

Klassische Feldtheorie

Nils Blümer

Notiztitel

21.10.2012

Vorlesung „Theoretische Physik 5: Klassische Feldtheorie“ im Bachelor-Studiengang Physik (6. Semester) an der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz, gehalten von Prof. Dr. N. Blümer.

- Organisation:
- Vorstellung Assistent: Daniel Rost (ggf. auch Elena Gorelik)
 - Anmeldung zu Übungen → Doodle
 - Ausgabe 1. Übungsblatt
 - Ausgabe Merkblatt
 - Vorstellung Web-Seite
 - Umfrage: gehörte Vorlesungen

Vorbemerkungen

Vorlesungsstil: (farbige) Kreide an Tafel, incl. Skizzen
selten auch Beamer

+ konkret, flexibel, richtiges Tempo

- umständlich, fehleranfällig, uncool

①

Empfehlung: • Mitschreiben

• Fragen stellen! Korrigieren!

• Nacharbeiten (ggf. mit Skript)

Wichtig: Übung macht den Meister!

→ Aufgaben **selbst** bearbeiten + vorrechnen!

Neu: • nur Einzelabgabe

• **nicht** nach van-Dongen-Skript

Inhaltsüberblick: Themenliste siehe Webseite

Genauer Ablauf: später

Zunächst: • Feldbegriff (\sim ED)

• Hydrodynamik

1 Der Feldbegriff und seine Entstehung

- Fragen:**
- Wie definiert sich eine Feldtheorie?
 - Was kann/soll sie leisten?
 - Wieso ist die Punktmechanik (z.B. mit Coulomb-Gesetz) unzureichend?
 - Stellenwert im Standardmodell?

1.1 Punktmechanik versus Kontinuumsphysik

ca. 250 v. Chr. Wellencharakter von Schall
(Chrysispos von Soli)

ca. 1500 Schall braucht Medium (z.B. Luft), endliche Geschwindigkeit (da Vinci)

1686 Newtonsches Gravitationsgesetz

ca. 1750 Wellengleichung für Schall (Euler)

1755 Euler-Gleichungen für reibungsfreie Flüssigkeiten

1785 Coulomb-Gesetz

1803 Atom-Hypothese \leftrightarrow Chemie (Dalton)

③ 1831 Faradaysches Induktionsgesetz

1862 Maxwell-Gleichungen (Feldtheorie, Vereinigung von Elektromagnetismus + Optik)

1888 Nachweis elm. Wellen (Hertz)

1890 moderne Formulierung MG (Hertz)

1905 Spezielle Relativitätstheorie (Einstein)

1915 Allgemeine Relativitätstheorie (")

Stand der Physik um 1800:

Punktmechanik „Atomismus“	Kontinuumsphysik „Dynamismus“
Newton's Gravitation Coulomb-Gesetz	Hydrostatik / Dynamik Akustik Wärmelehre Optik Magnetismus
Instantane Fernwirkung	Verzögerte Nahwirkung

Newton's Gravitationsgesetz $\vec{F} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$

- Musterbeispiel für einfaches Kraftgesetz mit breitem Anwendungsbereich:

- + Bahnen der Himmelskörper
- + Bewegung eines geworfenen Steins

Aber: • impliziert instantane Fernwirkung
• keine fundamentale Begründung
(\rightarrow zunächst Befremden, dann akzeptiert)

Analog: Coulomb-Gesetz

Also: Punktmechanik für Gravitation + elektr. Kraft
sehr erfolgreich, konsistent mit Atomhypothese.

Dagegen Kontinuumsphysik z. B. für Wärmelehre,
Hydrodynamik und Optik (Interferenzversuche
von Fresnel, später Photoeffekt \rightarrow Quantentheorie).
Zurückführung auf Punktmechanik möglich /
wünschenswert?

1.2 „Dynamismus“ und Feldvorstellung

Idee/Frage: lässt sich die Punktmechanik mit hydrodynamischen Vorstellungen, d. h. ohne Fernwirkung verstehen?

Analogie: die Kraft im Coulomb- und Gravitationsgesetz entspricht dem Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit, die aus einer punktförmigen Quelle strömt (bzw. in diese hinein)

$\frac{1}{r^2}$ -Gesetz auch für scheinbare Helligkeit einer punktförmigen isotropen Lichtquelle.

„Dynamismus“: universelle „Kraft“ mit verschiedenen Erscheinungsformen („optische Kraft“, „Wärme-Kraft“, „elektrische Kraft“ etc.), die ineinander umgewandelt werden können. „Naturphilosophie“, im Gegensatz zu „materialistisch“ und „geistfarrer“ Punktmechanik (\sim Energieerhaltung)

⑥

// 22.10.12

Beobachtung (Ritter, ca. 1800): Stromerzeugung aus galvanischem Element ist stets mit chemischer Reaktion verbunden, d.h. „chemische Kraft“ \rightarrow „galvanische Kraft“

Oersted, 1820: Magnetnadel wird durch Strom in geradem Draht quer zu diesem abgelenkt

Ampère, 1822: Magnetismus als Wirkung bewegter Ladungen; Kreisströme in Ferromagneten.
„elektrische Kraft“ \rightarrow „magnetische Kraft“

Faraday, 1831: Induktionsgesetz („magnetischelek.“ \rightarrow „elektrische Kraft“), Raum von Feldern elektrischer und magnetischer Kraftlinien durchsetzt. Einschluss der Gravitation?

[außerdem: Joulesche Wärme (Joule, 1840)]

22.10.12

1.3 Entdeckung der Maxwell-Gleichungen

Maxwell, 1862: mathematische Formulierung der Faradayschen Ideen (Begriff von Feldern, magn. Induktion) sowie aller früher gefundenen elm. Gesetze (Coulomb-, Amperesches Gesetz) **zuzüglich** des **Verschiebungsstroms**

→ • einheitliche Theorie des Elektromagnetismus
• Wellenlösungen mit **Lichtgeschwindigkeit**

1728 Bradley Aberration $c \approx 301\,000 \text{ km/s}$

1851 Foucault Drehspiegel $c \approx 298\,000 \text{ km/s}$

(1983 Definition $c = 299\,792,458 \text{ km/s}$)

→ **Licht** vermutlich elm. Welle

Hertz, 1888: Erzeugung + Nachweis elm. Wellen

Ursprünglich galten die MG als kompliziert und unverständlich [Anekdote: Niederlegung des Lehramts durch Hittorf (Gasentladung)]

⑧ Hertz, 1890: heutige Form der MG

1.4 Das „Feld“: Hilfskonstrukt oder Realität?

Nichttriviale Beobachtung: neben der Gravitation gibt es nur eine weitere langreichweitige Kraft, die an Materie über eine einzige extensive Eigenschaft koppelt, die **Ladung**.

Laut dem **deterministischen Prinzip** muss sich die Kraft \vec{F} auf ein Punktteilchen mit Ladung q am Ort $\vec{x}(t)$ im **isotropen Raum** schreiben lassen als:

$$\vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = q (\vec{E}(t, \vec{x}) + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}(t, \vec{x}))$$

Lorentz-Kraft

Obwohl sich z. B. das Coulomb-Gesetz derart ausdrücken lässt (z. B. für Ladung Q im Ursprung):

$$\vec{F}^e = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (\Leftrightarrow) \quad \vec{F} = q\vec{E} \quad \text{mit} \quad \vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

erscheint $\vec{E}(\vec{x})$ zunächst nur als Hilfsgröße (nur relevant, falls **Probeladung** am Ort \vec{x}).

⑨ Außerdem: immer noch **Fernwirkung!**

Frage: haben \vec{E} und \vec{B} eine eigene Realität, unabhängig von Probeladungen (\sim Schrödingers Katze)?

1) Betrachte Kraft von bewegter Punktladung Q am Ort \vec{x} auf (bewegte) Probeladung q am

Ort \vec{x} :
$$\vec{F} = q (\vec{E}_{\text{ret}} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}_{\text{ret}}) \quad (*)$$

mit
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}\right) \frac{\vec{r} - \frac{\dot{\vec{x}}}{c}}{r^2 (1 - \vec{r} \cdot \dot{\vec{x}}/c)^3} + \frac{1}{c} \frac{\vec{r} \times (\dot{\vec{r}} - \frac{\dot{\vec{x}}}{c}) \times \ddot{\vec{x}}/c}{r (1 - \vec{r} \cdot \dot{\vec{x}}/c)^3} \right] \quad (\Delta)$$

$$\vec{B} = \vec{r}_0 \times \vec{E} \quad (\square)$$

mit $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}$; $r = |\vec{r}|$; $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$,

wobei „ret“ in $*$ bedeutet, dass \vec{x} und $\dot{\vec{x}}$ in Δ und \square jeweils zu den retardierten Zeiten $t_{\text{ret}} = t - \frac{r}{c}$ auszuwerten sind.

Als punktmechanisches Gesetz erscheint $*, \Delta, \square$ zu kompliziert um fundamental zu sein \leadsto

Feldynamik mit Ausbreitungsgeschw. c .

2) MG haben Wellenlösungen im Vakuum
(keine Punktmechanik möglich)

3) Gedankenexperiment: 2 entgegengesetzt geladene
Teilchen durchlaufen Kepler-Bahnen. Plötzlich
zerfällt eines der Teilchen senkrecht zur
Bahnebene:

wegen des größeren
Abstandes erfahren die

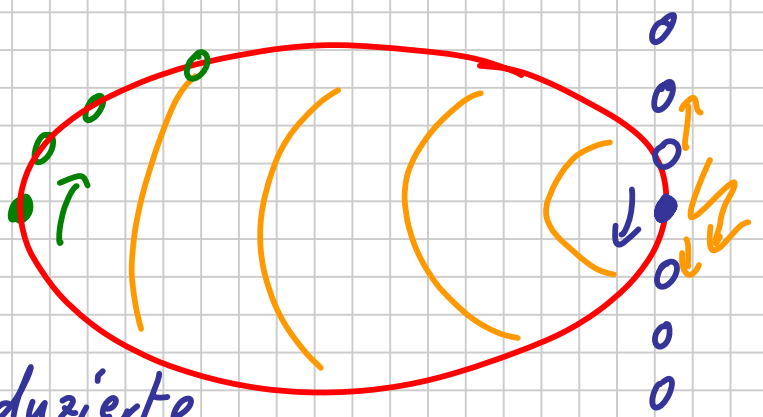
Bruchstücke eine reduzierte

Zentripetal beschleunigung. Das zweite Teilchen
muss jedoch der ursprünglichen Bahn folgen,
bis der Ereignishorizont der Explosion eintrifft.

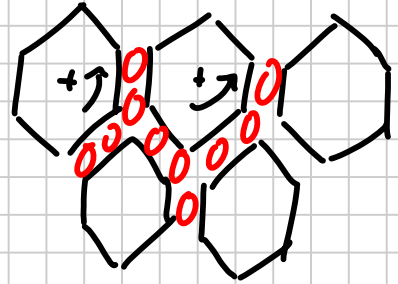
~> Feld muss Impuls (+ Energie) tragen.

Frage: Medium des elektromagnetischen
Feldes (wie Flüssigkeit oder Gas für Schall)?

Äther: feines elastisches Medium



Maxwell's Äthermodell: Elementarwirbel plus Ladungsteilchen, die wie Kugellager wirken, wobei die Winkelgeschwindigkeit der Wirbel dem Magnetfeld entspricht.



Fadenförmiger Strom von Ladungsteilchen
→ Magnetfeld

Unterschiedliche Rotationsgeschwindigkeit der Wirbel → Strom (eher $I \sim \phi$ statt $I \sim \dot{\phi}$)

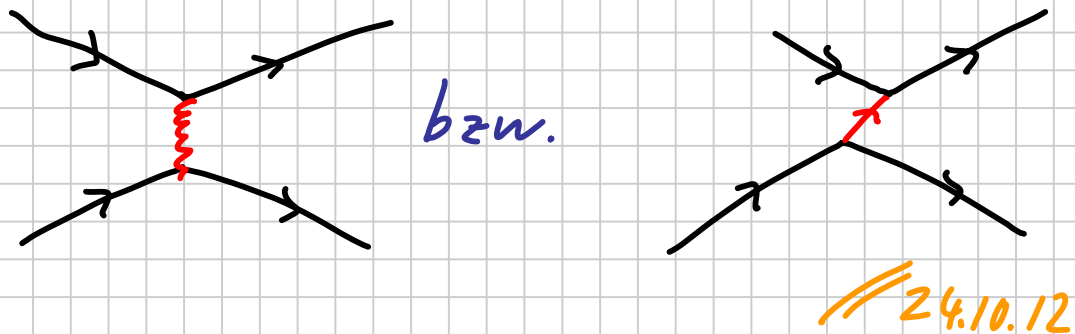
Widerlegung der Ätherhypothese durch Messungen von c (Michelson, 1881 + Morley, 1887) und SRT (Einstein, 1905)

→ nur Raumzeit + Feld, sonst nichts!

Später: auch Gravitation als Feldtheorie (Einstein, 1915), die auf die Metrik der Raumzeit zurückwirkt (Elimination der Kraft!)

1.5 Der Feldbegriff in der modernen Physik

Heute: Feldtheorien als fundamentale Beschreibung,
 Punkt begriff als Approximation bzw. als
 Quantisierung von Feldern (Welle-Teilchen-
 Dualismus). Insbesondere *Nahwirkungskonzept*,
 z.B. in Feynman-Diagrammen:



4 fundamentale Wechselwirkungen

Name	rel. Stärke	Reichweite
Starke WW	1	10^{-15} m^*
elektro- schwach	elm. WW	∞
	schwache WW	10^{-18} m^*
Gravitation	10^{-40}	∞

stark + schwach: nur kleine Abstände \rightarrow QFT

→ nur die Elektrodynamik lässt sich sinnvoll als **klassische Feldtheorie** im „normalen Raum“ beschreiben.

Die **WW** des **Standardmodells** haben als **Eichtheorien** spezielle Symmetrien; sie lassen sich bei hohen Energien vereinheitlichen (z.B. **Nobelpreis 1979** für Eichtheorie der elektroschwachen WW: **Glashow, Salam, Weinberg**).

Ausser als mikroskopische Theorie (für ED) sind **klassische Feldtheorien** auch als **phänomenologische Theorien** für kontinuierliche Systeme essentiell, z.B. für die Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen, Wärmetransport, chemische Umsetzungen, Plasmen etc.

1.6 Mathematische Formulierung des Feldbegriffs

Generelle Vorstellung: jeder Punkt des Raums wird zum Träger zusätzlicher Qualitäten wie Druck, Temperatur, Dichte, Strömungsgeschwindigkeit und/oder elektrischer und magnetischer Feldstärke.

Genauer: ein Feld ist eine Abbildung des Raumes (bzw. der Raum-Zeit) in eine Menge F seiner möglichen Werte

Bsp: $F = \mathbb{R}^+$ für Druck-, Temperatur-, Dichtefelder
 $F = \mathbb{R}^3$ für Strömungsfeld

Aufgabe der Feldtheorie:

- 1) Charakterisierung „legaler“ Feldkonfigurationen
- 2) Berechnung ihrer Dynamik
- 3) Konstruktion des Feldes für geg. Randbedingungen

Wichtig: Felder haben überabzählb. viele Freiheits-

grade (Gegensatz zu Punktteilchensystemen)

Setzt formal (zunächst nichtrelativistisch):

Physikalischer Raum ist dreidimensionaler affiner Raum E^3 (Punktraum + Differenzvektoren) über einem dreidimensionalen Euklidischen Vektorraum V^3 .

Ein Feld A ^{bzw. eine Feldkonfiguration} ist zunächst eine Abbildung

$$A: E^3 \rightarrow F: \vec{x} \in E^3 \mapsto A(\vec{x}) \in F$$

Die **Dynamik** der Felder lässt sich auf 2 Arten beschreiben:

1) mit zeitabhängiger Abbildungsfunktion

$$A = A(t): E^{(3)} \rightarrow F$$

2) durch Erweiterung der Definitionsmenge auf die Raum-Zeit:

$$A: \mathbb{R} \times E^3 \rightarrow F: (t, \vec{x}) \mapsto A(t, \vec{x})$$

Druck-, Temperatur- und Dichtefelder sind Beispiele für Skalarfelder (mit $F \subset \mathbb{R}$),*

(* in Quantentheorie auch Felder über dem Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C})

dagegen handelt es sich bei Strömungsfeldern und elm. Feldern um **Vektorfelder**, bei denen F ein **reeller*** **Vektorraum** ist, nämlich (i.d.R.) genau der Vektorraum V^3 , zu dem E^3 gehört.

Die Feldstärke gibt in jedem Punkt eine **Richtung** im wirklichen Raum an (sowie einen Betrag), muss also bei **Drehungen** der Randbedingungen **mitgedreht** werden:

$$\vec{A}^R(R\vec{x}) = R \vec{A}(\vec{x}) \Leftrightarrow \vec{A}^R(\vec{x}) = R \vec{A}(R^{-1}\vec{x})$$

$$\text{bzw.: } \vec{A}^R = R \circ \vec{A} \circ R^{-1}$$

Dagegen wirken **Translationen** nur im Urbildraum E^3 , nicht im Bildraum V^3 :

$$\vec{A}^{T(\vec{a})}(\vec{x} + \vec{a}) = \vec{A}(\vec{x}) \Leftrightarrow \vec{A}^{T(\vec{a})}(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x} - \vec{a})$$

(Unterschied affiner \Leftrightarrow Vektorraum)

Später: Tensorfelder (z. B. als (anti-)symmetrisiertes Tensorprodukt über V^3)

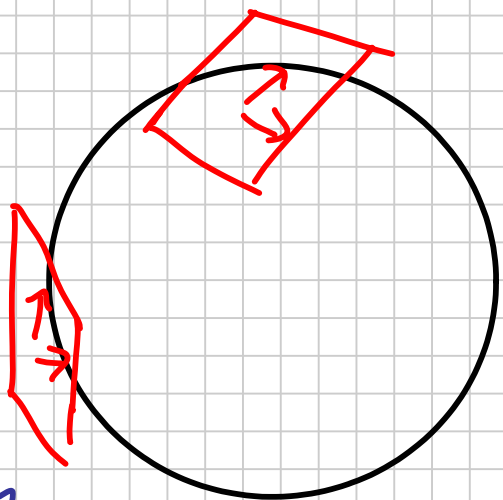
In spezieller Relativitätstheorie: affiner Raum E^4 über vierdimensionalem Minkowski-Raum.

In allgemeiner Relativitätstheorie: Feldtyp, dessen Wertebereich an jedem Raum-Zeit-Punkt ein anderer Vektorraum ist; diese Vektorräume hängen differenzierbar vom Aufpunkt ab.

Analogie: Tangentialvektorfeld an Sphäre $S_1^{(2)}$

z. B. von Windstärken auf Erdkugel (vertikale Komponenten vernachlässigt):

$\vec{x} \mapsto \vec{T}(\vec{x})$ aus zweidimensionalem Tangentialraum,



Auch möglich: Vektorräume als Wertebereich von Feldern, die keinen Bezug zu Raumrichtungen

⑬ haben. Beispiele: Phasen, Isospin