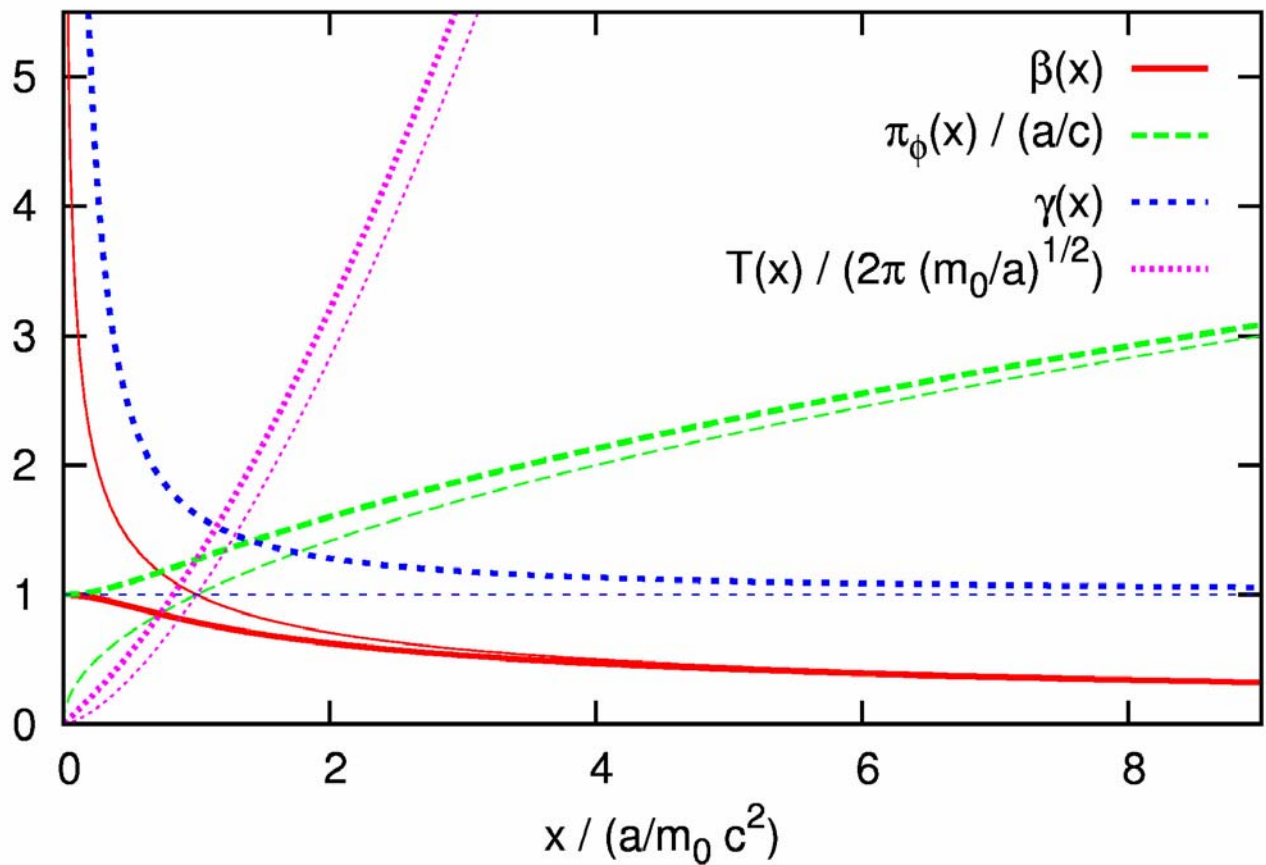
Kreisbahn mit beliebigem Radius möglich, auch jede Geschwindigkeit  $0 < \beta < 1$  möglich.

Jetzt Drehimpuls explizit:

$$\pi_\varphi = m_0 x \dot{\varphi} \gamma = m_0 c x \frac{\beta(x)}{\sqrt{1 - \beta^2(x)}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{a}{c}$$

Alternativer Ausdruck:  $\pi_\varphi = \frac{a}{\beta c} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$

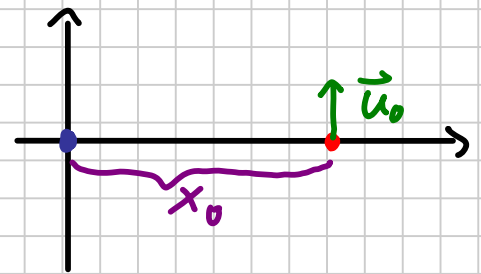
Abbildung: Verlauf der dynamischen Größen für Kreisbahnen mit Radius  $x$



dicke Linien: relativistisch, dünne Linien: nichtrel.

Jetzt allgemeinere Interpretation: Kreisbahnen als Gleichgewichtszustände, bezogen auf den radialen Abstand  $x$  (bei festem Drehimpuls  $\pi_\phi$ )

Gedankenexperiment: Das geladene Teilchen wird im Abstand  $x_0$  vom Ursprung mit tangentialer Geschwindigkeit



$\vec{u}_0 = u_0 \hat{e}_\phi$  „gestartet“ Bahn?

klar:  $\pi_\phi = m_0 \gamma u_0 x_0$  erhalten

Index 0: Start - kein 4-Vektor!

a) nichtrelativistisch: 4 Fälle

(i)  $\pi_\varphi = \pi_\varphi^K(x_0) \rightarrow$  Kreisbahn

$\uparrow$  Drehimpuls für  
Kreisbahn mit  
Radius  $x_0$

(ii)  $\pi_\varphi > \pi_\varphi^K(x_0), \epsilon_g^{NR} < 0$

$\rightarrow$  es existiert ein „gleichgewichts-  
radius“  $x_g$  mit  $\pi_\varphi = \pi_\varphi^K(x_g)$

$\rightarrow$  Abstand  $x(\varphi)$  schwingt um  $x_g > x_0$  mit

$x_{\min}|\varphi| = x_0$  (Startpunkt = Perihel)

genauer (3.4.5):  $x^{-1}(\varphi) = p^{-1} + A \cos(\varphi)$ ;  $p \approx x_g$  Ellipse

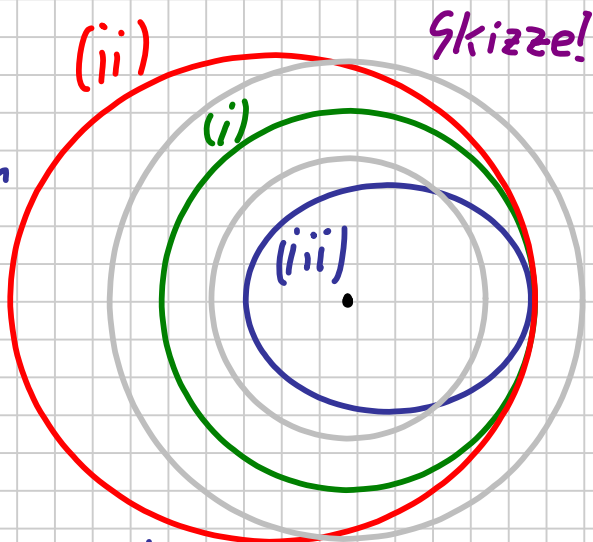
(iii)  $0 < \pi_\varphi < \pi_\varphi^K(x_0)$ : analog zu (ii) mit  $x_g < x_0$   
(Ellipse mit Startpunkt = Aphel)

(iv)  $\epsilon_g^{NR} \geq 0$ : offene Bahnen (Parabel/Hyperbel)

b) relativistisch:

(i')  $\pi_\varphi = \pi_\varphi^K(x_0)$  wie (i)

(ii')  $\pi_\varphi > \pi_\varphi^K(x_0), \epsilon_g < m_0 c^2$



Abstand  $x(\varphi)$  schwingt um Gleichgewichts-  
abstand  $x_g > x_0$  mit  $x_{\min}(\varphi) = x_0$

Aber: Bahn nicht exakt periodisch (s.u.)

$$(iii'') \quad 0 < \pi_\varphi < \pi_\varphi^K(x_0)$$

Fallunterscheidung:

$$A) \quad \pi_\varphi > \pi_{\varphi, \min}^K = \frac{a}{c}$$

$\rightarrow$  Bahnen analog zu (iii) bzw. (ii') (s.u.)

$$B) \quad \pi_\varphi \leq \pi_{\varphi, \min}^K = \frac{a}{c}$$

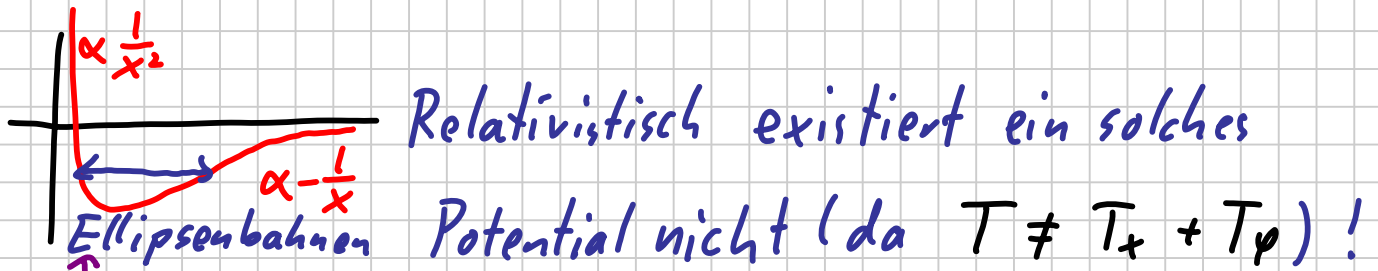
$\rightarrow$  Zu diesem Startdrehimpuls existiert  
kein Gleichgewichtsradius ( $> 0$ )

$\rightarrow$  Teilchen spiralt in kern (s.u.)

(iv')  $E_g \geq m_0 c^2$  offene Bahnen (wie iv), aber  
andere Gestalt

Bemerkung: Im nichtrelativistischen Fall lässt sich ein  
minimaler Abstand für  $\pi_\varphi \neq 0$  aus dem effektiven

Potential  $V_f(x) = V(x) + \frac{L^2}{2\mu x^2} = \frac{L^2}{2\mu x^2} - \frac{a}{x}$  ableiten.



Barriere für kleine Abstände

Jetzt Rechnung für allgemeine Bahnen:

Wegen  $\vec{\pi} = \gamma m_0 (\dot{x} \hat{e}_x + x \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi) = \pi_x \hat{e}_x + \frac{\pi_\varphi}{x} \hat{e}_\varphi$

gilt für die erhaltene Gesamtenergie

$$E_g = \sqrt{\vec{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4} - \frac{a}{x} = c \sqrt{\pi_x^2 + \frac{\pi_\varphi^2}{x^2} + (m_0 c)^2} - \frac{a}{x}$$

$$\leadsto (\pi_x)^2 = \frac{1}{c^2} \left( E_g + \frac{a}{x} \right)^2 - \frac{\pi_\varphi^2}{x^2} - (m_0 c)^2$$

$$\leadsto \left( \frac{\pi_x}{\pi_\varphi} \right)^2 = \frac{1}{\pi_\varphi^2 c^2} \left( E_g + \frac{a}{x} \right)^2 - \frac{1}{x^2} - \left( \frac{m_0 c}{\pi_\varphi} \right)^2$$

Andererseits gilt:

$$\frac{\pi_x}{\pi_\varphi} = \frac{\gamma m_0 \dot{x}}{\gamma m_0 x^2 \dot{\varphi}} = \frac{dx/dt}{x^2 d\varphi/dt} = \frac{dx}{x^2 d\varphi} = - \frac{d(x^{-1})}{d\varphi}$$

Mit  $\bar{a} = \frac{a}{\pi_\varphi c}$  (dimensionslos) erhalten wir also:

$$\left( \frac{d(x^{-1})}{d\varphi} \right)^2 = \frac{E_g^2 - (m_0 c)^2}{(\pi_\varphi c)^2} - (1 - \bar{a}^2) \frac{1}{x^2} + 2 \frac{E_g \bar{a}}{\pi_\varphi c} \frac{1}{x} \quad (\square)$$

Gewöhnliche Differentialgleichung für  $x^{-1}(\varphi)$ !

Wir führen die dimensionslose Länge bzw. Energie

$$\xi \equiv \frac{|a| m_0 x}{\pi \varphi} = \frac{|\bar{a}| m_0 c x}{\pi \varphi} \quad \text{bzw.} \quad \eta = \frac{E_g}{m_0 c^2} \quad \text{ein.}$$

Fall a)  $\bar{a} = 1$  (d.h.  $\pi \varphi = \pi \varphi^K(0)$ )

$$\left(\frac{dx^{-1}}{d\varphi}\right)^2 = \frac{(E_g/m_0 c^2)^2 - 1}{\pi \varphi^2} (m_0 c)^2 + 2 \frac{E_g}{m_0 c^2} \overset{=1}{\frac{\bar{a} m_0 c}{\pi \varphi x}}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\xi^{-1}}{d\varphi}\right)^2 &= \left(\frac{\pi \varphi}{m_0 c}\right)^2 \left[ (\eta^2 - 1) \left(\frac{m_0 c}{\pi \varphi}\right)^2 + 2 \eta \frac{m_0 c}{\pi \varphi} \frac{m_0 c}{\pi \varphi \xi} \right] \\ &= \eta^2 - 1 + 2 \frac{\eta}{\xi} \end{aligned}$$

Separationsansatz:  $\frac{d\xi^{-1}}{\pm \sqrt{2\eta/\xi + \eta^2 - 1}} = d\varphi$

$$\frac{1}{\eta} \sqrt{2\eta/\xi + \eta^2 - 1} = \pm (\varphi - \varphi_0)$$

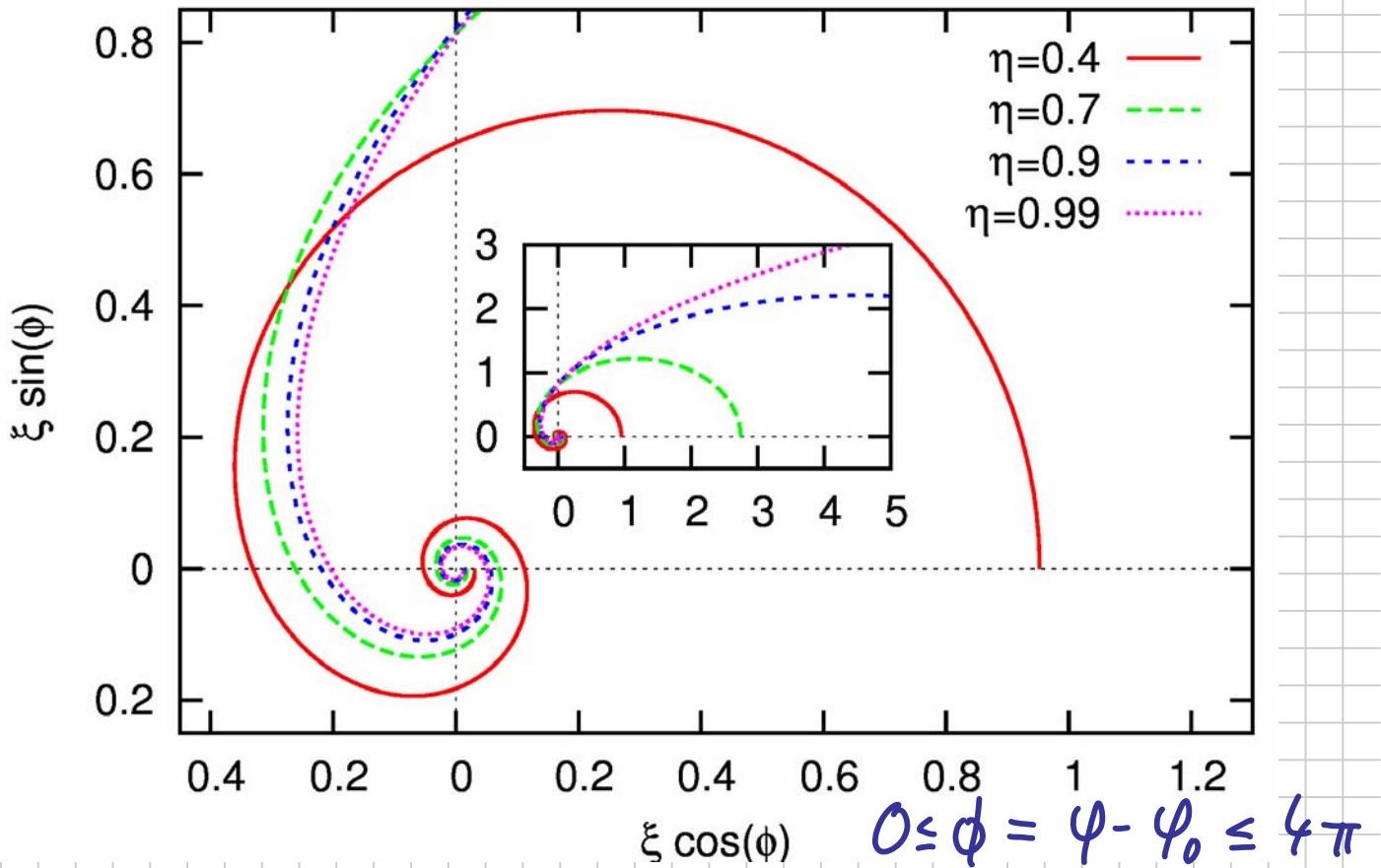
$$\xi(\varphi) = \frac{2\eta}{\eta^2 (\varphi - \varphi_0)^2 + (1 - \eta^2)} \quad (\bar{a} = 1)$$

$> 0$  falls  $\eta < 1$

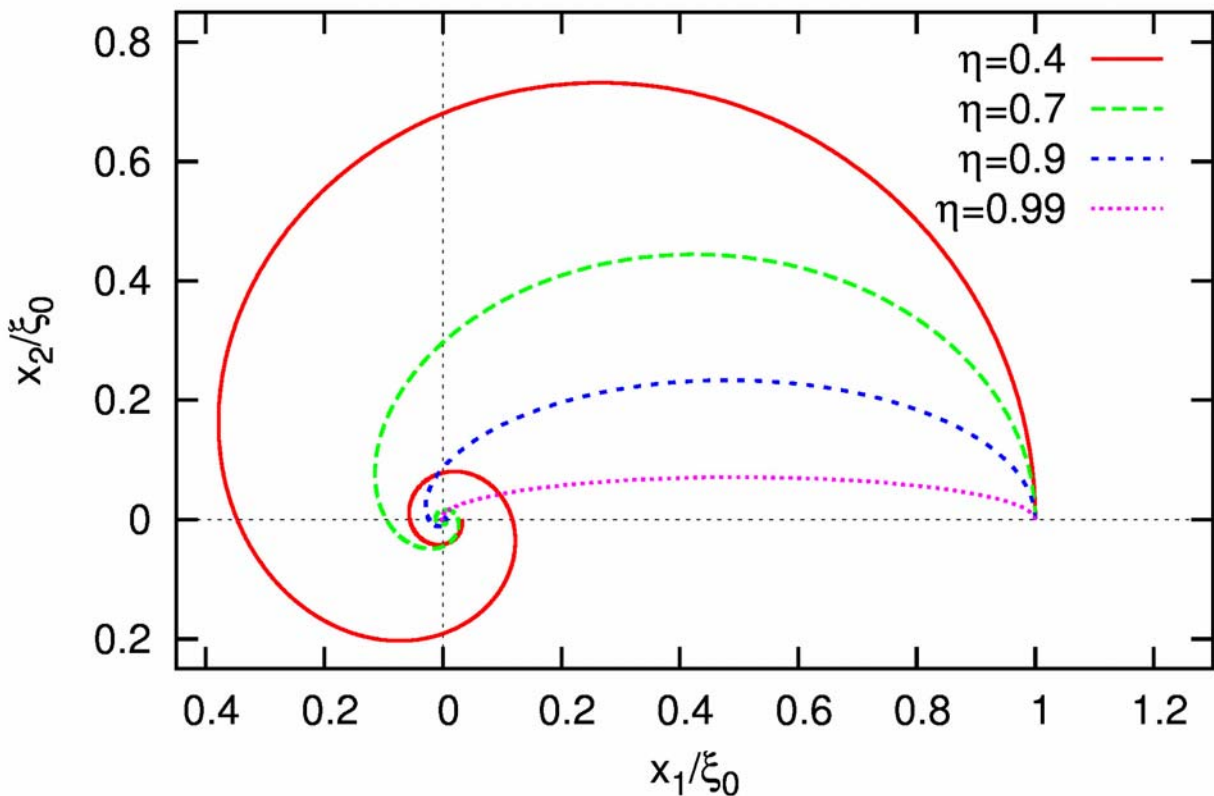
Für  $\eta < 1$  (gebundener Zustand) geht  $\xi \xrightarrow{\varphi \rightarrow \pm \infty} 0$

$\rightarrow$  Teilchen spiralt in das Zentrum.

28.1.13



Hier Bahnen reskaliert auf Anfangsabstand:



Für  $\eta \geq 1$  gibt es Bahnen mit  $\xi = \infty$ .

Fall b)  $0 < \bar{a} \neq 1$  „epsilon“  $\neq \epsilon$

$$\leadsto \left( \frac{d\varphi}{d\psi} \right)^2 = \frac{\epsilon^2}{1-\bar{a}^2} - (1-\bar{a}^2) \left( \frac{1}{\varphi} - \frac{\eta}{1-\bar{a}^2} \right)^2; \quad \epsilon \equiv \sqrt{1 - \frac{1-\eta^2}{\bar{a}^2}}$$

Lösungen für  $\bar{a} \neq 1$ , d.h.  $\pi_\varphi > \pi_\varphi^K(0)$ : Mit

$$X^{-1} = \frac{1-\bar{a}^2}{\epsilon} \left( \frac{1}{\varphi} - \frac{\eta}{1-\bar{a}^2} \right); \quad \phi \equiv \sqrt{|1-\bar{a}^2|} \varphi \text{ lautet } *:$$

$$\left( \frac{dX^{-1}}{d\phi} \right)^2 = \operatorname{sgn}(1-\bar{a}^2) (1-X^{-2})$$

Für schwache Coulomb-Anziehung ( $0 < \bar{a} < 1$ ) ist das Vorzeichen positiv  $\leadsto$  Lösung  $X^{-1} = \cos(\phi - \phi_0)$   
(starke Anziehung  $\leadsto$   $X^{-1} = \cosh(\phi - \phi_0)$ )

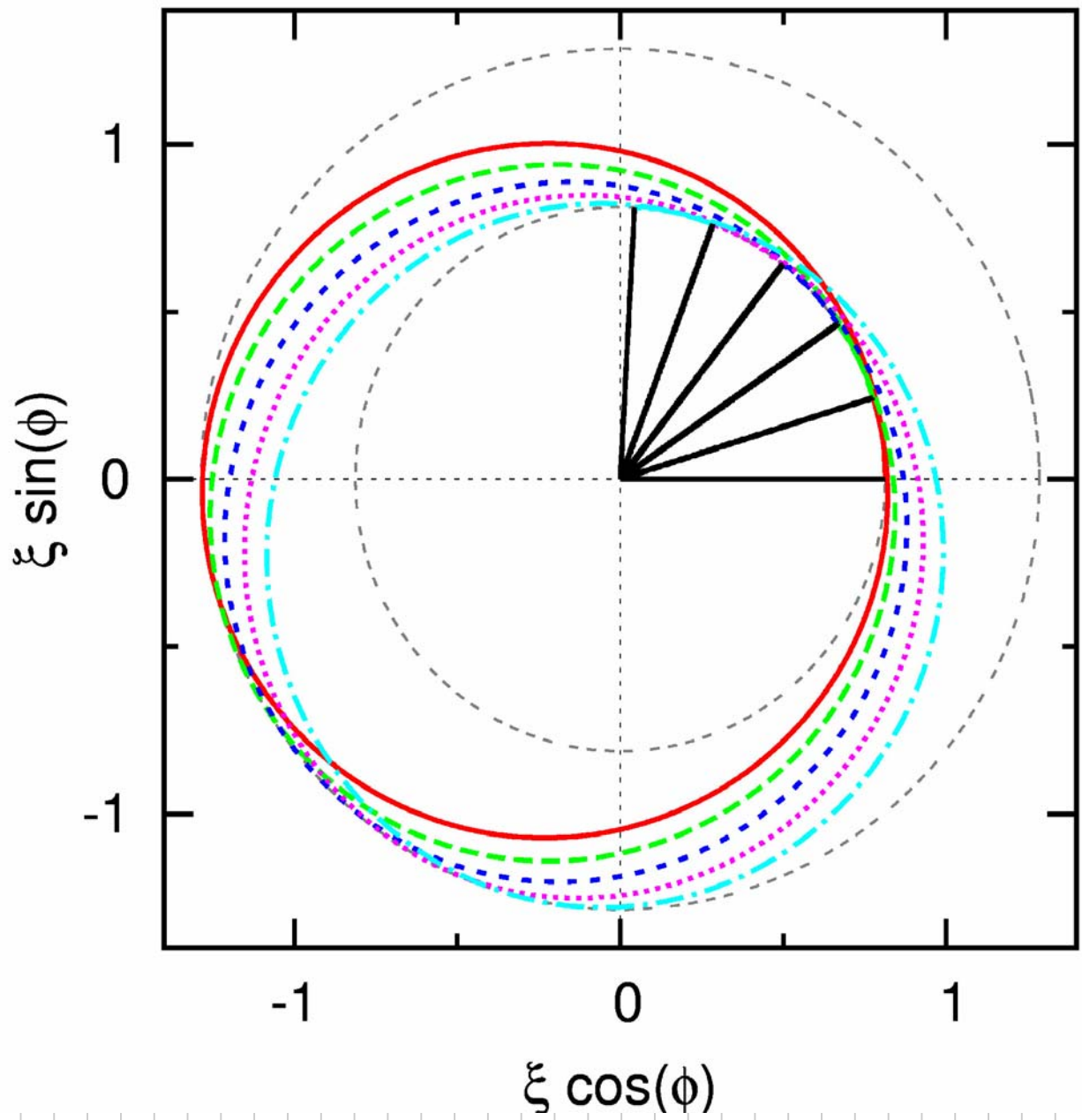
$$\leadsto \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{1-\bar{a}^2} \left\{ \eta + \epsilon \cos \left[ \sqrt{1-\bar{a}^2} (\varphi - \varphi_0) \right] \right\}$$

NR limit:  $\eta = 1, \bar{a} = 0$

fast Ellipse, aber mit gestreckter  $\varphi$ -Skala:

$$\text{Periode des Cosinus ist } \frac{2\pi}{\sqrt{1-\bar{a}^2}} > 2\pi$$

relativistische Präzession



## 6.4 Das Wirkungsfunktional der Felder

Im Gegensatz zu den Beiträgen der Teilchen zur Wirkung sind jetzt keine Koordinaten ausgezeichnet, es muss also über den ganzen Raum integriert

werden: 
$$S_F = \int_{t_1}^{t_2} dt L_F(t) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L}_F(\vec{x}, t)$$

Die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_F$  kann dabei nur von den Feldern  $\vec{E}(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  bzw., äquivalent, vom 4-Potential  $A^\mu(x)$  und seinen Ableitungen abhängen: 
$$\mathcal{L}_F = \mathcal{L}[A^\mu, \partial^\nu A^\mu]$$

Wegen der Homogenität des Raums ist keine explizite Abhängigkeit von Koordinaten möglich.

Analog zur Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen für materielle Teilchen

(148) 
$$\left[ \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{q}} \cdot \delta \vec{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot \delta \dot{\vec{q}} \right) = 0 \right]$$

variieren wir auch in der klassischen Feldtheorie die Wirkung:

$$\begin{aligned}
 0 = \delta S_F &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A^\mu} \delta A^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial (\partial^\nu A^\mu)} \partial^\nu (\delta A^\mu) \right] \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A^\mu} - \partial^\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial (\partial^\nu A^\mu)} \right) \right] \delta A^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial (\partial^\nu A^\mu)} \delta A^\mu \Big|_{t_1}^{t_2}
 \end{aligned}$$

Bei der Partiellen Integration bezüglich der Ortsvariablen haben wir dabei verwendet, dass die Felder im Unendlichen verschwinden (sollen).

Bei der Variation der Wirkung sind die möglichen „Bahnen“ an den Endpunkten  $t=t_1$  und  $t=t_2$  für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  festzuhalten:

$$\delta A^\mu(ct_1, \vec{x}) = 0 = \delta A^\mu(ct_2, \vec{x})$$

Mit  $\delta A^\mu(ct, \vec{x})$  beliebig für  $t_1 < t < t_2$  folgt:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A^\mu} - \partial^\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial (\partial^\nu A^\mu)} \right) = 0$$

Euler-Lagrange-Gleichungen für  $A^\mu$

Da die Maxwell-Gleichungen **linear** in den **ersten** Ableitungen der Felder, also **linear** in den **zweiten** Ableitungen der Potentiale sind, muss  $\mathcal{L}_F$  **quadratisch** in den **ersten** Ableitungen von  $A^\mu$  sein:  $\mathcal{L}_F = a_{\mu\nu,\rho\sigma} (\partial^\mu A^\nu) (\partial^\rho A^\sigma)$ ,

wobei wir o.B.d.A. annehmen können, dass  $a_{\mu\nu,\rho\sigma}$  symmetrisch ist unter Vertauschung der Index-Paare  $(\mu\nu) \leftrightarrow (\rho\sigma)$ .

Fordert man **Eichinvarianz**  $A^\mu \rightarrow \tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$   
 $\Rightarrow 0 = a_{\mu\nu,\rho\sigma} [(\partial^\mu \tilde{A}^\nu) (\partial^\rho \tilde{A}^\sigma) - (\partial^\mu A^\nu) (\partial^\rho A^\sigma)]$

$$= a_{\mu\nu,\rho\sigma} [(\partial^\mu \partial^\nu \Lambda) (\partial^\rho A^\sigma) + (\partial^\mu A^\nu) (\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda) + (\partial^\mu \partial^\nu \Lambda) (\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda)]$$

$$= a_{\mu\nu,\rho\sigma} [2 (\partial^\mu A^\nu) (\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda) + (\partial^\mu \partial^\nu \Lambda) (\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda)]$$

$\downarrow \partial^\mu A^\nu$  beliebig

$$\Rightarrow a_{\mu\nu,\rho\sigma} (\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda) = 0 \quad \forall (\mu\nu)$$

$\Lambda$  (fast) beliebig

$$\underbrace{\partial^\rho \partial^\sigma \Lambda}_{\text{symm in } \rho \leftrightarrow \sigma}$$

$$\Rightarrow a_{\mu\nu,\rho\sigma} = -a_{\mu\nu,\sigma\rho} \quad \text{Antisymmetrie } \rho \leftrightarrow \sigma$$

$$\begin{aligned} \leadsto \mathcal{L}_F &= \frac{1}{4} a_{\mu\nu,\rho\sigma} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) \\ &= \frac{1}{4} a_{\mu\nu,\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}_F$  ist also eine quadratische Funktion des Feldtensors!

Jetzt fordern wir noch **Lorentz-Invarianz der Wirkung**. Wegen der Invarianz des Volumenelements  $dt d^3x \rightarrow dt' d^3x' = |\det(\Lambda^\mu_\nu)| dt d^3x = dt d^3x$  muss  $\mathcal{L}_F$  selbst Lorentz-invariant, d.h. ein **4-Tensor 4. Stufe** sein. Unabhängigkeit von Koordinaten +

Feldern  $\leadsto a_{\mu\nu,\rho\sigma} = -\frac{1}{2} \epsilon \begin{vmatrix} g_{\mu\rho} & g_{\mu\sigma} \\ g_{\nu\rho} & g_{\nu\sigma} \end{vmatrix}$  metrischer Tensor

$$\begin{aligned} \leadsto \mathcal{L}_F &= -\frac{1}{8} \epsilon (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}) F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \\ &= -\frac{\epsilon}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Wie in **Aufg. 27** gezeigt, führt die Lagrange-

Dichte  $\mathcal{L}_{F+WW} = -\frac{\epsilon_0}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu$

(151) tatsächlich auf die inhomogenen Maxwell-

Gleichungen  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 c j^\mu = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\mu$

### 6.4.1 Eichinvarianz der Gesamtwirkung und Ladungserhaltung

Wir untersuchen nun die Implikationen einer Eichinvarianz der Gesamtwirkung  $S_{M+F+WW}$ .

Da der Materie-Anteil  $A^\mu$  nicht enthält und der Feldanteil eichinvariant ist, untersuchen wir den Wechselwirkungsanteil:

$$\begin{aligned}
 L'_{WW} - L_{WW} &= -\frac{1}{c} \int d^3x j_\mu \partial^\mu \Lambda \\
 &= -\frac{1}{c} \int d^3x (j_0 \partial^0 \Lambda + j_i \partial^i \Lambda) \\
 &= -\frac{1}{c} \int d^3x (\underbrace{j_0 \partial^0 \Lambda}_{= \partial^0(j_0 \Lambda) - \Lambda(\partial^0 j_0)} + j_i \partial^i \Lambda) \\
 &\stackrel{PI}{=} -\frac{1}{c} \int d^3x [\partial^0(j_0 \Lambda) - \Lambda(\partial^\mu j_\mu)] \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3x \Lambda(\partial^\mu j_\mu) - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int d^3x j_0 \Lambda
 \end{aligned}$$

$$\leadsto S' - S = \int_{t_1}^{t_2} dt (L'_{WW} - L_{WW})$$

$$= \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \Lambda (\partial^\mu \dot{j}_\mu) + \text{Konstante}$$

Die Wirkung ist also genau dann invariant für beliebige  $\Lambda$ , falls  $\partial^\mu \dot{j}_\mu = 0$ , d.h. falls für alle Bahnen Ladungserhaltung gilt. In diesem Sinne sind **Eichinvarianz** und **Ladungserhaltung äquivalent**. // 30.1.13

## 6.5 Invarianten des elektromagnetischen Feldes

Interessant: Charakteristika und quantitative Eigenschaften von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ , die invariant unter einer Lorentz-Transform, d.h. für alle Beobachter gleich sind.

Schon bekannter L-Skalar: Lagrange-Dichte  $-\frac{\epsilon_0}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \leadsto F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{i0} + F^{ij} F_{ij} \\ &= (-E_i | E_i + E_i (-E_i) + (-\epsilon_{ijk} c B_k) (-\epsilon_{ije} c B_e) \\ &= 2c^2 \delta_{ae} B_a B_e - 2|\vec{E}|^2 = \underline{2(c|\vec{B}|^2 - |\vec{E}|^2)} \end{aligned}$$

ist Lorentz-invariant.

⇒ die Eigenschaften  $c|\vec{B}| = |\vec{E}|$ ,  $c|\vec{B}| < |\vec{E}|$  oder  $c|\vec{B}| > |\vec{E}|$  gelten (für den gleichen Punkt der Raumzeit) jeweils in jedem Bezugssystem.

Weiterer Kandidat: Kontraktion mit dualem Feldstärke-Tensor  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ , wobei  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  der vollständig antisymmetrische Tensor

4. Stufe ist:  $\epsilon^{0123} = 1$ ,  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma}$  etc.

Es gilt:  $F^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu} \hat{=} \vec{E} \rightarrow c\vec{B}$ ,  $c\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$  check sign!

$$\leadsto \tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$$

Lorentz-invariant für  $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  ist also:

$$F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = -4 \vec{E} \cdot (c\vec{B})$$

$\tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  liefert keine weitere Invariante.

Tatsächlich ist der gefundene Satz von Invarianten

$$I_1 = |\vec{E}|^2 - c^2 |\vec{B}|^2; \quad I_2 = c \vec{E} \cdot \vec{B}$$

L-Skalar

L-Pseudoskalar

schon vollständig.

Wichtiger Spezialfall:  $\vec{E} = c|\vec{B}|$ ,  $\vec{E} \perp \vec{B}$  (Strahlung)

## 6.6 Energie und Impuls des elm. Feldes

Wir wollen jetzt Erhaltungsgrößen im System aus geladenen Teilchen und elm. Feldern untersuchen. Für die Materie gilt:

$$\frac{d\epsilon_M}{dt} \stackrel{\text{Ruhe- + kin. Energie}}{=} \sum_{e=1}^N q_e \vec{E}(\vec{x}_e, t) \cdot \vec{u}_e; \quad \epsilon_M = \sum_e \epsilon_e; \quad \epsilon_e = \gamma_{u_e} m_{0e} c^2$$

$$\frac{d\vec{\pi}_M}{dt} = \sum_{e=1}^N q_e [\vec{E}(\vec{x}_e, t) + \vec{u}_e \times \vec{B}(\vec{x}_e, t)]; \quad \vec{\pi}_M = \sum_{e=1}^N \vec{\pi}_e;$$

$$\vec{\pi}_e = \gamma_{u_e} m_{0e} \vec{u}_e$$

Mit den Ladungs- und Stromdichten

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_{e=1}^N q_e \delta(\vec{x} - \vec{x}_e); \quad \vec{j}(\vec{x}, t) = \sum_{e=1}^N q_e \vec{u}_e \delta(\vec{x} - \vec{x}_e)$$

können wir auch schreiben:

$$\frac{d\epsilon_M}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{E} \cdot \vec{j}; \quad \frac{d\vec{\pi}_M}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{f}_{\text{Lor}}$$

mit der Lorentz-Kraftdichte  $\vec{f}_{\text{Lor}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$

Diese Bilanzen lassen sich ggf. auch auf einen Raum-

Bereich  $\mathcal{D}$  einschränken mit  $N_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} d^3x \sum_{e=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_e)$ .



Mit  $\vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \frac{1}{2} \nabla (|\vec{a}|^2) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a}$  folgt:

$$-\vec{f}_{\text{Lor}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (-T^{mn}), \text{ wobei } (\vec{\nabla} \cdot T_{ij})_j = \partial_i T_{ij}$$

ist und der Maxwell'sche Spannungstensor lautet:

$$T_{ij}^{mn} = \epsilon_0 \left[ E_i E_j + c^2 (B_i B_j) - \frac{1}{2} \delta_{ij} (|\vec{E}|^2 + c^2 |\vec{B}|^2) \right]$$

Insgesamt gilt in einem Gebiet  $D$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \vec{\Pi}_{m,D} + \int_D d^3x \left( \frac{1}{c^2} \vec{S} \right) \right] = - \int_{\partial D} d\vec{F} \cdot (-T^{mn})$$

Also stellt  $\frac{1}{c^2} \vec{S}$  die Impulsdichte und  $-T^{mn}$  die Impulsstromdichte des elektromagnetischen Feldes dar. In 4-Schreibweise gilt:

$$-\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu = -f^\mu = \partial_\nu T^{\mu\nu}; \quad T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_E & \frac{1}{c} \vec{S}^T \\ \frac{1}{c} \vec{S} & -T^{mn} \end{pmatrix}$$

$$T^{\mu\nu} = -\epsilon_0 F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_F$$

$$= \epsilon_0 \left( -F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right)$$

(157) Spannungstensor  $\hat{=}$  Energie-Impuls-Tensor

## 6.7 Coulomb-Vielteilchenproblem und Regularisierung der „Selbstenergie“

Aus 6.4 ergibt sich für die Wirkung von  $N$  geladenen Teilchen und dem von ihnen erzeugten elektromagnetischen Feld:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt (L_m + L_{ww} + \int d^3x \mathcal{L}_F) \quad (*)$$

mit  $L_m = - \sum_{e=1}^N m_{0e} c^2 \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}_e|^2}{c^2}}$ ;  $\mathcal{L}_F = \frac{1}{2} \epsilon_0 (|\vec{E}|^2 - c^2 |\vec{B}|^2)$

$$L_{ww} = \sum_{e=1}^N q_e [\vec{v}_e \cdot \vec{A}(\vec{x}_e, t) - \Phi(\vec{x}_e, t)]$$

sowie für die Hamilton-Funktion:

$$H = \sum_{e=1}^N \sqrt{|\vec{\pi}_e|^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3x (|\vec{E}|^2 + c^2 |\vec{B}|^2) \quad (II)$$

mit  $\vec{\pi}_e = \vec{p}_e - q_e \vec{A}(\vec{x}_e, t) = \gamma_{v_e} m_{0e} \vec{v}_e$

**Problem:** die Ausdrücke (\*) und (II) sind (für punktförmige Teilchen) jeweils divergent!

(158)  $(\int d^3x |\vec{E}|^2 = +\infty$  für jede Umgebung <sup>einer</sup> Punktladung)

Ansatz: • wähle Coulomb-Eichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

• zerlege  $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$  in Summe von rotations- und divergenzfreien Anteilen

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &= -\vec{\nabla} \phi & \vec{E}_{\perp} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}_{\parallel} &= \vec{0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\perp} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int d^3x |\vec{E}|^2 &= \int d^3x [|\vec{E}_{\perp}|^2 - 2(\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{E}_{\perp} + (\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \phi)] \\ &= \int d^3x [|\vec{E}_{\perp}|^2 - 2\phi \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\perp})}_{=0} - \phi \Delta \phi] \\ &= \int d^3x [|\vec{E}_{\perp}|^2 + \frac{1}{\epsilon_0} \rho \phi] \\ &= \int d^3x |\vec{E}_{\perp}|^2 + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{e=1}^N q_e \phi(\vec{x}_e, t) \end{aligned}$$

mit  $\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{m=1}^N \frac{q_m}{|\vec{x} - \vec{x}_m(t)|}$  (A)

In der Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} H &= \sum_{e=1}^N \sqrt{(\hbar \vec{\pi}_e)^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4} + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N q_e \phi(\vec{x}_e, t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3x \left[ \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 + c^2 |\vec{\nabla} \times \vec{A}|^2 \right] \quad (B) \end{aligned}$$

entspricht die Divergenz gerade dem Term  $\rho = m$ , d.h. Selbstenergie - Beiträgen der

Form 
$$S_e = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q_e^2}{|\vec{x}_e - \vec{x}_e|}$$

Da die Selbstenergie endlich sein muss (Paarerzeugung), ist sie durch eine Konstante zu ersetzen, die wir 0 wählen können:

$$H = \sum_{e=1}^N \sqrt{|\vec{\pi}_e|^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{e \neq m} \frac{q_e q_m}{|\vec{x}_e - \vec{x}_m|} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3x \left[ \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 + c^2 |\vec{\nabla} \times \vec{A}|^2 \right]$$

„regularisierte“ Hamilton-Funktion

Analog: 
$$L_{ww} = \sum_{e=1}^N q_e \vec{v}_e \cdot \vec{A}(\vec{x}_e, t) - \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{e \neq m} \frac{q_e q_m}{|\vec{x}_e - \vec{x}_m|}$$

$$\mathcal{L}_F = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3x (|\vec{E}_\perp|^2 - c^2 |\vec{B}|^2)$$

regularisierte Wirkung