

2 Elemente der Hydrodynamik

Jetzt konkret: Theorie der **Fluide**, d.h. von Flüssigkeiten und Gasen.

Fundamentales Feld: **Strömungsfeld** $\vec{v}(t, \vec{x})$, das die **Strömungsgeschwindigkeit** angibt.

Visualisierung möglich durch **Stromlinien** $\vec{x}(\tau)$, deren Tangente in jedem Punkt parallel zum Strömungsfeld ist, z.B.: $\frac{d\vec{x}}{d\tau}(\tau) = \vec{v}(t, \vec{x}(\tau))$

(hier **Bahnparameter** τ bis auf Konstante festgelegt).

Analog definiert man für allgemeine Vektorfelder **Feldlinien**.

2.1 Bilanzgleichungen

Zusätzlich zu $\vec{v}(t, \vec{x})$ definieren wir die

① **Massendichte** $\rho(t, \vec{x})$ und die **Massen-**

stromdichte $\vec{j}(t, \vec{x})$ (Skalar- bzw. Vektorf.)

Dabei gibt \vec{j} die durch eine ^{infinitesimale} Fläche mit Normale \vec{j} strömende Masse pro Zeit- und Flächeneinheit an: im Zeitraum t_1 bis t_2 fließt durch eine Fläche F die Masse:

$$m_F(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \mu_F(t) \quad \text{mit} \quad \mu_F(t) = \int_F d\vec{f} \cdot \vec{j}(t, \vec{x})$$

Es gilt: $\vec{j} = \rho \vec{v}$

Wir betrachten nun ein festes Volumen V mit Rand ∂V . Zur Zeit t enthält dieses die Gesamtmasse $m_V(t) = \int_V d^3x \rho(t, \vec{x})$

In Abwesenheit von Quellen oder Senken kann sich m_V nur durch Ein- oder Ausströmen von Masse über den Rand ändern. Orientiert man ∂V nach außen, so gilt also:

$$\textcircled{20} \quad \frac{dm_V}{dt}(t) = \int_V d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, \vec{x}) = - \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{j}(t, \vec{x})$$

Massenerhaltung

$$\stackrel{\text{Gauss}}{=} - \int_V d^3x (\vec{\nabla} \cdot \vec{j})(t, \vec{x})$$

Wegen V beliebig gilt also die Bilanz- oder Kontinuitätsgleichung für die Masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

29.10.12

Auch andere extensive Größen lassen sich bilanzieren, z. B. elektrische Ladung, Energie, Impuls, Drehimpuls etc. Wenn wir für die Größe a eine Quelldichte $q^a(t, \vec{x})$ (d.h. die pro Zeit- und Volumeneinheit nachgelieferte Menge der Größe a) zulassen, so gilt:

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}^a = q^a \quad \text{Bilanzgleichung}$$

Die Existenz von Quellen oder Senken deutet darauf hin, dass die entsprechende Größe (insgesamt) nicht erhalten oder das System nicht abgeschlossen ist.

$$(21) \quad (q^a \equiv 0 \rightarrow \text{Erhaltungssatz } \frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}^a = 0)$$

Der **Austausch** einer extensiven Größe a zwischen zwei physikalischen Systemen ist möglich

- 1) über Grenzflächen (z.B. Flüssigkeit \leftrightarrow Behälter)
- 2) wenn beide Systeme überlappen oder sich sogar vollständig räumlich überlagern.

Nur im Fall 2 können für Erhaltungsgrößen Quellterme auftauchen (mit $\sum_i q_i^a = 0$)

Beispiele: (i) Ohmsche Verluste im Leiter
(elektrische Energie \rightarrow Wärme)

(ii) Austausch von Energie und Impuls zwischen bewegten el. Ladungen und dem elm. Feld

Dagegen gilt z.B. für die Entropie S : $q^S \geq 0$.

Der **Transport** von extensiven Größen hat in Fluiden

i. A. 2 Komponenten, die jeweils zur **Stromdichte**

\vec{j}^a beitragen:

a) **Konvektion** $\vec{j}_{\text{konv}}^a = \rho^a \vec{v}$

(Mitführung mit der Strömung)

b) **Konduktion** \vec{j}_{kond}^a (Leitung)

Z. B. Wärmeleitung auch bei $\vec{v} = 0$.

Dagegen wäre Wärmestrahlung innerhalb des Fluids durch Quellen + Senken zu beschreiben.

Gesamtstrom: $\vec{j}^a = \vec{j}_{\text{konv}}^a + \vec{j}_{\text{kond}}^a = \rho^a \vec{v} + \vec{j}_{\text{kond}}^a$

2.2 Impulsbilanz und Drehimpulsbilanz

Da die **Impulsdichte** $\vec{\rho}^p(t, \vec{x})$ selbst schon eine vektorielle Größe ist, handelt es sich bei der zugehörigen **Stromdichte** $\vec{j}^p(t, \vec{x})$ um ein **Tensorfeld** zweiter Stufe. Die **Quelldichte** ist offensichtlich eine **Kraftdichte** $\vec{f}(t, \vec{x})$.

Damit lautet die Bilanzgleichung (in Komponenten):

$$\frac{\partial \rho_i^p}{\partial t} + \nabla_a \dot{j}_{ia}^p = f_i \quad (*)$$

Z. B. gilt im äußeren Schwerfeld: $\vec{f} = \rho \vec{g}$.

Der pro Zeiteinheit durch eine Fläche strömende Impuls kann als Druckkraft auf diese Fläche angesehen werden: $F_i = \int_F d f_a \dot{j}_{ia}^P$

\dot{j}_{ia}^P gibt also die i -te Komponente der Kraft pro Fläche auf ein Flächenelement mit Normale in a -Richtung an.

Falls F geschlossen ist, gilt mit $F = \partial V$ für das eingeschlossene Volumen V :

$$F_i = \int_{\partial V} d f_a \dot{j}_{ia}^P \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_V d^3x \underbrace{\nabla_a \dot{j}_{ia}^P}_{\text{"innere Kraftdichte"}}$$

In einem Fluid gilt konkret $\vec{j}^P = \rho \vec{v}$

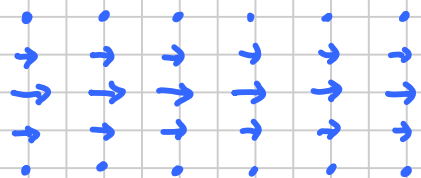
$$\Rightarrow \dot{j}_{ia}^P = (\dot{j}_{konv}^P)_{ia} + (\dot{j}_{Kond}^P)_{ia} = \rho v_i v_a + \sigma_{ia}$$

mit dem (hierdurch definierten) Drucktensor σ

Beispiel: Betrachte eine viskose Flüssigkeit (mit

innerer Reibung) und anfangs

(24) inhomogenem Strömungsprofil:



Ohne äußere Kräfte wird sich die Impulsdichte „konduktiv“ von der schnell strömenden Mitte nach oben und unten ausbreiten.

Analog zu * lautet die Bilanzgleichung für den

Drehimpuls:
$$\frac{\partial p_i^L}{\partial t} + \nabla_e j_{ie}^L = d_i \quad (\Delta)$$

mit der Drehmomentdichte $\vec{d}(t, \vec{x})$.

Für normal strömende Fluide und elastische Kontinua (nicht jedoch z.B. für spinbehaftete Teilchen oder eine Suspension von magnetischen Partikeln im Magnetfeld) gilt:

a) kein „innerer Drehimpuls“, d.h. es gilt:

$$\vec{p}^L(t, \vec{x}) = \vec{x} \times \vec{p}^P(t, \vec{x}) \Leftrightarrow p_i^L = \epsilon_{ija} x_j p_a^P$$

$$j_{ie}^L = \epsilon_{ija} x_j j_{ek}^P$$

b) keine „inneren Drehmomente“: $d_i = \epsilon_{ija} x_j f_e$

$$\Rightarrow \epsilon_{ije} x_j \frac{\partial p_e^P}{\partial t} + \nabla_a (\epsilon_{ije} x_j j_{ea}^P) = \epsilon_{ije} x_j f_e$$

$$(25) \Rightarrow \epsilon_{ije} x_j \left(\frac{\partial p_e^P}{\partial t} + \nabla_a j_{ea}^P \right) + \epsilon_{iae} j_{ek}^P = \epsilon_{ije} x_j f_e$$

(□: Produktregel und $\nabla_a x_j = \delta_{aj}$)

Mit der Impulsbilanz * folgt:

$$\text{Eiell } j_{ea}^p = 0 \Leftrightarrow j_{ea}^p = j_{ae}^p$$

Die Impulsstromdichte ist für normale Fluide also ein symmetrisches Tensorfeld.

2.3 Die Navier-Stokes-Gleichungen

In der Impuls-Bilanzgleichung

$$\frac{\partial p_i^p}{\partial t} + \nabla_a (\rho v_i v_a + \sigma_{ia}) = f_i$$

lässt sich der isotrope und geschwindigkeitsunabhängige Anteil des Drucktensors als skalarer Druck

identifizieren: $\sigma_{ia} = p \delta_{ia} + \sigma'_{ia}$,

der also als innere Potentialkraft aufgefasst

werden kann: $\vec{f}^{in} = -\vec{\nabla} p$

Dagegen entspricht der geschwindigkeitsabhängige

Anteil σ'_{ia} innerer Reibung. Insgesamt

②6 können wir für die Impulsbilanz schreiben:

$$\begin{aligned}
 f_i &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla_a(\rho v_i v_a + p \delta_{ia} + \tau_{ia}') \\
 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \nabla_a(\rho v_a) + \rho v_a \nabla_a v_i + \nabla_i p + \nabla_a \tau_{ia}' \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=0 \text{ wegen } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla(\rho \vec{v}) = 0} \\
 &= \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_a \nabla_a v_i \right) + \nabla_i p + \nabla_a \tau_{ia}'
 \end{aligned}$$

2.3.1 Ideale Fluide

Für ein ideales Fluid gilt definitionsgemäß $\sigma' = 0$ (keine innere Reibung). Es folgt

dann

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] + \nabla \dot{p} = \vec{f} \quad (E1)$$

Euler - Strömungsgleichung

31.10.12

Dabei hat die ersten beiden Terme links eine einfache Interpretation als substantielle Ableitung $\frac{D}{Dt}$ von \vec{v} , d.h. die zeitliche Änderung entlang der Stromlinien. Allgemein lautet diese für

(27) eine beliebige Größe A :

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt}(t, \vec{x}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t+\Delta t, \vec{x}+\Delta \vec{x}) - A(t, \vec{x})}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t+\Delta t, \vec{x} + \vec{v}(t, \vec{x})\Delta t) - A(t, \vec{x})}{\Delta t} \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) A \right) (t, \vec{x}) \end{aligned}$$

Also ist $D\vec{v}/Dt$ die Beschleunigung eines Massenelements auf seiner Bahn. Es folgt:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \vec{\nabla} p \quad (E2)$$

D.h. Euler Gleichung $\hat{=}$ Newton-Gleichung für ideales Fluid (ohne Reibung).

Mit $\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(v^2) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ gilt auch

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}(v^2) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right) + \vec{\nabla} p = \vec{f} \quad (E3)$$

2.3.2 Stationäre Strömung inkompressibler idealer Fluide - Bernoulli-Gesetz

Wir machen jetzt (vorübergehend) zusätzliche

Annahmen:

(i) inkompressibles Fluid: $\rho(t, \vec{x}) = \rho_0$

(ii) stationäre Strömung: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

(iii) wirbelfreie Strömung: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$

(iv) äußere Potentialkraft: $\vec{f} = -\vec{\nabla} \phi$

$$\Rightarrow \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}(v^2) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right) + \vec{\nabla} p = \vec{f} = -\vec{\nabla} \phi$$

$\rho = \rho_0$ (i) $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ (ii) $\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{0}$ (iii) $\vec{f} = -\vec{\nabla} \phi$ (iv)

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \rho_0 v^2 + p + \phi \right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \rho_0 v^2 + p + \phi = \text{konst.}$$

Gesetz von Bernoulli

Energiesatz für ideale inkompressible Fluide.

2.3.3 Hydrostatik

Noch einfacher ist die Hydrostatik, d.h. $\vec{v} = \vec{0}$

(\leadsto Punkte (i)-(iii) von 2.3.2 automatisch erfüllt)

$$\Rightarrow \vec{\nabla} p = \vec{f} \quad (= -\vec{\nabla} \phi \text{ für Potentialkraft}).$$

Im homogenen Schwerfeld $\vec{f} = \rho \vec{g}$ gilt dann

29 für inkompressible Fluide: $\vec{\nabla} (p - \rho_0 \vec{g} \cdot \vec{x}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow p(\vec{x}) = p_0 + \rho_0 \vec{g} \cdot \vec{x}$$

Der Druck nimmt also linear mit der Tiefe zu.

Für die Kraft \vec{F} auf einen eingebrachten Körper

$$\text{gilt: } F_i = - \int_{\partial V} dA_e j_{ie}^p \stackrel{\text{Gauß}}{=} - \int_V d^3x \nabla_e j_{ie}^p$$

Dabei sind offenbar alle Impulsstromverteilungen gleichwertig, die am Rand ∂V die richtigen Werte haben. Insbesondere können wir das $j_{ie}^p(\vec{x})$ verwenden, das für ein statisches Fluid mit $\rho = \rho_0$

$$\text{korrekt wäre: } j_{ie}^p = \rho v_i v_e + p \delta_{ie} + \nabla_{ie}^p$$

$$\Rightarrow \nabla_e j_{ie}^p = \nabla_i p = \rho_0 g_i$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\rho_0 V \vec{g}$$

↑ keine Reibung
ohne Geschw.

Gesetz von Archimedes: der Auftrieb eines beliebigen Körpers entspricht dem Gewicht des verdrängten Wassers.

2.3.4 Newtonsche Fluide

Reibung setzt eine Relativbewegung von Fluidteilchen voraus, d.h. $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \neq 0$.

Einfachste Annahme: lineare Abhängigkeit

zwischen σ'_{ia} und $\nabla_i v_a$

Wegen der Symmetrie $\sigma'_{ia} = \sigma'_{ai}$ und bei Isotropie ist dann der allgemeinste Zusammenhang:

$$\sigma'_{ia} = -\eta \underbrace{(\nabla_i v_a + \nabla_a v_i - \frac{2}{3} \delta_{ia} \nabla_r v_r)}_{\text{spurfrei}} - \zeta \delta_{ia} \nabla_r v_r \quad (*)$$

Hier heisst η Zähigkeit oder Viskosität und

ζ Volumenzähigkeit bzw. Volumenviskosität.

Fluide, die $*$ gehorchen, heissen Newtonsche

Fluide. Falls η und ζ konstant sind, erhalten die Navier-Stokes-Gleichungen dann die Form

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) + \vec{\nabla} p - \eta \Delta \vec{v} - \left(\frac{1}{3} \eta + \zeta \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \vec{f}$$

Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ sind das 4 Gleichungen für

(31)

die 5 Unbekannten \vec{v}, ρ, p . Zur eindeutigen Bestimmung ist noch eine **Materialgleichung** wie $p = p(T, \rho)$ nötig.

Falls Temperaturänderungen nicht vernachlässigbar sind, muss man zusätzlich die Wärmeleitung (bzw. Verteilung) berücksichtigen.

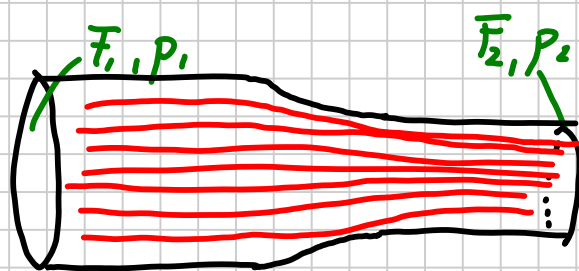
Die **Lösung** der Navier-Stokes-Gleichungen ist aufgrund der Nichtlinearitäten i.A. sehr kompliziert. // 5.11.12

2.3.5 Anwendungen:

1) Antrieb Flugzeug
(nur live)

2) Laval-Düse

Wir betrachten nun eine stationäre Strömung durch



ein Rohr mit veränderlichem Querschnitt.

Die Kontinuitätsgleichung $0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$

liefert für jeden rotationssym. Rohrabschnitt (beachte: \vec{v} asymptotisch parallel zu allen Wänden)

$$0 = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV = \oint_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot d\vec{f} = \rho_2 F_2 \bar{v}_2 - \rho_1 F_1 \bar{v}_1$$

wobei \bar{v} die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit angibt und wir für die Dichte $\rho(\vec{x}) = \rho(z)$ annehmen. Also:

$$\rho F \bar{v} = \text{konst.} \Leftrightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dF}{F} + \frac{d\bar{v}}{\bar{v}} = 0$$

Zusätzlich liefert die Euler-Gleichung mit $\vec{f} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$:

$$\frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} v^2 + \vec{\nabla} p = \vec{0}$$

$$\rho v \frac{dv}{dz} + \frac{dp}{dz} = 0 \Rightarrow v dv = - \frac{dp}{\rho}$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{F} &= - \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dv}{v} = - \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dp}{\rho v^2} = \frac{dp}{\rho v^2} \left(1 - v^2 \frac{d\rho}{dp} \right) \\ &= \frac{dp}{\rho v^2} \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dF}{F} = \frac{dv}{v} \left[\left(\frac{v}{c} \right)^2 - 1 \right]} \quad \text{Hugoniot-Gleichung}$$

(33)

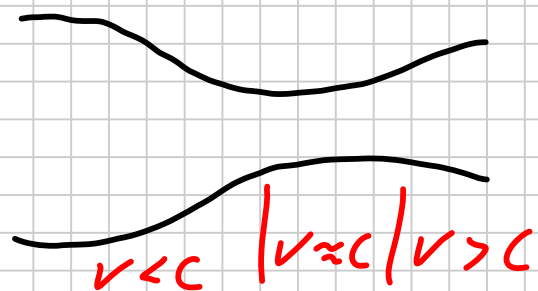
Für Geschwindigkeiten $v \ll c$ gilt also, dass Flächen- und Geschwindigkeitsänderungen umgekehrt proportional sind: $\frac{dF}{F} \approx - \frac{dv}{v}$

Dies gilt exakt für inkompressible Fluide, für die $\frac{dp}{\rho} = \frac{1}{2} = 0$: $F \cdot v = \text{konst}$

Für $v \rightarrow c$ wird die relative Geschwindigkeitszunahme (bei gleicher relativer Flächenabnahme) zunächst größer, bis sich das Vorzeichen umkehrt! Dieser Effekt wird in der Laval-Düse (schon in der V2 der Wehrmacht) benutzt:

dort wählt man die

Parameter so, dass an



der engsten Stelle $v \approx c$

erreicht wird. Nach der Verengung steigt die Geschwindigkeit dann weiter an

(\leadsto optimaler Rückstoß) // 7.11.12