

3 Elektro- und Magnetostatik

Wir betrachten die mikroskopischen *Maxwell-Gleichungen* (in SI-Einheiten)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0}_{= \frac{1}{c^2}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

(Einheitencheck: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow [\vec{E}] = [c][\vec{B}]$)

im statischen Limes $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$. Dieser ist zum einen gerechtfertigt, falls eine lokalisierte, langsam veränderliche Ladungs + Stromverteilung betrachtet wird und äußere Felder bzw. Strahlung abgeschirmt werden, andererseits für zeitliche Mittelwerte von Feldern: so gilt wegen der Linearität der MG z.B.: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Für betragsmäßig beschränkte Felder gilt

$$\begin{aligned}
 \text{weiterhin: } \left| \overline{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}(\vec{x}) \right| &:= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t, \vec{x}) \right| \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \vec{B}(T, \vec{x}) - \vec{B}(0, \vec{x}) \right| \\
 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2 B_{\max}(\vec{x})}{T} = 0
 \end{aligned}$$

Im statischen Grenzfall entkoppeln elektrische und magnetische Felder:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}); & \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) &= \vec{0} \\
 \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) &= \mu_0 \vec{j}(\vec{x}); & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

Die elektrischen und magnetischen Felder können dann separat bestimmt werden. Dabei hilft der

Satz von Helmholtz: ein Feld $f(\vec{x})$, das stetig differenzierbar ist und im Unendlichen schneller als $\frac{1}{r}$ gegen 0 geht, lässt sich in folgender Form darstellen:

$$f(\vec{x}) = \underbrace{-\vec{\nabla} a(\vec{x})}_{\text{wirbelfrei}} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{b}(\vec{x})}_{\text{quellenfrei}}$$

Daraus folgt für das (statische) elektrische Feld:
 $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \quad (\leadsto \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0)$
und die Bestimmungsgleichung

$$\Delta\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{x}) \quad (*)$$

Für das magnetische Feld folgt zunächst
 $\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) \quad (\leadsto \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0)$
mit der Bestimmungsgleichung

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Wählen wir zusätzlich die Coulomb-Eichung
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, so erhalten wir:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (\Delta)$$

Für jede Komponente A_i ist die Bestimmungsgleichung Δ also identisch zu $*$ mit den Ersetzungen $\phi \rightarrow A_i$, $\frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0 j_i$. Unterschiede
(37) ergeben sich erst auf der Ebene von \vec{E} und \vec{B} .

3.1 Elektrostatik

Die Grundaufgabe der Elektrostatik, die Bestimmung des elektrischen Feldes für eine geg. Ladungsverteilung und geg. Randbedingungen, entspricht mit $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{x})$ offensichtlich der Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$

Wegen ihrer **Linearität** gilt für Ladungsverteilungen

$\rho(\vec{x}) = \rho_1(\vec{x}) + \rho_2(\vec{x})$, dass sich (bei geeigneten RBs)

die Gesamtlösung additiv aus den Teillösungen

zusammensetzt: $\Delta \phi_{1/2}(\vec{x}) = -\frac{\rho_{1/2}(\vec{x})}{\epsilon_0} \Rightarrow \Delta \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$

für $\phi(\vec{x}) = \phi_1(\vec{x}) + \phi_2(\vec{x})$

Zusätzlich lässt sich noch eine Lösung der homogenen Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)

$$\Delta \phi_{\text{hom}}(\vec{x}) = 0 \quad \text{addieren.}$$

Strategie: löse zuerst ein Standardproblem; konstruiere aus dieser Standardlösung die allg. Lösung.

③⑧ Lege dabei die RB eindeutig fest.

3.1.1 Lösung für natürliche Randbedingungen

Wir betrachten zunächst den ganzen Raum und fordern für die Lösung $\phi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$

Unter diesen Bedingungen ist die (zweimal stetig diffbare) Lösung der Laplace-Gleichung eindeutig: $\phi_{\text{hom}}(\vec{x}) \equiv 0$

Beweis durch Mittelwertsatz von Gauß (s.u.):

Lösungen der Laplace-Gleichung nehmen alle Extrema auf dem Rand eines beschränkten Volumens an.

Falls $\phi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$, existiert für

jedes $\varepsilon > 0$ ein R_ε so dass $|\phi(\vec{x})| < \varepsilon$ für $|\vec{x}| > R_\varepsilon$

Wähle z.B. Kugel $V = \{\vec{x}; |\vec{x}| \leq R_\varepsilon\} \rightarrow |\phi(\vec{x})| < \varepsilon$

(Widerspruchsbeweis über Taylorentwicklung um angenommenes Extremum im Inneren)

$$\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_0)^T \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) (\vec{x} - \vec{x}_0) + \mathcal{O}(|\vec{x} - \vec{x}_0|^3)$$

nicht scharf genug)

(39) Also ist auch die Lösung der Poisson-

Gleichung mit natürlichen RB eindeutig:
 aus $\phi_1 \neq \phi_2$ Lösung Poisson-Gleichung folgt
 $\phi_1 - \phi_2 \neq 0$ Lösung Laplace-Gleichung \Downarrow

Als Standardproblem wählen wir das Feld
 einer punktförmigen Quelle bei \vec{x}' :

$$\Delta_{\vec{x}} G(\vec{x}; \vec{x}') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

↑
Parameter

Behauptung: $G(\vec{x}; \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$

Beweis I: (i) $G(\vec{x}; \vec{x}') \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$ RB o.k. ✓

(ii) für $\vec{x} \neq \vec{x}'$ muss gelten:

$$0 = \Delta_{\vec{x}} G(\vec{x}; \vec{x}') = \Delta_{\vec{r}} G(\vec{x}; \vec{x}')$$

mit $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$

$$\Delta_r h(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r h(r))$$

$$\Rightarrow \Delta_r G(\vec{x}; \vec{x}') = \Delta_r \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{r}{r} = 0 \checkmark$$

(iii) für $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$ integriere über Vollkugel

(40) um \vec{x}' (Radius $\varepsilon > 0$ beliebig):

$$\int_{|\vec{r}'| \leq \epsilon} d^3 r' \Delta_r G(|\vec{r}|) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\vec{r}'| \leq \epsilon} d^3 r' \Delta_r \frac{1}{|\vec{r}'|}$$

$$\stackrel{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{r}' = \epsilon} d\vec{f} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}'|}}_{= \vec{e}_r \frac{1}{r^2} = -\vec{e}_r \frac{1}{r^2}}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_{\vec{r}' = \epsilon} d\vec{f} = -1$$

$$= \int_{|\vec{r}'| \leq \epsilon} d^3 r' \delta(\vec{r}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \delta(|\vec{r}'|) \quad \checkmark$$

Die Standardlösung $G(\vec{x}; \vec{x}') \stackrel{\text{hier}}{=} G(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}$ nennt man *Green-Funktion* der Poisson-Gleichung.

Allgemeine Lösung:

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3 x' G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Beachte: Wir haben zur Bestimmung der Greenfunktion einen Ausdruck gesucht, der

(4)

- (i) radialsymmetrisch war (Symmetrie des Problems): $G(\vec{r}) = g(r)$
- (ii) die Laplace-Gleichung „fast überall“ erfüllt: $\Delta G(\vec{r}) = 0$ für $0 < r < \infty$
- (iii) die Randbedingung bei $r = \infty$ erfüllt
- (iv) die Inhomogenität bei $r = 0$ reproduziert

Lösung nur für (i) + (ii):

$$\Delta f(r) = 0 \quad \text{für } 0 < r < \infty$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f(r)) = 0 \quad "$$

$$r f(r) = A + Br$$

$$f(r) = \frac{A}{r} + B$$

→ (iii) legt B fest, (iv) legt A fest.

12.11.12

Mathematischer Exkurs

1) Mehrdimensionale partielle Integration

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit abschnittsweise glattem Rand ∂V . Seien $\vec{v}(\vec{x})$ und $\varphi(\vec{x})$ stetig differenzierbar auf V . Dann gilt:

$$\int_V d^n x [\vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) + \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{v}] = \int_V d^n x \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{v})$$

Green

$$= \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \vec{v})$$

$$\Rightarrow \int_V d^n x \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot (\varphi \vec{v}) - \int_V d^n x \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) \quad (\square)$$

check $n=1$:

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \varphi \frac{dv}{dx} = [\varphi v]_{x_{\min}}^{x_{\max}} - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx v \frac{d\varphi}{dx}$$

2) Mittelwertsatz von Gauß

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u(\vec{x})$ zweimal stetig differenzierbar auf V mit $\Delta u(\vec{x}) = 0$

(43)

für alle $\vec{x} \in V$. Dann gilt für jede in V enthaltene Kugel

$$K_{R, \vec{x}_0} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n; |\vec{x} - \vec{x}_0| \leq R \}$$

$$(ii) \quad u(\vec{x}_0) = \frac{1}{S_n(R)} \int_{|\vec{x} - \vec{x}_0| = R} u(\vec{x}) \, ds$$

↑
ungerichtetes
Flächenelement

mit $S_n(R) =$ Oberfläche einer Kugel vom Radius R in \mathbb{R}^n

D.h.: $u(\vec{x}_0)$ entspricht dem Mittelwert von $u(\vec{x})$ über jede Kugeloberfläche um \vec{x}_0 :

$$u(\vec{x}_0) = \frac{\int_{\partial K_{R, \vec{x}_0}} ds \, u(\vec{x})}{\int_{\partial K_{R, \vec{x}_0}} ds \, 1}$$

$$(iii) \quad u(\vec{x}_0) = \frac{1}{V_n(R)} \int_{|\vec{x} - \vec{x}_0| \leq R} d^n x \, u(\vec{x})$$

mit $V_n(R) =$ Volumen einer Kugel mit Radius R in \mathbb{R}^n . Also Volumen-Mittelwert:

$$u(\vec{x}_0) = \frac{\int_{K_{R, \vec{x}_0}} ds \, u(\vec{x})}{\int_{K_{R, \vec{x}_0}} ds \, 1}$$

Beweis von (1) über Dirac-Deltafunktion und ihren Zusammenhang mit der Green-Funktion des Laplace-Operators (Alternativ-Beweis: Übung)

$$\begin{aligned}
 u(\vec{x}_0) &= \int_V d^n x \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) u(\vec{x}) \\
 &= - \int_V d^n x \underbrace{u(\vec{x})}_{\varphi} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} G(\vec{x} - \vec{x}_0))}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi} \\
 &\stackrel{\square}{=} - \int_{\partial V} u(\vec{x}) d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} G(\vec{x} - \vec{x}_0) + \int_V d^n x \underbrace{\vec{\nabla} G(\vec{x} - \vec{x}_0)}_{\vec{\nabla} \varphi} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} u(\vec{x})}_{\vec{\nabla} \varphi} \\
 &\stackrel{\square'}{=} - \int_{\partial V} u(\vec{x}) d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} G(\vec{x} - \vec{x}_0) + \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot G(\vec{x} - \vec{x}_0) \vec{\nabla} u(\vec{x}) \\
 &\quad - \int_V d^n x G(\vec{x} - \vec{x}_0) \underbrace{\Delta u(\vec{x})}_{=0}
 \end{aligned}$$

Jetzt spezifizieren wir, dass das (bisher weitgehend beliebige) Volumen V einem Kreis um \vec{x}_0 entspricht. Dann gilt:

(45) $\vec{\nabla} G(\vec{r}) = g(r) \hat{e}_r; \quad d\vec{f} = df \hat{e}_r \quad (\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_0)$

Anwendung: der dreidimensionale Einschlass geladener Teilchen durch elektrostatische Fallen (oder von magnetischen Dipolen durch statische Magnetfelder) ist **unmöglich!**

2) Falls $\phi_{\text{hom}}(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein Radius R_ε , so dass $|\phi_{\text{hom}}(\vec{x})| < \varepsilon$ für $|\vec{x}| > R_\varepsilon$. Für gegebenes \vec{x}_0 und ε wähle Kugel $V = \{ \vec{x}; |\vec{x}| \leq R_\varepsilon + |\vec{x}_0| \}$

$$\Rightarrow |\phi_{\text{hom}}(\vec{x}_0)| < \varepsilon$$

Also: $\phi_{\text{hom}}(\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \rightarrow \phi_{\text{hom}} = 0$ **eindeutig!**

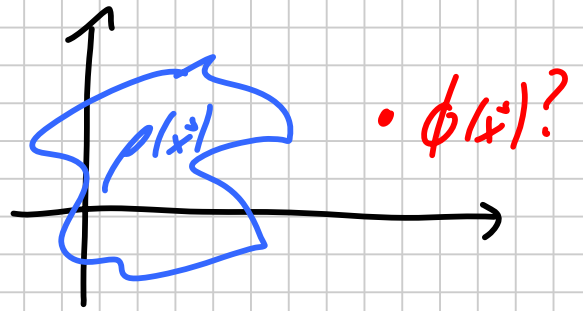
Die eindeutige Lösung der Poisson-Gleichung in \mathbb{R}^3 mit der Randbedingung $\phi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$ lautet also tatsächlich:

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

(17)

3.1.2 Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten

Wir betrachten eine räumlich beschränkte Ladungsverteilung:



$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{für } \vec{x} \gg R$$

und möchten das Fernfeld $\vec{E}(\vec{x})$ bzw. $\phi(\vec{x})$ für $\vec{x} \gg R$ charakterisieren.

Anwendung: • Wechselwirkung zwischen Molekülen,
• Gravitationspotential von nicht-sphärischen Himmelskörpern (Newtonsche Gravitation)

Ansatz: wegen $|\vec{x}'| \ll |\vec{x}|$ können wir die allgemeine Lösung (D) nach \vec{x}' entwickeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= [x^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}' + (x')^2]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{x} \left[1 - \frac{2\vec{x} \cdot \vec{x}'}{x} + \left(\frac{x'}{x}\right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{x} \left\{ 1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{x} + \frac{1}{2x^2} \vec{x}'^T [3\vec{x}'(\vec{x}')^T - (x')^2 \mathbb{1}] \vec{x} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2x^3} \vec{x}'_\alpha \vec{x}'_\beta \vec{x}'_\gamma [5x'_\alpha x'_\beta x'_\gamma - x'_\alpha \delta_{\beta\gamma} - x'_\beta \delta_{\alpha\gamma} - x'_\gamma \delta_{\alpha\beta}] + \dots \}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 x} \left(q + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{d}}{x} + \frac{\vec{x}'^T Q \vec{x}'}{x^2} \right) + \mathcal{O}(x^{-4})$$

mit der Gesamtladung $q = \int d^3x' \rho(\vec{x}')$,

dem Dipolmoment $\vec{d} = \int d^3x' \rho(\vec{x}') \vec{x}'$

und dem Quadrupoltensor

$$Q = \int d^3x' \rho(\vec{x}') \left[\frac{3}{2} \vec{x}'(\vec{x}')^T - \frac{1}{2} (x')^2 \mathbb{1} \right],$$

\uparrow Dyade

einem symmetrischen spurfreien Tensor 2. Stufe (also 5 unabhängige Komponenten).

Die Koeffizienten nennt man insgesamt **Multipolmomente**.

Exakte Realisierungen von reinen Multipolen der Ordnung n (\sim) $\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) x^{-(n+1)}$ für $\vec{x} > R$

1) **Monopol**: Punktladung q im Ursprung

(oder sphärisch symmetrische Ladungsverteilung)

2) Dipol: $\rho(\vec{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho_\lambda(\vec{x})$

$$\rho_\lambda(\vec{x}) = \frac{d}{\lambda} \left[\delta(\vec{x} - \frac{\lambda}{2} \hat{d}) - \delta(\vec{x} + \frac{\lambda}{2} \hat{d}) \right]$$

$$\Rightarrow \vec{d} = d \hat{d}; \quad q_{\text{ges}} = 0 \quad \text{für jedes } \lambda$$

Alle höheren Multipolmomente (Ordnung n)
konvergieren wie $\lambda^{(n-1)}$ gegen 0. / 14.11.12