5 Elektromagnetische Wellen

5.1 Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum

Im Vakuum lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{E} = \Delta\vec{E} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})$$
$$= -\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{B} = \Delta\vec{B} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = -\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$
$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Mit dem d'Alembert-Operator

$$\Box := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

(94) gilt also: $\Box\,\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{0}; \quad \Box\,\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{0}$

Lösungen dieser Wellengleichungen findet man mit einem Separationsansatz:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0(\vec{x})\, f(t)$$

$$0 \overset{!}{=} \Box \vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{c^2} f''(t) \vec{E}_0(\vec{x}) - f(t) \Delta \vec{E}_0(\vec{x})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{f''(t)}{f(t)} = \frac{\Delta E_{0,i}(\vec{x})}{E_{0,i}(\vec{x})} =: -|\vec{k}|^2$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = f_0\, e^{i\omega t}; \quad \omega^2 = c^2 |\vec{k}|^2$$

Die Komponenten $E_{0,i}(\vec{x})$ müssen dann Eigenlösungen des Laplace-Operators sein, die sich (bei freien Randbedingungen) z.B. durch einen kartesischen Produktansatz ergeben. Insgesamt erhält man:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_{\vec{k}}\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}; \quad \omega^2 = c|\vec{k}|^2$$

und analog

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}_{\vec{k}}\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

Elektromagnetische Wellen laufen also

dispersionsfrei mit Lichtgeschwindigkeit c.

Dabei erfüllen jedoch nicht alle Lösungen der Wellengleichungen auch die Maxwell-Gleichungen:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i \vec{k} \cdot \vec{E}_{\vec{k}}\, e^{i\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_{\vec{k}} = 0$$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B}_{\vec{k}} = 0$$

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind also transversale Wellen.

Sie sind nicht unabhängig:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}} = \omega \vec{B}_{\vec{k}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{B}_{\vec{k}} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_{\vec{k}}$$

Es gilt also $|\vec{E}| = |\vec{B}|\, c$; $\vec{k}$, $\vec{E}_{\vec{k}}$ und $\vec{B}_{\vec{k}}$ bilden ein rechtshändiges Orthogonalsystem.

Die physikalischen Felder ergeben sich natürlich als Real- oder Imaginärteile der angegebenen komplexen Lösungen

Übung: Energiedichte, Poynting-Vektor?

Für viele Zwecke, z.B. die Konstruktion nichttrivialer Lösung sind Zugänge auf der Ebene der elm. Potentiale $\phi, \vec{A}$ mit $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$; $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ praktischer. Dabei gilt speziell in Coulomb-Eichung:

$$\frac{\rho(\vec{x},t)}{\varepsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x},t) = -\Delta\phi(\vec{x},t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x},t)$$
$$= -\Delta\phi(\vec{x},t)$$

mit der Lösung $\phi(\vec{x},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$,

die scheinbar die Kausalität verletzt. Da für $\vec{A}(\vec{x},t)$ keine Lösung mit instantaner Fernwirkung existiert, ist dies jedoch auch für die physikalischen Felder $\vec{E}(\vec{x},t)$, $\vec{B}(\vec{x},t)$ nicht der Fall.

Transparenter ist die Lorenz-Eichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi(\vec{x},t)}{\partial t} = 0 \iff \partial_\mu A^\mu = 0,$$

die auf eine inhomogene Wellengleichung für ϕ und $\vec{A}$ führt. (Vorlesung: S. 89) 19.12.12

5.2 Greensche Funktionen des Wellenoperators

Wir suchen nun allgemeine Lösungen der inhomogenen Wellengleichung $\Box f(\vec{x},t) = g(\vec{x},t)$. (*)

Analog zur Elektrostatik führen wir dafür Green-Funktionen G des Wellenoperators ein:

$$\Box G(\vec{x}-\vec{x}',t-t') = \delta(\vec{x}-\vec{x}')\,\delta(t-t') \qquad (\Delta)$$

$$\rightsquigarrow f(\vec{x},t) = \int dt' \int d^3x'\; G(\vec{x}-\vec{x}',t-t')\, g(\vec{x}',t')$$

erfüllt die Wellengleichung (*).

Dabei fordern wir speziell für die retardierte Green-Funktion: $G(\vec{x}-\vec{x}',t-t') = 0$ für $t<t'$; eine zur Zeit t' einsetzende Störung soll sich also nur für $t>t'$ auf die Lösung auswirken.

Zur expliziten Konstruktion der Green-Funktionen führen wir Fourier-Transformationen durch:

$$G(\vec{x}-\vec{x}',t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d\omega \int d^3k\; \tilde{G}(\vec{k},\omega)\, \exp[i(\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')-\omega(t-t'))]$$

$$\delta(t-t')\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d\omega \int d^3k\; e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')-\omega(t-t'))}$$

Damit wird (Δ) äquivalent zu

$$-\left(\frac{\omega^2}{c^2}-|\vec{k}|^2\right)\tilde{G}(\vec{k},\omega) = 1$$

$$\Rightarrow G(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3\vec{k} \int d\omega\, \frac{\exp[i(\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')-\omega(t-t'))]}{|\vec{k}|^2-\omega^2/c^2} \quad (**)$$

Mathematischer Exkurs: Residuensatz

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine einfach zusammenhängende offene Teilmenge der komplexen Ebene, $\{z_1, \ldots, z_n\}$ eine endliche Menge von Punkten aus D und f eine holomorphe (d.h. komplex differenzierbare) Funktion auf $D\setminus\{z_1,\ldots,z_n\}$, so gilt für das Linienintegral entlang einer glatten positiv orientierten geschlossenen Kurve $\Gamma \subset D\setminus\{z_1,\ldots,z_n\}$: $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k{}' \operatorname{Res}(f, z_k)$,

wobei sich die Summe über alle k erstreckt, für die der Punkt z_k im Inneren von Γ liegt.

Das **Residuum** $\mathrm{Res}(f, z_\ell)$ von f am Punkt z_ℓ ergibt sich als Koeffizient a_{-1} in einer **Laurent-Reihe** $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_\ell)^j$ um z_ℓ *; im Fall von einfachen Polstellen gilt also

* „Beweis" durch explizite Berechnung für $z = a e^{i\varphi}$ (Kreiskontur)

$$\mathrm{Res}(f, z_\ell) = \lim_{z \to z_\ell} \left[f(z)(z - z_\ell) \right].$$

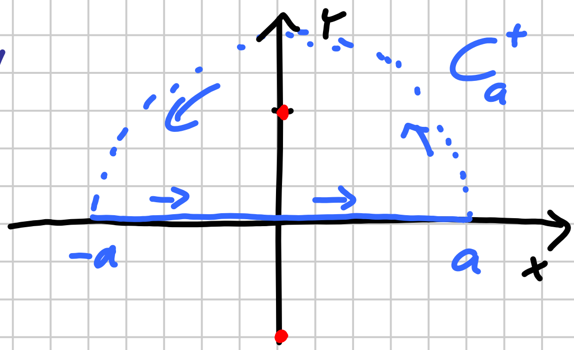
Oft lässt sich der Residuensatz zur Berechnung von Integralen $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)$ entlang der reellen Achse einsetzen, die nicht „normal", d.h. via Stammfunktion von f ermittelt werden können.

Beispiel: $I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\cos(tx)}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{itx}}{x^2+1}$

Die Funktion $f(z) = \frac{e^{itz}}{z^2+1} = \frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)}$

hat einfache Polstellen bei $z_{+/-} = \pm i$

Trick: Betrachte Linienintegral für halbkreisförmige Kontur mit Grundlänge $2a$:



Für $t>0$ schließen wir den Integrationsweg dabei über die obene Halbebene mit $a>1$. Dann gilt:

$$\oint_{C_a} f(z)\,dz = \int_{-a}^{a} dx\, f(x) + \int_{C_a^+} dz\, f(z) \qquad (\square)$$

Für $t>0$ und $\mathrm{Im}(z)>0$ ist aber $|e^{itz}|\leq 1$; mit $z=ae^{i\varphi}$ gilt: $\left|\frac{1}{z^2+1}\right| = \left|\frac{1}{a^2e^{2i\varphi}+1}\right| = \frac{1}{|a^2+e^{-2i\varphi}|} \leq \frac{1}{a^2-1}$

$$\Rightarrow \left|\int_{\tilde{C}_a} dz\, f(z)\right| \leq \pi a \max_{z\in C_a^+}[f(z)] \leq \frac{\pi a}{a^2-1} \xrightarrow{a\to\infty} 0$$

Andererseits ist $\oint_{C_a} f(z)\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, z=i)$

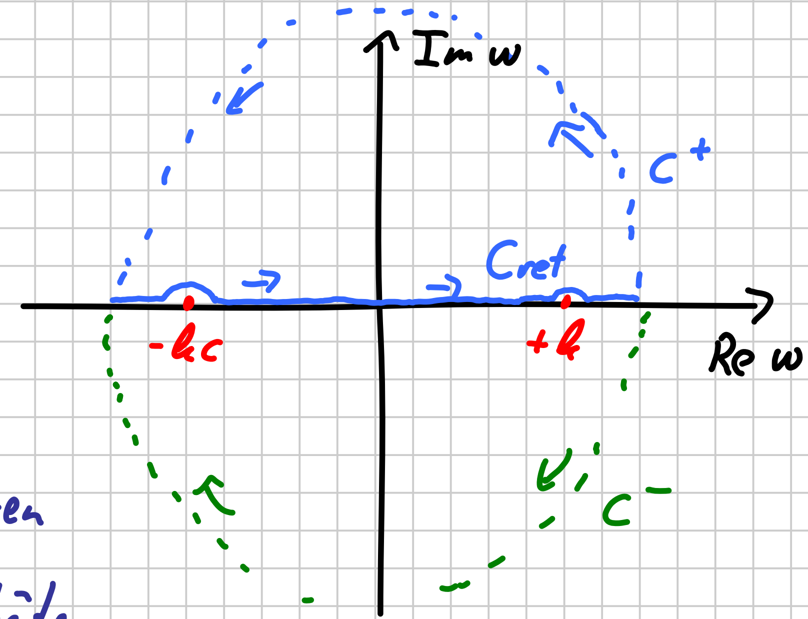
$$= 2\pi i \left.\frac{e^{itz}}{z+i}\right|_{z=i} = \pi e^{-t}$$

Durchführen des Grenzübergangs $a\to\infty$ auf beiden Seiten von $\square$ liefert das Ergebnis $I(t) = \pi e^{-t}$

Für $t<0$ muss die Kontur über die untere Halbebene geschlossen werden $\rightsquigarrow$ Residuum $\frac{e^t}{-2i}$, aber Vorzeichenwechsel wegen negativem Umlaufsinn.

(101) Insgesamt: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-|t|}$ $\square$ // 7.1.13

Bei der Anwendung des Residuensatzes auf das ω-Integral in (**) gibt es ein Problem:
die Polstellen liegen bei $\omega = \pm c|\vec{k}|$, also auf der reellen Achse, entlang der eigentlich integriert werden soll. Lösung: wir deformieren den Integrationsweg.



Für die retardierte Green-Funktion passieren wir beide Singularitäten oberhalb $(\omega \to \omega + i\epsilon)$.

Für $t < t'$ ist die Exponentialfunktion $e^{-i\omega(t-t')}$ in der oberen Halbebene beschränkt, so dass wir das Integral über C^+ ohne Beitrag schließen können (bei Radius a gilt $\left|\frac{1}{\omega^2 - c^2k^2}\right| \leq \frac{1}{a^2 - c^2k^2}$ für $|\omega| > ck$).

Dann sind keine Residuen im Pfad

$$\leadsto G_{ret}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = 0 \quad \text{für} \quad t < t'$$

Für $t>t'$ müssen wir mit C^- nach unten schließen und erhalten:

$$G_{ret}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = -\frac{c^2}{(2\pi)^4}\int d^3k\; e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \cdot \underbrace{\int_{C_{ret}\cup C^-} d\omega\; \underbrace{\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega-ck)(\omega+ck)}}_{f(\omega)}}$$

$$\left(\begin{aligned} &= -2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,\omega=ck)+\mathrm{Res}(f,\omega=-ck)\right] \\ &= -2\pi i\left[\frac{e^{-ick(t-t')}}{2ck}+\frac{e^{ick(t-t')}}{-2ck}\right] \end{aligned} \right)$$

$$= \frac{ic}{(2\pi)^3}\int d^3k\; e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\,\frac{1}{2k}\left[e^{-ick(t-t')}-e^{ick(t-t')}\right]$$

$$= \frac{ic}{8\pi^2}\int_0^\infty dk\; k\int_{-1}^{1} d\cos(\vartheta)\; e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|\cos(\vartheta)} \cdot \left[e^{-ick(t-t')}-e^{ick(t-t')}\right]$$

(**)

$$= -\frac{c}{16\pi^2}\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \left[e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}-e^{-ik|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]\left[e^{ick(t-t')}-e^{-ick(t-t')}\right]}^{\text{symm in } k\to -k}$$

Grenze ausgeweitet

$$= \frac{c}{4\pi}\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\delta\big(c(t-t')-|\vec{x}-\vec{x}'|\big)$$

Insgesamt lautet die retardierte Greenfunktion:

$$\boxed{G_{ret}(\vec{x}-\vec{x}';t-t') = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\Theta(t-t')\,\delta\left((t-t')-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)} \quad (103)$$

hier überflüssig

Die allgemeine retardierte Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\Box f = g$ hat damit die Form:

$$f_{ret}(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int dt' \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\delta\left((t-t')-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)g(\vec{x}',t')$$

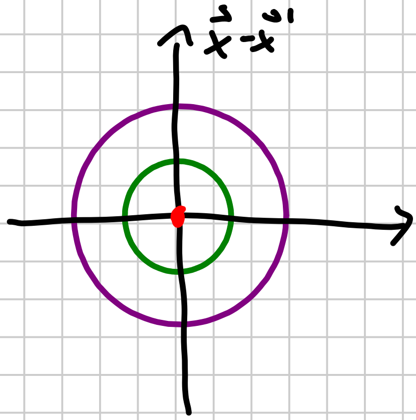
$$= \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{g\left(\vec{x}',t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{g(\vec{x}',t_{ret})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

mit $\quad t_{ret} = t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}$

Die retardierte Green-Funktion kann auch geschrieben werden als: $G_{ret}(\vec{x}-\vec{x}',t-t') = \frac{c}{2\pi}\,\theta(t-t')\,\delta\left(c^2(t-t')^2-|\vec{x}-\vec{x}'|^2\right)$.

Für die avancierte Green-Funktion trägt nur das Integral über die obere Halbebene bei (für $t<t'$); man erhält: $G_{av}(\vec{x}-\vec{x}',t-t') = -\frac{c}{2\pi}\,\theta(t'-t)\,\delta\left(c^2(t-t')^2-|\vec{x}-\vec{x}'|^2\right)$.

Beachte: physikalisch bedeutet die Proportionalität von G_{ret} zu einer δ-Funktion, dass jedes Signal $(t',\vec{x}')$ (im freien Raum) das Feld an einer festen Stelle $\vec{x}$ nur zu einem einzigen Zeitpunkt $t>t'$ beeinflusst:



Nicht nur die Wellenfront breitet sich also mit Geschwindigkeit aus, sondern auch die hintere Flanke des Signals (Soliton).

Dies gilt nur bei ungerader Dimensionalität $d=3$ des Raums! Obiger Schritt (**) wäre z.B. in $d=2$ nicht möglich $\rightsquigarrow$ keine Deltafunktion.
Stattdessen lautet die Green-Funktion der Wellengleichung dann:

$$G_{ret}^{d=2}(\vec{x}-\vec{x}',t-t') = \frac{c}{8\pi}\,\frac{\Theta\left((t-t')-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)}{\sqrt{c^2(t-t')^2-|\vec{x}-\vec{x}'|^2}} \qquad (\square\square)$$

Dieses Verhalten (δ-Quelle erzeugt für alle Beobachter zeitlich abklingendes Signal) nennt man Nachhall (Reverberation).

Das Ergebnis $\square\square$ lässt sich als Erregung längs einer Gerade in $d=3$ interpretieren.

In $d=3$ ergibt sich für die elm. Potentiale

$$A^\mu(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\int d^3x' \int dt' \, \frac{j^\mu(\vec{x}',t')}{|\vec{x}'-\vec{x}|}\,\delta\left(t'-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right) \quad (\triangleright)$$

5.3 Das Feld bewegter Punktladungen

Wir betrachten nun eine Punktladung mit Ladung q und Koordinaten $\vec{x}_q(t)$ sowie Geschwindigkeit $\vec{u}(t') = \frac{d}{dt'}\vec{x}_q(t')$; $\vec{\beta} = \frac{\vec{u}}{c}$

$\rightsquigarrow$ Ladungs- und Stromdichte

$$\rho(\vec{x}',t') = q\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}_q(t'))$$

$$\vec{j}(\vec{x}',t') = q\,\vec{u}(t')\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}_q(t'))$$

bzw. $j^\mu(\vec{x}',t') = \frac{qc}{\gamma_u}u^\mu\,\delta(\vec{x}'-\vec{x}_q(t'))$; $u^\mu = \gamma_u(1,\vec{\beta})$

Vgl. Kontinuum: $j^\mu = \rho_0 c u^\mu$

Einsetzen in $(\triangleright)$ liefert:

$$A^\mu(\vec{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt' \, \frac{u^\mu(t')}{\gamma_u(t')\,|\vec{x}-\vec{x}_q(t')|}\,\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{x}-\vec{x}_q(t')|}{c}\right)$$

$(\triangleright\triangleright)$

Wir führen nun die retardierte Zeit $\tau = \tau(\vec{x},t)$

mit $$\tau + \frac{|\vec{x} - \vec{x}_q(\tau)|}{c} = t \qquad (0)$$

sowie den Relativvektor $\vec{R}(\vec{x},\tau) = \vec{x} - \vec{x}_q(\tau)$ ein.

Die Selbstkonsistenzgleichung (0) drücken wir als Nullstelle der Funktion $F_{\vec{x},t}(\tau)$ aus:

$$F_{\vec{x},t}(\tau) \equiv \tau + \frac{R(\vec{x},\tau)}{c} - t = 0,$$

die wegen $|\vec{u}| < c$ eine eindeutige Lösung hat.

$$\rightsquigarrow \delta\left(t' - t + \frac{R(\vec{x},t')}{c}\right) = \delta[F_{\vec{x},t}(t')] = \frac{\delta(t' - \tau)}{\left|\frac{dF_{\vec{x},t}}{d\tau}(\tau)\right|}$$

Hierbei gilt: $$\frac{dF_{\vec{x},t}}{d\tau}(\tau) = 1 + \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial \tau}(\vec{x},\tau)$$

mit $$\frac{\partial R}{\partial \tau} = \frac{1}{2R}\frac{\partial (R^2)}{\partial \tau} = \frac{\vec{R}\cdot\frac{\partial \vec{R}}{\partial \tau}}{R} = -\hat{R}\cdot\vec{u}$$

$$\rightsquigarrow \delta\left(t' - t + \frac{R(\vec{x},\tau)}{c}\right) = \frac{\delta(t' - \tau)}{1 - \vec{\beta}(\tau)\,\hat{R}(\vec{x},\tau)}$$

Einsetzen in $(\triangleright\triangleright)$ liefert:

$$A^\mu(\vec{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\,\frac{u^\mu(t')}{\gamma_u(t')R(\vec{x},t')}\,\frac{\delta(t' - \tau)}{1 - \vec{\beta}(\tau)\,\hat{R}(\vec{x},\tau)}$$

$$= \frac{q\,u^\mu(\tau)}{4\pi\varepsilon_0\,\gamma_u(\tau)}\,\frac{1}{R(\vec{x},\tau) - \vec{\beta}(\tau)\cdot\vec{R}(\vec{x},\tau)} = \frac{q\,u^\mu(\tau)}{4\pi\varepsilon_0\,R_\nu u^\nu}$$