3.1.3 Separation der Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten

Bei nichttrivialen Randbedingungen oder z.B. im Rahmen einer Multipolentwicklung ist es oft nützlich, zur Lösung der Laplace-Gleichung eine Entwicklung nach einem vollständigen Orthonormalsystem zu benutzen. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall: kartesischen Koordinaten.

Für die Lösung ϕ der Laplace-Gleichung machen wir einen Produktansatz: $\phi(\vec{x}) = U(x)V(y)W(z)$

$$\Delta\phi = 0 \Leftrightarrow U''VW + V''UW + W''UV = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{U''}{U}(x) + \frac{V''}{V}(y) + \frac{W''}{W}(z) = 0 \quad (*)$$

Wegen der verschiedenen Argumente müssen alle Terme in (*) offensichtlich konstant sein:

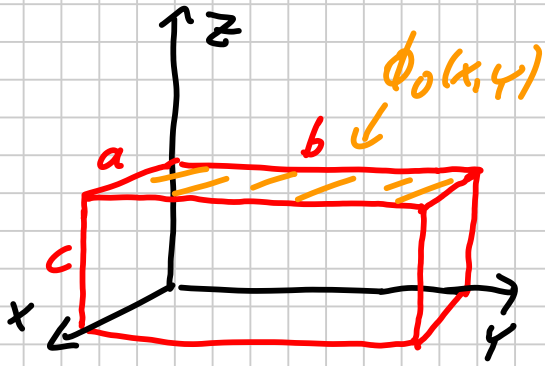
$$\frac{U''}{U}(x) = -\alpha^2; \quad \frac{V''}{V}(y) = -\beta^2; \quad \frac{W''}{W}(z) = -\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2$$

Damit lautet die spezielle (faktorisierende) Lösung

$$\phi_{\alpha\beta}(\vec{x}) = e^{i\alpha x} e^{i\beta y} e^{-i(\alpha+\beta)z}$$

und die allgemeine Lösung

$$\phi(\vec{x}) = \sum\!\!\!\!\!\!\int_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}\, \phi_{\alpha\beta}(\vec{x}) \quad (\Delta)$$



Anwendung: Randwertproblem für Quader mit Koordinaten $0 \le x \le a$; $0 \le y \le b$; $0 \le z \le c$ mit Randbedingung: $\phi(x,y,c) = \phi_0(x,y)$ $(\square)$

$$\phi(x,y,0) = \phi(0,y,z) = \phi(a,y,z) = \phi(x,0,z) = \phi(x,b,z) = 0$$

Hier bietet sich die folgende Parametrisierung der Lösung (Δ) an: $\alpha_m = \frac{\pi m}{a}$; $\beta_n = \frac{\pi n}{b}$

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \sinh\left(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2}\, z\right)$$

Diese erfüllt „automatisch" die Randbedingung $\phi = 0$ an 5 der Randflächen. Die verbleibende Randbedingung lautet:

$$\phi_0(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \underbrace{A_{mn} \sinh\left(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2}\, c\right)}_{\phi_{mn}} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y)$$

ϕ_{mn} Fourier-Koeffizienten auf Randfläche

Wegen der Orthonormalitätsbedingung

$$\frac{2}{a}\int_0^a dx\, \sin(\alpha_k x)\sin(\alpha_\ell x) = \delta_{k\ell} \quad \text{folgt:}$$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab\,\sinh\left(\sqrt{\alpha_m^2+\beta_n^2}\,c\right)}\int_0^a dx\int_0^b dy\; \phi(x,y)\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)$$

Für allgemeine Randbedingungen auf der Quaderoberfläche kann man 6 Lösungen der obigen Art superponieren. Analog lassen sich alle Körper behandeln, deren Grenzflächen sämtlich normal zu einer der Koordinatenachsen sind, indem man sie für jede Teillösung passend in Quader zerlegt.

3.1.4 Separation der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Für viele Zwecke sind kartesische Koordinaten schlecht geeignet. Besonders nützlich ist die Zerlegung in Kugelkoordinaten: $\phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{u(r)}{r}P(\cos\vartheta)Q(\varphi)$

Mit $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

ergibt sich unter Benutzung von

$$x = \cos(\vartheta) \Rightarrow \frac{dx}{d\vartheta} = -\sin(\vartheta) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}; \quad \sin^2\vartheta = 1-x^2$$

$$\underbrace{r^2(1-x^2)}_{f(x)}\left\{\underbrace{\frac{u''}{u}}_{f(r)} + \underbrace{\frac{1}{r^2}}_{f(r)}\underbrace{\frac{\frac{d}{dx}[(1-x^2)P']}{P}}_{f(x)}\right\} + \underbrace{\frac{Q''}{Q}}_{f(\varphi)} = 0$$

Nur $\frac{Q''}{Q}$ hängt von φ ab $\rightarrow \frac{Q''}{Q} = m$; $Q(\varphi) = e^{\pm im\varphi}$

Damit Q stetig ist, muss m ganzzahlig sein. Es folgt:

$$\underbrace{r^2\frac{u''}{u}}_{f(r)} + \underbrace{\frac{1}{P}\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'] - \frac{m^2}{1-x^2}}_{f(x)} = 0$$

Nur $r^2\frac{u''}{u}(r)$ hängt vom Radius ab. Also:

$$r^2\frac{u''}{u}(r) = \ell(\ell+1) \Leftrightarrow U(r) = A\,r^{\ell+1} + B\,r^{-\ell}$$

Dabei ist zunächst nur klar, dass $\ell \in \mathbb{R}$.

Für den Winkelanteil verbleibt die verallgemeinerte Legendre-DGL:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP(x)}{dx}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P(x) = 0} \quad (**)$$

A Zylindersymmetrische Probleme: Falls Ladungen und Randbedingungen Zylindersymmetrie aufweisen, muss dies auch für die Lösung gelten: $Q(\varphi) = 1 \iff m = 0$

Dann vereinfacht sich (**) zur Legendre-DGL:

$$\boxed{(1-x^2)\,P''(x) - 2x\,P'(x) + [\ell(\ell+1)]\,P(x) = 0}$$

Da alle Koeffizienten Potenzen von x sind und der Winkelanteil regulär sein muss, bietet sich ein Potenzreihen-Ansatz an:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[(1-x^2)\, k(k-1)\, x^{k-2} - 2x\, k\, x^{k-1} + \ell(\ell+1)\, x^k \right] = 0$$

$$\sum_k x^k \left[a_{k+2}(k+2)(k-1) + a_k\left(-k(k-1) - 2k + \ell(\ell+1)\right) \right] = 0$$

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \ell(\ell+1)}{(k+2)(k+1)}\, a_k$$

Man erhält also separate Rekursionsreihen für gerade und ungerade Koeffizienten. Falls diese nicht abbrechen, gilt: $a_{k+2}/a_k \xrightarrow{k\to\infty} 1$,

55 d.h. $P(1)$ divergiert. ↯

Also müssen 2 Bedingungen erfüllt sein:

(i) $a_0 a_1 = 0$, d.h. $a_0 = 0$ oder $a_1 = 0$

(ii) $\exists k$ mit $k(k+1) = \ell(\ell+1)$

$\iff \ell \in \mathbb{N}_0$

Genauer: $\ell = 0, 2, 4, \ldots$ falls $a_0 \neq 0$

$\ell = 1, 3, 5, \ldots$ falls $a_1 \neq 0$

Die Winkelanteile $P(\cos(\vartheta))$ haben also eine wohldefinierte Parität: (un)gerade wie ℓ.

Die ersten Legendre-Polynome lassen sich leicht (unnormiert) durch Rekursion bestimmen:

$\ell = 0$: $a_0 = 1$ $\rightsquigarrow$ $P_0(x) = 1$

$\ell = 1$: $a_1 = 1$ $\rightsquigarrow$ $P_1(x) = x$

$\ell = 2$: $a_0 = 1$; $a_2 = \frac{1 \cdot 0 - 3 \cdot 2}{2 \cdot 1} a_0 = -3a_0$ $\rightsquigarrow$ $P(x) \propto 3x^2 - 1$

Mit der Konvention $P_\ell(1) = 1$ ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 \quad \rightsquigarrow \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Allgemein lassen sich die Legendre-Polynome angeben als: $\boxed{P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell}$

Als DGL 2. Art hat die Legendre-DGL für festes ℓ je 2 unabhängige Lösungen. Irreguläre Lösung: Legendre-Polynome 2. Art

Die allgemeine Lösung (auch für $m \neq 0$) ist durch die verallgemeinerten Legendre-Polynome gegeben, wobei $-\ell \leq m \leq \ell$ gilt:

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)$$

Dabei ist die Zuordnung der lin. unabhängigen Lösungen für $\pm m$ Konvention.

Für festes m sind die P_ℓ^m (mit $\ell = |m|, |m+1|, \ldots$) paarweise orthogonal:

$$0 = \int_{-1}^{1} dx\, P_{\ell'}^m \overbrace{\left\{ \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\ell^m}{dx}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P_\ell^m \right\}}^{=0 \text{ n.V.}}$$

$$\stackrel{\text{PI}}{=} \int_{-1}^{1} dx\, (x^2-1)\frac{dP_\ell^m}{dx}\frac{dP_{\ell'}^m}{dx} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P_\ell^m P_{\ell'}^m$$

Die Randterme bei der partiellen Integration verschwinden wegen dem Faktor $(1-x^2)$.

Jetzt vertauschen wir in der obigen Gleichung ℓ und ℓ', subtrahieren beide Gleichungen und erhalten:

$$\underbrace{[\ell(\ell+1)-\ell'(\ell'+1)]}_{\neq 0 \text{ für } \ell\neq\ell'}\int_{-1}^{1} dx\; P_\ell^m(x)\, P_{\ell'}^m(x) = 0$$

$\square$

Die Normierung lautet:

$$\int_{-1}^{1} dx\; P_\ell^m(x)\, P_{\ell'}^m(x) = \frac{2}{2\ell+1}\,\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\,\delta_{\ell,\ell'}$$

Insgesamt lautet die Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten also:

$$\boxed{\phi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left(A_{\ell m}\, r^{\ell} + B_{\ell m}\, r^{-\ell-1}\right) Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)}$$

mit den Kugelflächenfunktionen

$$\boxed{Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\,\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\; P_\ell^m(\cos(\vartheta))\, e^{im\varphi}}$$