

Merkblatt

zur Vorlesung “**Mathematische Rechenmethoden 2**” im SS 2011

Dozent:	Frank Saueressig
Zimmer:	03-625 (Mathematikgebäude)
Tel.:	06131/39-20481
E-Mail:	saueressig@thep.physik.uni-mainz.de
Sekretariat:	Monique Engler Zimmer 03-124 (Physikgebäude), Tel: 06131/39-22253, engler@uni-mainz.de
Zeit und Ort:	Fr 16 ¹⁵ – 17 ⁴⁵ , C03, Hörsaalgebäude an der Chemie, Duesbergweg
Zielgruppe:	Studierende (Bachelor of Science, Bachelor of Education)
Vorkenntnisse:	Mathematische Rechenmethoden 1
Scheinkriterien:	Vergabe aufgrund der Teilnahme an Übungen und Klausur mindestens 50% der Punkte aus den Übungen (Prüfungsvorleistung) mindestens 50% der Punkte aus der Klausur (Modulteilprüfung)
Stundenzahl:	2V (Vor- und Nachbearbeitung, ungefähr 2 Std./Woche) +1Ü (+ Probleme Bearbeiten, bis ungefähr 4 Std./Woche)
Bemerkungen:	Übungsblätter zur Vorlesung (Zugang: theo/istgut!) http://komet337.physik.uni-mainz.de/Bluemer/lectures_SS2011_downloads.php

Übungen:

- Verteilung der Übungsblätter erfolgt am **Freitag in der Vorlesung**. Abgabetermin für Lösungen ist **Montag der jeweils übernächsten Woche** (10 Tage Bearbeitungszeit). Einwurf in Postfach Nr. 42 “Theoretische Physik 1”, Nils Blümer, im Foyer des Physik-Gebäudes **bis spätestens 10:00 Uhr** [nur im Ausnahmefall (d.h. max. 2x pro Semester) ist bis 12:00 Uhr eine persönliche Abgabe bei Frau Dr. E. Gorelik (s. unten) möglich].
- Jeder gibt seine eigenen, handschriftlich erstellten, Lösungen der Übungsaufgaben ab. Ausnahme: Teilnehmer können Übungen zu zweit abgeben, falls beide an der Übungsstunde teilnehmen.
- Die Anwesenheit in den Übungen ist erwünscht. Das Vorrechnen gelöster Übungsaufgaben wird im Hinblick auf spätere Präsentationen stark empfohlen.
- Fragen an die Übungsgruppenleiter über neue Aufgaben sind möglich und erwünscht
- Korrigierte Lösungen werden in den Übungen zurückgegeben
- Oberaufsicht: Dr. Elena Gorelik
Staudingerweg 7, Zimmer 03-132, Tel. 06131/39-23655, E-Mail: gorelike@uni-mainz.de
- Die Einteilung der Übungsgruppen befindet sich auf
http://komet337.physik.uni-mainz.de/Bluemer/Downloads_UniMainz/theo1_ss11-gruppen.html
(Zugangsdaten: theo/istgut!)

Übungsgruppenleiter:

Gruppe 1 (Mi 8 - 10, Seminarraum D, 01-227, Staudingerweg 9): Alexander Winkler

E-Mail: winkalex@uni-mainz.de

Gruppe 2 (Do 10 - 12, Seminarraum F, 01-234, Staudingerweg 9): Jan Schäffer

E-Mail: janschae@students.uni-mainz.de

Gruppe 3 (Fr 11 - 13, Seminarraum 1 Kernphysik, Johann-Joachim-Becher-Weg 45): Daniel Rost

E-Mail: rostd@students.uni-mainz.de

Gruppe 4 (Fr 11 - 13, Seminarraum K, 01-525, Staudingerweg 9): Gregor Schollmeyer

E-Mail: gregorsc@students.uni-mainz.de

Gruppe 5 (Fr 13 - 15, Seminarraum K, 01-525, Staudingerweg 9): Kemal Sarikaya

E-Mail: sarikaya@students.uni-mainz.de

Klausurtermin:

Mittwoch, 27.7.2011, 9-12 Uhr im Hörsaal C01 (Hörsaalgebäude Chemie, Duesbergweg)

Inhalte der Vorlesung:

- Matrizenrechnung (Spuren, Determinanten, Eigenwerte, Drehungen)
- Vektoranalysis (Kurvenintegrale, Oberflächenintegrale, Integralsätze)
- partielle Differentialgleichungen (Poisson-Gleichung, Diffusionsgleichung, Wellengleichung)
- orthogonale Funktionen (Orthogonale Polynome, Fourierreihen, Fouriertransformation)

Empfohlene Literatur:

- M. Kallenrode, "Rechenmethoden der Physik: Mathematischer Begleiter zur Experimentalphysik" (Springer, Berlin, 2005)
- H.J. Korsch, "Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik" (Binomi, Barsinghausen, 2007)
- K.H. Goldhorn, H.P. Heinz, "Mathematik für Physiker 1-3" (Springer, Berlin, 2007)

Aufgabe 1: Dreidimensionale Integrale (4 Bonuspunkte)

Berechnen Sie das Volumen von

(i) $\left\{ \mathbf{x} \mid 0 \leq x_3 \leq \sqrt{16 - \rho^2}, 0 \leq \rho \leq 4 \cos(\varphi) \right\}$ (Zylinderkoordinaten)

(ii) $\left\{ \mathbf{x} \mid r \leq 3^{2/3}, 1 \leq \tan(\theta) \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ (Kugelkoordinaten)

und beschreiben sie die Form der Integrationsbereiche in Worten oder machen Sie eine Skizze.

Aufgabe 2: Differentialgleichungen erster Ordnung (10 Bonuspunkte)

Die folgenden Differentialgleichungen weisen alle die allgemeine Struktur $\frac{du}{dt} = -a(t)u + b(t)$ auf oder können durch eine geeignete Substitution auf diese Struktur zurückgeführt werden. Lösen Sie die Differentialgleichungen mittels der Methode der Variation der Konstanten

1. $u' + t^2 u = t^2$ 2. $u' + u \tan(t) = \sin(t)$

3. $u' + u = \frac{2}{3} e^t u^4$ 4. $e^{-3u}(u' - 1) = t$

5. $t^2 u' - u = 1$ 6. $tu'' - u' = 2t^3$.

Aufgabe 3: Funktionen mehrerer Veränderlicher (6 Bonuspunkte)(a) Betrachten Sie die Funktion zweier Variablen $f(x_1, x_2) = x_1(x_2)^2 / ((x_1)^2 + (x_2)^4)$ und berechnen Sie

(i) $\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, 0)$ (ii) $\lim_{x_2 \rightarrow 0} f(0, x_2)$ (iii) $\lim_{y \rightarrow 0} f(\lambda y^2, y)$

mit $0 < \lambda \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, ob $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} f(\mathbf{x})$ existiert.(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der folgenden Funktionen im Punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

(i) $\sin((x_1)^2 + (x_2)^2)$ (ii) $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$ (iii) $\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$.

(c) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_{x_i} f$ und $\Delta f = \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} \partial_{x_i} f$ im Punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$ für die folgenden Funktionen $f(\mathbf{x})$:

(i) $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}$ (ii) $\arctan\left(\frac{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}}{x_3}\right)$ (iii) $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$.

Aufgabe 1: Eigenschaften von Matrizen (12 Punkte)

(a) Berechnen Sie A^{-1} für die $n \times n$ -Matrix A mit Elementen $a_{ij} = \delta_{i,j} - \delta_{i,j+1}$. Hierbei ist das Kronecker-Delta $\delta_{i,j} = 1$ falls $1 \leq i = j \leq n$ und $\delta_{i,j} = 0$ sonst.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & a^2 & b & 5 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 7b^2 & a^2b^2 & 1 + b^3 & 6b^2 \\ ab & 1 & 7a & ab \end{bmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie, dass für eine invertierbare $n \times n$ -Matrix A und eine beliebige $n \times n$ -Matrix B gilt: $\text{Spur}(A) = \text{Spur}(A^{-1}BA)$.

(d) Eine Matrix O heißt orthogonal, wenn die Transponierte die Inverse ist: $O^T O = \mathbf{1}$. Eine Matrix P heißt Projektor, wenn sie idempotent und hermitesch ist: $P^2 = P = P^\dagger$. Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal, welche sind idempotent und bei welchen handelt es sich um einen Projektor?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\varphi) & \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \\ 0 & \frac{1}{2} \sin(2\varphi) & \sin^2(\varphi) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \mathbf{1}, E = \mathbf{0}.$$

Aufgabe 2: Eigenschaften der Determinante (8 Punkte)

Zeigen Sie explizit, dass die Determinante einer 2×2 Matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) Die Determinanten der Matrix A und ihrer Transponierten A^T sind gleich: $\det A = \det A^T$.

(b) Beim Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten ändert die Determinante ihr Vorzeichen.

(c) Werden die Elemente einer beliebigen Zeile oder Spalte mit einem Skalar λ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ .

(d) Die Determinante ist Null, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Alle Elemente einer Zeile oder Spalte sind Null.
2. Zwei Zeilen oder Spalten sind linear abhängig.

(e) Der Wert der Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile (bzw. anderen Spalte) addiert.

(f) Für zwei Matrizen A und B gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$.

Aufgabe 1: Eigenwerte und Eigenvektoren (8 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Verifizieren Sie, dass die Determinanten (die Spur) von A und B durch das Produkt (die Summe) der Eigenwerte gegeben sind.

- (b) Zeigen Sie,
- ohne*
- das charakteristische Polynom zu berechnen, dass die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 6 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

den 6-fachen Eigenwert $\lambda_1 = 7$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 0$ hat, in dem Sie zu jedem der Eigenwerte die Maximalzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren konstruieren.

- (c) Berechnen Sie die Eigenwerte
- λ_1, λ_2
- und normierten Eigenvektoren
- \vec{x}_1, \vec{x}_2
- der symmetrischen
- (2×2)
- Matrix
- $S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
- . Verwenden Sie die Transformation
- $S' = D^{-1}SD$
- , mit
- $D = [\vec{x}_1, \vec{x}_2]$
- , um
- S
- zu diagonalisieren.

Aufgabe 2: Torsionsschwingungen einer elastischen Welle (8 Punkte)

Ein Torsionsschwinger besteht aus einer masselosen elastischen Welle mit zwei gleichen starren Zylinderscheiben mit Massenträgheitsmoment J . In dem man die Scheiben gegeneinander verdreht, läßt sich das System zu Torsionsschwingungen anregen. Die Drehwinkel φ_1 und φ_2 erfüllen das folgende System gekoppelter linearer Differentialgleichungen

$$J\ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad J\ddot{\varphi}_2 - c(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

- (a) Benutzen Sie den Lösungsansatz $\varphi_1(t) = A_1 \sin(\omega t), \varphi_2(t) = A_2 \sin(\omega t)$, (A_1, A_2 : maximale Drehwinkel), um das Differentialgleichungssystem auf eine Matrixgleichung zurückzuführen.
- (b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω aus den entsprechenden Eigenwerten.
- (c) Berechnen Sie den zur nicht-trivialen Lösung gehörenden Eigenvektor. Wie sieht entsprechende die Lösung $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ aus und welchem Schwingungstyp entspricht sie?

Aufgabe 3: Drehungen im \mathbb{R}^2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der 2-dimensionalen Drehmatrix $D(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$. Für welchen Drehwinkel sind die Eigenwerte reell? Welche Relation besteht in diesem Fall zwischen den Urbild- und Bildvektoren?

Aufgabe 1: Darstellung der 3-dimensionalen Drehgruppe (7 Punkte)

Eine nützliche Darstellung der 3-dimensionalen Drehgruppe $\vec{r}' = D\vec{r}$ drückt die Matrixelemente D_{ij} durch den (normierten) Vektor \vec{d} entlang der Drehachse und den Drehwinkel ϕ um diese Achse aus

$$D_{ij} = d_i d_j + (\delta_{ij} - d_i d_j) \cos(\phi) - \sum_k \epsilon_{ijk} d_k \sin(\phi).$$

- Zeigen Sie, dass die Drehachse \vec{d} invariant unter der Drehung ist, d.h. $\vec{d}' = D\vec{d} = \vec{d}$.
- Zeigen Sie, dass ein Vektor \vec{u} , der senkrecht zur Drehachse steht, um den Winkel ϕ gedreht wird.
- Bestimmen sie den Drehwinkel aus der Spur von D .
- Finden Sie die zu vorgegebenen Matrixelementen D_{ij} gehörige Drehachse d_i .
- Nutzen Sie das Ergebnis (a) um den “Satz vom Fußball” zu beweisen: *In jedem Fußballspiel, in dem nur ein Ball benutzt wird, gibt es zu Anfang jeder Halbzeit (wenn der Ball auf dem Anstoßpunkt liegt) mindestens zwei Punkte auf dem Ball, die an der gleichen Stelle liegen.*

Aufgabe 2: Gradient, Rotation und der Laplace-Operator (7 Punkte)

Zeigen Sie, dass unter einer Drehung im \mathbb{R}^3

- der Gradient $\vec{\nabla} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right]$ einer Funktion, $\vec{\nabla} f$, wie ein Vektor transformiert.
- die Rotation eines Vektorfelds \vec{v} , $\text{rot} \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v}$, wie ein Vektor transformiert.
- der Laplaceoperator angewendet auf eine Funktion, $\Delta f \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) f$, invariant ist.

Aufgabe 3: Exponentialdarstellung der Drehgruppe (6 Punkte)

Berechnen Sie die Matrix $D(\varphi) = \exp(-iS\varphi)$ für

$$S = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Nutzen Sie das Ergebnis, um das Kompositionsgesetz

$$D(\varphi_1)D(\varphi_2) = D(\varphi_1 + \varphi_2)$$

für Drehungen in der Ebene zu zeigen. (Hinweis: Verwenden Sie die Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ für matrixwertige Argumente.)

Aufgabe 1: Bogenlänge und skalare Kurvenintegrale (8 Punkte)

Die Bogenlänge s ist über die Beziehung $ds = [(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2]^{1/2}$ mit der infinitesimalen Änderung $d\vec{x}$ des Ortsvektors verknüpft.

- (a) Betrachten Sie eine beliebige (glatte) Bahnbewegung $\vec{x}(t)$ eines Massepunktes. Zeigen Sie zuerst allgemein:

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad |\dot{\vec{x}}| = \left| \frac{ds}{dt} \right|, \quad \ddot{\vec{x}} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel,$$

mit der Normalbeschleunigung $\vec{a}_\perp \equiv \frac{d^2\vec{x}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ und der Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_\parallel \equiv \frac{d\vec{x}}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$. Zeigen Sie nun speziell für eine Pendelbewegung $\vec{x} = l(\sin(\varphi), 0, -\cos(\varphi))$ im homogenen Schwerfeld $\vec{F} = -mg\hat{e}_3$ die Beziehungen $ds = l|d\varphi|$ und $\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin(\varphi) \operatorname{sgn}(\dot{\varphi})$.

- (b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\{\vec{x} \mid x_2 = x_3 = \sqrt{2x_1}, 3 \leq x_1 \leq 24\}$.
- (c) Berechnen Sie allgemein die Bogenlänge der Kurve $\vec{x}(\varphi) = \rho(\varphi)[\cos(\varphi), \sin(\varphi)]$ mit $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \leq 2\pi$ für differenzierbares $\rho(\varphi) \geq 0$.

Aufgabe 2: Vektorielle Kurvenintegrale (8 Punkte)

Bestimmen Sie die an einen Massepunkt, der unter der Einwirkung der Kraft $\vec{F}(\vec{x})$ die Bahn $\vec{x}(t)$ durchläuft, verrichtete Arbeit für die Fälle (mit $0 \leq t \leq 2\pi$):

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \vec{F}(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ 1 \\ x_2 x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix} & \text{(ii)} \quad \vec{F}(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_1 x_2^2 \\ x_2 x_3^2 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{(iii)} \quad \vec{F}(\vec{x}) &= \hat{e}_3 \times \vec{x}, \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix} & \text{(iv)} \quad \vec{F}(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3^2 \\ 2x_1 x_3 - 4x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 4 \cos(t) \\ 0 \\ 3 \sin(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Doppelte Rotation (4 Punkte)

Als „doppelte Rotation“ eines Vektorfelds $\vec{a}(\vec{x})$ bezeichnen wir $[\nabla \times (\nabla \times \vec{a})](\vec{x})$. Zeigen Sie durch die Berechnung der doppelten Rotation

- (a) eines Vektorfelds $\vec{B}(\vec{x})$, das für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ die Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j}(\vec{x})$ erfüllt, dass $\Delta \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{j}$ gilt.
- (b) eines Vektorfelds $\vec{E}(\vec{x})$, das für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ die Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho(\vec{x})$ und $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ erfüllt, dass $\Delta \vec{E} = \vec{\nabla} \rho$ gilt.

Hierbei sind $\rho(\vec{x})$ und $\vec{j}(\vec{x})$ differenzierbar und ansonsten beliebig.

Aufgabe 1: Satz von Stokes (10 Punkte)

Der Stokes'sche Satz lautet in der üblichen Notation:

$$\int_{\mathcal{F}} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g})(\vec{x}) = \oint_{\partial\mathcal{F}} d\vec{x} \cdot \vec{g}(\vec{x}). \quad (1)$$

Betrachten Sie als Spezialfall für die orientierte Fläche \mathcal{F} ein Segment eines (elliptischen) Paraboloids mit dem kreisförmigen Rand $\partial\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \left\{ \vec{x} \mid x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \leq 2 \right\}, \quad \partial\mathcal{F} = \left\{ \vec{x} \mid x_1^2 + x_2^2 = 4, x_3 = 2 \right\}.$$

Das Vektorfeld \vec{g} hat die Form $\vec{g}(\vec{x}) = \{x_1, 2x_3, x_2^2\}$.

- Zeigen Sie, dass $\vec{x}(u, v) = \{u \cos(v), u \sin(v), \frac{1}{2}u^2\}$ mit $0 \leq u \leq 2$ und $0 \leq v \leq 2\pi$ eine Parametrisierung der orientierten Fläche \mathcal{F} darstellt.
- Bestimmen Sie die Tangentialvektoren \vec{t}_u, \vec{t}_v und den Normalenvektor $\vec{n} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v$. Wählen Sie die Orientierung der Fläche so, dass $\vec{n} \cdot \hat{e}_3 \geq 0$.
- Berechnen Sie die *rechte* Seite von Gleichung (1) explizit.
- Berechnen Sie die *linke* Seite von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (c) die Gültigkeit des Stokes'schen Satzes für diesen Spezialfall.

Aufgabe 2: Satz von Stokes in der Ebene (10 Punkte)

Betrachten Sie eine orientierte Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ in der x_1 - x_2 -Ebene mit der mittels der Bogenlänge parametrisierten geschlossenen Kurve $\partial\mathcal{F} = \{x_1(s), x_2(s), 0\}$ als orientiertem Rand. Neben dem Tangentialvektor $\vec{x}'(s) \equiv \left\{ \frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, 0 \right\}$ an die Kurve definieren wir den Vektor $\vec{n} \equiv \{x_2', -x_1', 0\}$.

- Zeigen Sie: $|\vec{x}'(s)| = 1$, $|\vec{n}(s)| = 1$, $\vec{x}' \cdot \vec{n} = 0$ und $\det(\vec{n}, \vec{x}', \hat{e}_3) = 1$.
- Zeigen Sie für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{B}(\vec{x})$ mit Hilfe des Stokes'sches Satzes:

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} ds (\vec{n} \cdot \vec{B}) = \int_{\mathcal{F}} dx_1 dx_2 (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2).$$

Falls Sie eine Analogie zum Gauß'schen Satz sehen, erklären Sie diese!

Aufgabe 1: Identität für den Levi-Civita-Tensor (6 Punkte)

Zeigen Sie für alle $i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3\}$ die Identität:

$$\epsilon_{ikl}\delta_{jm} + \epsilon_{ilj}\delta_{km} + \epsilon_{ijk}\delta_{lm} = \epsilon_{jkl}\delta_{im}.$$

Hinweis: Betrachten Sie sukzessive Fallunterscheidungen, $i = m$ vs. $i \neq m$, usw.

Aufgabe 2: Der Gauß'sche Satz (14 Punkte)

Der Satz von Gauß lautet

$$\int_{\mathcal{V}} dV (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{S} \cdot \vec{A}, \quad (1)$$

wobei \mathcal{V} ein Volumen mit dem orientierten Rand $\partial\mathcal{V}$ ist. Als erste Anwendung betrachten wir das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{x}) = [x_1, x_2, x_3]$ und das Integrationsvolumen

$$\mathcal{V} = \{ \vec{x} \mid 0 \leq x_3 \leq 3, x_1^2 + x_2^2 \leq 9 \}$$

mit nach außen gerichteten Normalvektor.

- (a) Berechnen Sie die linke Seite von Gleichung (1) explizit.
- (b) Berechnen Sie die rechte Seite von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (a) die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für diesen Spezialfall.

Als zweiten Fall betrachten wir das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{x}) = [2x_1x_2 + x_3, x_2^2, -x_1 - 3x_2]$ und das Integrationsvolumen

$$\mathcal{V} = \{ \vec{x} \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, 2(x_1 + x_2) + x_3 \leq 6 \}$$

mit nach außen gerichtetem Normalvektor.

- (c) Berechnen Sie die linke Seite von Gleichung (1) explizit.
- (d) Konstruieren Sie eine Parametrisierung des orientierten Dreiecks

$$\{ \vec{x} \in \partial\mathcal{V} \mid 2(x_1 + x_2) + x_3 = 6 \}$$

und berechnen Sie die zugehörigen Tangential- sowie den Normalvektor.

- (e) Berechnen Sie die rechte Seite von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (c) die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für diesen Spezialfall.

Aufgabe 1: Der Gauß'sche Satz (12 Punkte)

Der Satz von Gauß lautet

$$\int_{\mathcal{V}} dV (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{S} \cdot \vec{A}, \quad (1)$$

wobei \mathcal{V} ein Volumen mit dem orientierten Rand $\partial\mathcal{V}$ ist. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{x}) = [2x_1 + 3x_3, -x_1x_3 - x_2, x_2^2 + 2x_3]$$

und ein Integrationsvolumen

$$\mathcal{V} = \{ \vec{x} \mid |\vec{x} - \vec{x}_0| \leq 3 \}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit nach außen gerichtetem Normalvektor.

- Berechnen Sie die linke Seite von Gleichung (1) explizit.
- Berechnen Sie die rechte Seite von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (a) die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für diesen Spezialfall.

Aufgabe 2: Der erste Green'sche Satz (8 Punkte)

Der erste Satz von Green lautet

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \left[(\vec{\nabla}\mu) \cdot (\vec{\nabla}\nu) + \mu\Delta\nu \right] = \int_{\partial\mathcal{V}} dS \mu \frac{\partial\nu}{\partial n}. \quad (2)$$

Dieser Satz findet seine Anwendung z.B. beim Nachweis der Eindeutigkeit von Lösungen elektrostatischer Probleme. Betrachten Sie z.B. die Gleichung $(\Delta\Phi)(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{x})$ für das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{x})$ mit $\vec{x} \in \mathcal{V}$, wobei sowohl die Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ in \mathcal{V} als auch der Potentialwert $V(\vec{x})$ auf dem Rand $\partial\mathcal{V}$ vorgegeben sind: $\Phi(\vec{x}) = V(\vec{x})$ für $\vec{x} \in \partial\mathcal{V}$. Um nachzuweisen, dass $\Phi(\vec{x})$ durch diese Information eindeutig festgelegt ist, nimmt man zunächst an, es gäbe zwei unterschiedliche Lösungen, $\Phi_1 \neq \Phi_2$, und leitet dann folgenden Widerspruch her:

- Betrachten Sie die Differenzfunktion $w \equiv \Phi_1 - \Phi_2 \neq 0$. Zeigen Sie, dass w für alle $\vec{x} \in \mathcal{V}$ die Gleichung $(\Delta w)(\vec{x}) = 0$ und für alle $\vec{x} \in \partial\mathcal{V}$ die Gleichung $w(\vec{x}) = 0$ erfüllt.
- Leiten Sie aus (a) und Gleichung (2) mit der Wahl $\mu = \nu = w$ ab: $\int_{\mathcal{V}} d^3x \left[(\vec{\nabla}w)(\vec{x}) \right]^2 = 0$, und konstruieren Sie einen Widerspruch. Was schließen Sie hieraus?

Aufgabe 1: Eigenschaften der Deltafunktion (12 Punkte)

Die Deltafunktion $\delta(x)$ ist dadurch definiert, dass sie in Integralen, in Kombination mit einer beliebigen, genügend glatten Funktion $f(x)$, die folgende Wirkung hat

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - a) = f(a) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Insbesondere gilt also $\int dx f(x) \delta(x) = f(0)$. Die Deltafunktion ist damit keine Funktion im üblichen Sinn, sondern eine *verallgemeinerte Funktion* oder *Distribution*.

- (a) Zeigen Sie, dass die Folge $g_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$ im Limes $n \rightarrow \infty$ zur Deltafunktion wird.
 (b) Beweisen Sie unter Verwendung von Gleichung (1) die Eigenschaften

$$(i) \quad \delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|} \delta(x), \quad \lambda \neq 0 \quad \text{und} \quad (ii) \quad \delta(h(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|h'(x_i)|}$$

wobei angenommen wird, dass $h(x)$ nur einfache Nullstellen x_i hat und an diesen differenzierbar ist.

Die Verallgemeinerung der Deltafunktion auf beliebige Dimensionen $d = 1, 2, \dots$ ist gegeben durch

$$\delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{a}) = \delta(x_1 - a_1) \cdot \dots \cdot \delta(x_d - a_d) = \prod_{n=1}^d \delta(x_n - a_n)$$

und erfüllt $\int_{\mathbb{R}^d} d^d x f(\vec{x}) \delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{a}) = f(\vec{a})$.

- (c) Beweisen Sie (für $\epsilon > 0$ und $\lambda \neq 0$) die weiteren Eigenschaften

$$(i) \quad \int_{\{|\vec{x}-\vec{a}|\leq\epsilon\}} d^d x \delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{a}) = 1, \quad (ii) \quad \delta^{(d)}(\lambda \vec{x}) = |\lambda|^{-d} \delta^{(d)}(\vec{x}).$$

- (d) Zeigen Sie für eine nicht-singuläre Matrix A

$$\delta(A\vec{x} + \vec{b}) = \frac{1}{|\det(A)|} \delta(\vec{x} + A^{-1}\vec{b}).$$

Aufgabe 2: Elektrostatik (8 Punkte)

Bestimmen Sie das elektrische Potential $\Phi(r)$ für die kugelsymmetrische Ladungsverteilung

$$\rho(r) = -\frac{b}{r} e^{-\alpha r}.$$

Aufgabe 1: Multipolentwicklung einer Ladungsverteilung (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Gesamtladung, das Dipol- und Quadrupolmoment für einen dünnen, homogen geladenen Stab ($-a \leq x_1 \leq a$) und einen homogen geladenen Kubus ($-a \leq x_i \leq a, i = 1, 2, 3$). Geben Sie die Fernfeldnäherung für die elektrischen Potentiale und elektrischen Felder der Ladungsverteilungen bis zur dritten Ordnung in der Multipolentwicklung an.

Aufgabe 2: Biot-Savart-Gesetz der Magnetostatik (4 Punkte)

In der Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ist das Vektorpotential \vec{A} einer Stromdichte \vec{j} durch das Poissonintegral $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ bestimmt. Leiten Sie daraus das Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

für das magnetische Feld ab.

Aufgabe 3: Ein- und zweidimensionale Elektrodynamik (10 Punkte)

Betrachten Sie zunächst die Maxwell-Gleichungen im Vakuum für ein dreidimensionales System, das translationsinvariant in den x_2 - und x_3 -Richtung und invariant unter Spiegelungen an der x_1 -Achse ist: $\rho = \rho(x_1, t), \vec{j} = j(x_1, t)\hat{e}_1$.

- (a) Lösen Sie die Maxwell-Gleichungen mit Hilfe eines Ansatzes der Form $\vec{E}(\vec{x}, t) = E(x_1, t)\hat{e}_1$, $\vec{B}(\vec{x}, t) = 0$. Bestimmen Sie die Stromdichte $j(x_1, t)$ in Abhängigkeit der Ladungsdichte $\rho(x_1, t)$.

Betrachten Sie nun das analoge Problem eines Systems, das translationsinvariant in x_3 -Richtung und invariant unter Spiegelungen an der (x_1, x_2) -Ebene ist: $\rho = \rho(\vec{x}_{\parallel}, t), \vec{j} = j_1(\vec{x}_{\parallel}, t)\hat{e}_1 + j_2(\vec{x}_{\parallel}, t)\hat{e}_2$, wobei $\vec{x}_{\parallel} = (x_1, x_2)$. Wir machen nun einen Ansatz der Form $\Phi = \Phi(\vec{x}_{\parallel}, t)$ für das skalare Potential und $\vec{A} = A_1(\vec{x}_{\parallel}, t)\hat{e}_1 + A_2(\vec{x}_{\parallel}, t)\hat{e}_2$ für das Vektorpotential in Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

- (b) Zeigen Sie, dass das elektrische Potential durch das 2-dimensionale Poissonintegral

$$\Phi(\vec{x}_{\parallel}, t) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int d^2x' \rho(\vec{x}'_{\parallel}, t) \ln(|\vec{x}_{\parallel} - \vec{x}'_{\parallel}|)$$

gegeben ist. *Hinweis:* Der Beweis analog zur Vorlesung verwendet den Stokeschen Satz in der Ebene (Übungsblatt 6).

- (c) In welche Richtung zeigt das Magnetfeld? Ist der Ansatz für \vec{A} kompatibel mit der Translationsinvarianz?

Aufgabe 1: Die eindimensionale Wellengleichung (6 Punkte)

Die Amplitude $\xi(x, t)$ der longitudinalen Schwingungen eines Metallstabs mit Länge L erfüllt für kleine Auslenkungen die eindimensionale Wellengleichung $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t)$.

- Konstruieren Sie die allgemeine Lösung der Gleichung mit Hilfe eines Separationsansatzes.
- Finden Sie die Lösung der Wellengleichung für den Spezialfall, dass das eine Ende des Stabs bei $x = 0$ fest eingespannt ist, während das andere Ende bei $x = L$ frei schwingen kann. D.h. die Schwingung unterliegt den Randbedingungen $\xi(x = 0, t) = 0$ und $\frac{\partial \xi}{\partial x}(x = L, t) = 0$.

Aufgabe 2: Die zweidimensionale Membran (6 Punkte)

Die Schwingungen einer ebenen Membran mit eingespanntem Rand erfüllen die zweidimensionale Wellengleichung $\Delta \Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(\vec{x}, t)$ mit $\Phi(\vec{x}, t) = 0$ auf dem Rand. Zeigen Sie: Die Eigenmoden der Schwingung einer kreisförmigen Membran mit Radius r_0 sind in ebenen Polarkoordinaten (r, φ) gegeben durch

$$\Phi(r, \varphi, t) = a J_m(pr) \sin(m\varphi + \beta) \sin(cpt + \alpha)$$

mit $m = 0, 1, 2, \dots$. Dabei sind die Bessel-Funktionen $J_m(z)$ eine Lösung der Differentialgleichung $J_m'' + \frac{1}{z} J_m' + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) J_m = 0$. Der Wert p wird durch die Randbedingung $J_m(pr_0) = 0$ festgelegt.

Aufgabe 3: Die eindimensionale Diffusionsgleichung (8 Punkte)

Die Diffusionsgleichung in einer Raumrichtung lautet $\frac{\partial n}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x, t)$, wobei D die Diffusionskonstante des Prozesses ist.

- Zeigen Sie, dass für $t > 0$

$$n_0(x, t) = (4\pi Dt)^{-1/2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}$$

eine spezielle Lösung der Diffusionsgleichung ist.

- Zeigen Sie weiter, dass $n_0(x, t)$ für $t \rightarrow 0$ eine Darstellung der Diracschen Delta-Funktion liefert:

$$\lim_{t \rightarrow 0} n_0(x, t) = \delta(x - x_0).$$

- Konstruieren Sie aus den Ergebnissen (a) und (b) eine Integraldarstellung der Lösung der Diffusionsgleichung für eine zum Zeitpunkt $t = 0$ vorgegebene Teilchendichte $\rho(x_0) = n(x_0, t = 0)$. Prüfen Sie deren Gültigkeit explizit.