Theorie II

Notiztitel 19.10.2008

Weitere Informationen zur Vorlesung: http://komet337.physik.uni-mainz.de/Bluemer/lectures_WS2008

Kommentare/Korrekturen bitte an Nils Blümer, mailto:Nils.Bluemer@uni-mainz.de

Organisation: Merkblatt, Homepage

Inhalt:

Lagrange-Formalismus	18. 24
Hamilton-Formalismus	19. 24
Relativistische Dynamik	20. 24
Mechanik des starren Körpers	18.+19. 24

Rückmeldungen → Hiwis, Oberassistentin

Vorlesungsstil:
- Tafel ⇝ Mitschreiben + Nacharbeiten
- Skript
- Stichworte auf Homepage
- Aber: zusätzliche Argumente + Beispiele

Erst Umfrage, dann Listen herumgeben

- Mi 12:30-15:30
- Mi 15-18
- Do 12:30-15:30

kein Termin? ⇝ Freitag nachmittag?
nur 1 Termin? (3x)

Einführung Theorie II [Kap 7: Lagrange-Formalismus]

Analytische Mechanik: hauptsächlich 18. + 19. Jahrhundert

[Sir Isaac Newton (1643-1727) Principia (1687)] English

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) French

Leonhard Euler (1703-1783) Swiss

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Italian → Preußen → France

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) Irish

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) Preuße

[Relativitätstheorie: Albert Einstein 1879-1955]

Analytische (nichtrelativistische) Mechanik:
Fundament der Theoretischen Physik

⇝
- Theorie dynamischer Systeme
- Relativitätstheorie
- Statistische Mechanik
- Quantenmechanik, Quantenfeldtheorien

Frage: Die Newton'sche Bewegungsgleichung $m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i$ liefert doch schon vollständige Beschreibung (im Rahmen der klassischen, nichtrelativistischen Mechanik).
Wozu neue Theorie / Formalismen?

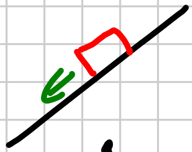
Antworten:

(i) Bisher nur Massenpunkte betrachtet.
Verallgemeinerung auf starre + elastische Körper, ideale + zähe Flüssigkeiten nötig.

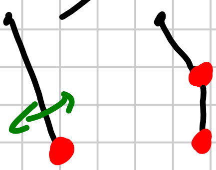
Beispiele Zwangsbedingungen

(ii) Systeme mit Zwangsbedingungen?

- Reflexion an Ebene $\vec{p}_\perp \to -\vec{p}_\perp$; $\vec{p}_\parallel \to \vec{p}_\parallel$
  keine Newton-Mechanik!
- Schiefe Ebene

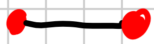


- Pendel

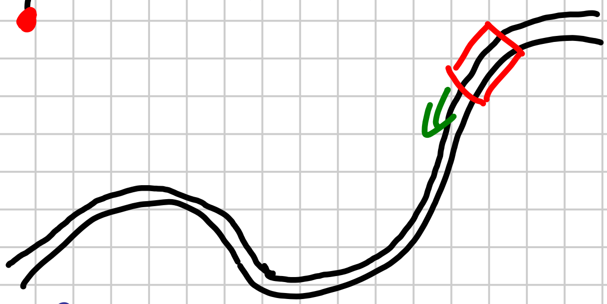


etc.

- Hantel



- Achterbahn

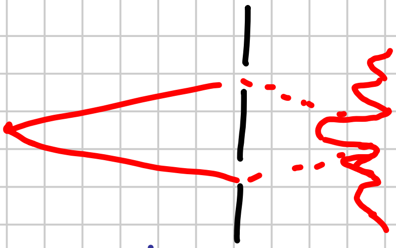


- Kugel auf Tablett (z. B. von Kellner getragen)

(iii) Nicht-Kartesische Koordinatensysteme?
Nicht-Inertialsysteme?

(iv) Wie ist die physikalische Bahn ausgezeichnet?

$\rightsquigarrow$ QM:
alle Bahnen



Bsp: Doppelschlitz

Übergang QM → klassische Mechanik?

(v) Symmetrien? Struktur? Störungstheorien?

Alternative: Molekulardynamiksimulationen (numerische Integration der Newton-Gleichungen).

7.1 Die Newton'sche Mechanik

Deterministisches Prinzip: Bahn $\vec{X}(t) = (\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_N(t))$ eines N-Teilchen-Systems ist vollständig durch Anfangswerte $\vec{X}(0)$, $\dot{\vec{X}}(0)$ festgelegt.

Newton'sche Bewegungsgleichung:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

↑ Kraft auf Teilchen i

Gilt zunächst in kartesischen (ortsfesten) Koordinaten

Die Gesamtkraft ist i.A. Summe aus inneren und äußeren Kräften:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(in)}(\{\vec{x}_{ji}, \dot{\vec{x}}_{ji}\}) + \vec{F}_i^{(ex)}(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t)$$

↑ Differenzvektoren $\vec{x}_j - \vec{x}_i$

Meist gilt 3. Newton'sches Gesetz:

$$\vec{F}_i^{(in)} = \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ji}\,; \qquad \vec{f}_{ji} = f_{ji}(|\vec{x}_{ji}|)\,\hat{x}_{ji}$$

Kräfte in Verbindungsrichtung

- actio = - reactio
- konservativ

→ dann gilt $\vec{F}_i^{(in)} = -\vec{\nabla}_i V^{(in)} \qquad (i = 1, \ldots, N)$

mit Potential der inneren Kräfte

$$V^{(in)}(\vec{X}) = \sum_{i<j} V_{ji}(|\vec{x}_{ij}|)\,; \qquad V_{ji}(x) = V_{ji}(x_0) + \int_{x_0}^{x} dx'\, f_{ji}(x')$$

Analog gilt für konservative äußere Kräfte: $\vec{F}_i^{(ex)} = -\vec{\nabla}_i V^{(ex)}$

$$\leadsto \quad \vec{F}_i = -(\vec{\nabla}_i V)(\vec{X}) \quad \text{mit} \quad V(\vec{X}) = V^{(in)}(\vec{X}) + V^{(ex)}(X)$$

↑ keine explizite Abhängigkeit von $\dot{\vec{X}}$ und t!

20.10.08

Fallunterscheidung:

(i) abgeschlossene Systeme: $\vec{F}_i^{(ex)} = 0 \quad (i=1,\dots,N)$

$\rightsquigarrow$ Relativitätsprinzip

Inertialsysteme, durch Galilei-Transformationen verbunden: $\vec{x}'(\vec{x},t) = \sigma R(\vec{\alpha})^{-1}\vec{x} - \vec{v}t - \vec{\varrho}; \quad t(\vec{x},t) = t - \tau$

Forminvarianz der Newton-Gleichungen

Erhaltungsgrößen: Gesamt-Energie, -Impuls, -Drehimpuls

(ii) Teilsysteme: $\vec{F}_i^{(ex)} \neq 0$ für mindestens ein $1 \leq i \leq N$

Forminvarianz für Galilei-Trafos nur bei Mittransformation der äußeren Kräfte

Erhalten: Gesamtenergie (falls Kräfte konservativ)

Für Gesamtimpuls $\vec{P}$ und Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ gilt:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(ex)}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) \equiv \vec{F}^{(ex)}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)$$

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(ex)}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) \equiv \vec{N}^{(ex)}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)$$

Im Allgemeinen sind $\vec{P}, \vec{L}$ offensichtlich nicht erhalten; dies kann jedoch für einzelne Komponenten der Fall sein.

Beispiele:
- Harmonischer Oszillator (mit/ohne Reibung/Antrieb)
- Pendel (sphärisch, mathematisch, ...)
- Geladenes Teilchen mit Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_{Lor} = q(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B})$$

Theorie II: Vorlesung 2

Notiztitel 19.10.2008

7.2 Die Lagrange-Funktion

Newton-Gleichungen $m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i$ sind vektoriell, dagegen kinetische Energie $E_{kin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2$ und potentielle Energie $V(\vec{X})$ (für konservative Kraft) skalar.

Neu: Bewegungsgleichung (und Gesamtenergie) durch skalare Lagrange-Funktion bestimmt ($\rightsquigarrow$ Vereinfachung).

Konventionen: Die im Folgenden betrachteten Funktionen (Energie, Kräfte, Lagrange-Fkt. etc.) hängen – für ein N-Teilchen-System – von den $6N+1$ Variablen $\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t$ ab, die zunächst (z. B. bei partiellen Ableitungen) als unabhängig betrachtet werden.

Speziell für eine physikalische Bahn (zu den Anfangsbedingungen $\{\vec{x}_j(0)\}$, $\{\dot{\vec{x}}_j(0)\}$) verwenden wir die Notation $\{\vec{x}_{\phi j}(t)\}$ bzw. $\{\vec{X}_\phi(t)\}$ sowie den Index ϕ für Energie etc. auf der physikalischen Bahn.

Konstruktion der Lagrange-Funktion

Wir betrachten im Folgenden zunehmend komplexe Fälle, zunächst in kartesischen Koordinaten.

(Verknüpfung mit Hamilton'schem Prinzip in Kap. 7.3)

a) Einzelnes Teilchen mit konservativer Kraft

Funktion der kinetischen Energie für beliebige Bahnen:

$$T(\dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 ; \quad E_{kin}(t) = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{x}}_\phi(t)|^2 = T(\dot{\vec{x}}_\phi(t))$$

außerdem: $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}^{(ex)}(\vec{x}) = -(\vec{\nabla} V)(\vec{x})$

Definition: $\boxed{L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = T(\dot{\vec{x}}) - V(\vec{x})}$ Lagrange-Funktion

Damit können wir die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\vec{x}}_\phi = \vec{F}(\vec{x}_\phi) = -\vec{\nabla} V(\vec{x}_\phi)$$

in der Form einer Lagrange-Gleichung schreiben:

$$\vec{0} = m \ddot{\vec{x}}_\phi + \frac{\partial V}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_\phi) = \frac{d}{dt}(m \dot{\vec{x}}_\phi) + \frac{\partial V}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_\phi)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{x}}}(\dot{\vec{x}}_\phi)\right] + \frac{\partial V}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_\phi)$$

$$= \underline{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}(\vec{x}_\phi, \dot{\vec{x}}_\phi)\right] - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_\phi, \dot{\vec{x}}_\phi)}$$

Auch die Gesamtenergie des Teilchens auf der physikalischen Bahn lässt sich durch L ausdrücken:

$$E = T(\dot{\vec{x}}_\phi) + V(\vec{x}_\phi) = m \dot{\vec{x}}_\phi^2 - [T(\dot{\vec{x}}_\phi) - V(\vec{x}_\phi)]$$

$$= \dot{\vec{x}}_\phi \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}(\vec{x}_\phi, \dot{\vec{x}}_\phi) - L(\vec{x}_\phi, \dot{\vec{x}}_\phi)$$

Also: vollständige Bestimmung der Dynamik durch skalare Lagrange-Funktion.

b) N-Teilchen-Systeme mit konservativen Kräften

$\rightsquigarrow$ Kin. Energie $T(\dot{\vec{x}}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^{\,2}$; $E_{kin} = T(\dot{\vec{x}}_\phi)$

Potential $V(\vec{x}) = V^{(in)}(\vec{x}) + V^{(ex)}(\vec{x})$

Mit der Definition $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = T(\dot{\vec{x}}) - V(\vec{x})$ gilt:

$$\vec{0} = m_i \ddot{\vec{x}}_{\phi i} - \vec{F}_{\phi i} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{x}}_i}(\dot{\vec{x}}_\phi)\right] + \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i}(\vec{x}_\phi)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i}(\vec{x}_\phi, \dot{\vec{x}}_\phi)\right] - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i}(\vec{x}_\phi, \dot{\vec{x}}_\phi)$$

Für die erhaltene Gesamtenergie erhält man:

$$E = T(\dot{\vec{x}}_\phi) + V(\vec{x}_\phi) = \sum_i \dot{\vec{x}}_{\phi i} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i}(\vec{x}_\phi, \dot{\vec{x}}_\phi) - L(\vec{x}_\phi, \dot{\vec{x}}_\phi)$$

c) Explizit zeitabhängige äußere Kräfte (wirbelfrei)

$$\vec{F}_i^{(ex)} = -(\vec{\nabla}_i V^{(ex,wf)})(\vec{x}, t)$$

Nicht konservativ $\rightsquigarrow$ Gesamtenergie i.A. nicht erhalten!

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = T(\dot{\vec{x}}) - V(\vec{x}, t) \quad \text{mit } V(\vec{x}, t) = V^{(in)}(\vec{x}) + V^{(ex,wf)}(\vec{x}, t)$$

↑ jetzt explizit t-abhängig!

$$\rightsquigarrow \vec{0} = m_i \ddot{\vec{x}}_{\phi i} - \vec{F}_{\phi i} = \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i}\right]_\phi$$

wichtig: hier keine Zeitableitung

Also wieder die bekannte Lagrange-Gleichung.

Beispiele:
- langsam veränderliche elektrische Felder
- zeitlich veränderliche Gravitationskräfte

d) Geschwindigkeitsabhängige Kräfte: 1 Teilchen

Wichtiger Spezialfall: elektromagnetische Kräfte, zunächst für einzelnes Teilchen:

$$m\ddot{\vec{x}}_\phi = \vec{F}_{Lor}(\vec{x}_\phi, \dot{\vec{x}}_\phi, t) = q[\vec{E}(x_\phi, t) + \dot{\vec{x}}_\phi \times \vec{B}(\vec{x}_\phi, t)],$$

wobei die elm. Felder aus den elm Potentialen abgeleitet werden können:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Behauptung: Die Lorentz-Kraft kann aus einem Potential

$$V^{Lor}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = q[\phi(\vec{x}, t) - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)]$$

explizit geschwindigkeitsabhängig

abgeleitet werden.

Beweis: Mit $\dot{\vec{x}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}) - (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$ folgt:

$$\begin{aligned} F_{Lor}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) &= q(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}) = q[-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})] \\ &= q\left(-\frac{\partial}{\partial \vec{x}}(\phi - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}) - [\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}]\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \vec{x}} V_{Lor} - q\frac{d}{dt}\vec{A} = -\frac{\partial V_{Lor}}{\partial \vec{x}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V_{Lor}}{\partial \dot{\vec{x}}} \end{aligned}$$

$\square$

Mit der Definition $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = T(\dot{\vec{x}}) - V_{Lor}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu

$$\begin{aligned} \vec{0} = m\ddot{\vec{x}}_\phi - F_{Lor}(\vec{x}_\phi, \dot{\vec{x}}_\phi, t) &= \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V_{Lor}}{\partial \dot{\vec{x}}} + \frac{\partial V_{Lor}}{\partial \vec{x}}\right]_\phi \\ &= \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}}\right]_\phi \end{aligned}$$

// 22.10.08

e) Geschwindigkeitsabh. Kräfte: N Teilchen

Jetzt $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(in)} + \vec{F}_i^{(wf)} + \vec{F}_i^{Lor} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{x}}_i} - \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i}$

mit dem Potential $V(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = V_{in} + V_{ex}^{wf} - V_{ex}^{Lor}$

$\rightsquigarrow \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i}\right]_\phi = 0$; $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = T - V$

Achtung: nicht alle Kraftgesetze können mithilfe einer Lagrange-Funktion/Gleichung geschrieben werden.
Wichtige Ausnahme: Reibungskräfte, z.B. für 1 Teilchen

$$m\ddot{\vec{x}}_\phi = -(\vec{\nabla} V_{ex}^{wf})(\vec{x}_\phi, t) + \vec{F}_R(\dot{\vec{x}}_\phi); \quad \vec{F}_R = -k\dot{\vec{x}}$$

$\not\rightsquigarrow$ Lagrange-Gleichung

Es gilt hier aber eine verallgemeinerte Bewegungsgleichung

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\vec{x}}}\right]_\phi = 0 \quad \text{mit } L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = T(\dot{\vec{x}}) - V_{ex}^{wf}(\vec{x}, t)$$

und der Dissipationsfunktion $\mathcal{F}$, die bestimmt ist durch

$$\vec{F}_R = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\vec{x}}} \quad \overset{\text{hier}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{F}(\dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}k\dot{\vec{x}}^2$$

Offensichtliche Verallgemeinerungen für N-Teilchen-Systeme.

Theorie 2: Vorlesung 3

Notiztitel 25.10.2008

7.3 Das Hamilton'sche Extremalprinzip

Die Dynamik eines Teilchens sei durch die Lagrange-Funktion $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ bestimmt. Außerdem sollen die Randbedingungen $\vec{x}(t_1) = \vec{x}_1$; $\vec{x}(t_2) = \vec{x}_2$ gelten. [Achtung: Indices 1,2 nicht für Raumrichtungen (besser: → a, b)]

Frage: Wodurch zeichnet sich die physikalische Bahn $\vec{x}_\phi(t)$ (welche die Lagrange-Gleichung $\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}}\right]_\phi$ erfüllt) gegenüber anderen denkbaren Bahnen, die die gleichen Randbedingungen erfüllen, aus?

Antwort: $\boxed{\delta S = 0}$ Hamilton'sches Extremalprinzip

Formal einfacher als Lagrange-Gleichung, jedoch erklärungsbedürftig!

Def: $S_{(\vec{x}_1, t_1)}^{(\vec{x}_2, t_2)}[\vec{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$ Wirkungsfunktional,

auch kürzer als Wirkung $S = S[\vec{x}]$ bezeichnet.

Funktional: bildet Funktionen [hier $\vec{x}(t)$ für feste Randbedingungen $(\vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2, t_2)$] auf reelle Zahlen ab: $S[\vec{x}] \in \mathbb{R}$.

Außerdem ist $S_{(\vec{x}_1, t_1)}^{(\vec{x}_2, t_2)}[\vec{x}]$ Funktion der Randbedingungen.

Physikalische Dimension: [Energie] × [Zeit] = [Wirkung].

Betrachte nun (kleine) Variationen der physikalischen Bahn:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_\phi(t) + \varepsilon\,\vec{\xi}(t) \quad \text{mit} \quad \vec{\xi}(t) \in \mathbb{R}^3 \text{ fest}, \quad \varepsilon \ll 1$$

Randbedingungen: $\vec{\xi}(t_1) = \vec{\xi}(t_2) = 0$

Def: Variation δ der (physikalischen) Bahn:

$$(\delta\vec{x})(t) \equiv \vec{x}(t) - \vec{x}_\phi(t) = \varepsilon\,\vec{\xi}(t);$$

$$(\delta\dot{\vec{x}})(t) \equiv \dot{\vec{x}}(t) - \dot{\vec{x}}_\phi(t) = \varepsilon\,\dot{\vec{\xi}}(t)$$

Variation δ des Wirkungsfunktionals:

$$(\delta S)_{(\vec{x}_1,t_1)}^{(\vec{x}_2,t_2)}[\vec{x}] \equiv S_{(\vec{x}_1,t_1)}^{(\vec{x}_2,t_2)}[\vec{x}] - S_{(\vec{x}_1,t_1)}^{(\vec{x}_2,t_2)}[\vec{x}_\phi]$$

$$= S_{(\vec{x}_1,t_1)}^{(\vec{x}_2,t_2)}[\vec{x}_\phi + \varepsilon\,\vec{\xi}] - S_{(\vec{x}_1,t_1)}^{(\vec{x}_2,t_2)}[\vec{x}_\phi]$$

Hamilton'sches Extremalprinzip: $S[\vec{x}]$ ist für $\vec{x} = \vec{x}_\phi$ extremal:

$$(\delta S)_{(\vec{x}_1,t_1)}^{(x_2,t_2)}[\vec{x}_\phi + \varepsilon\,\vec{\xi}(t)] = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \qquad (\varepsilon \to 0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{1}{\varepsilon}(\delta S)_{(\vec{x}_1,t_1)}^{(x_2,t_2)}[\vec{x}_\phi + \varepsilon\,\vec{\xi}(t)] = 0$$

Zu zeigen: Hamilton'sches Prinzip $\Longleftrightarrow$ Lagrange-Gleichung.

Forme dazu um:

$$\frac{1}{\varepsilon}\delta S = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2} dt \Big[L(\vec{x}_\phi(t) + \varepsilon\,\vec{\xi}(t), \dot{\vec{x}}_\phi(t) + \varepsilon\,\dot{\vec{\xi}}(t), t) - L(\vec{x}_\phi(t), \dot{\vec{x}}_\phi(t), t) \Big]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \Big[\frac{\partial L}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_\phi(t), \dot{\vec{x}}_\phi(t), t)\cdot\vec{\xi}(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}(\vec{x}_\phi(t), \dot{\vec{x}}_\phi(t), t)\cdot\dot{\vec{\xi}}(t) \Big] + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}(\vec{x}_\phi(t), \dot{\vec{x}}_\phi(t), t)\cdot\vec{\xi}(t)\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ wegen } \vec{\xi}(t_1)=\vec{\xi}(t_2)=\vec{0}}$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}(\vec{x}_\phi(t), \dot{\vec{x}}_\phi(t), t) - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_\phi(t), \dot{\vec{x}}_\phi(t), t)\right\}\cdot\vec{\xi}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_{ab} - \int_a^b v\,du$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}(\vec{x}_\phi(t), \dot{\vec{x}}_\phi(t), t) - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_\phi(t), \dot{\vec{x}}_\phi(t), t)\right\}\cdot\vec{\xi}(t)$$

Klar: L-Gleichung $\rightsquigarrow$ H-Prinzip

Umkehrung folgt, weil $\xi(t)$ beliebig. [Widerspruchsbeweis: Angenommen, L-Gleichung verletzt in Umgebung von $t_0 \in [t_1, t_2]$. Wähle $\xi(t) \approx \delta(t-t_0)\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}}\right]_{\phi, t=t_0}$ $\rightsquigarrow$ H-Prinzip verletzt.]

$\square$

Für einen alternativen Blickpunkt schreiben wir nochmal die Variation der Wirkung:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}\right]_\phi \cdot (\delta\vec{x})(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\delta S}{\delta \vec{x}(t)}[x_\phi] = \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}\right]_\phi = \vec{0}$$

Funktionalableitung

Hiermit ist das H-Prinzip praktisch durch die L-Gleichung ausgedrückt.

Man kann die Funktionalableitung als Kontinuumsversion der partiellen Ableitung betrachten:

$$F = F(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N) \Rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial \vec{x}_1} \cdot d\vec{x}_1 + \frac{\partial F}{\partial \vec{x}_2} \cdot d\vec{x}_2 + \dots \frac{\partial F}{\partial \vec{x}_L} \cdot d\vec{x}_L$$

$$\vec{x}_i \mathrel{\hat{=}} \vec{x}_\phi\left(t_1 + \frac{i}{L}(t_2 - t_1)\right)$$

Achtung: wir haben nur gezeigt, dass das Wirkungsfunktional für die physikalische Bahn extremal wird, nicht, dass es maximal oder minimal ist.

In konkreten Beispielen können beide Möglichkeiten ebenso vorkommen wie Sattelpunkte.

Verallgemeinerung des Hamilton'schen Prinzips auf bel. N-Teilchen-Systeme: Betrachte $\vec{X}_\phi(t) \equiv (\vec{x}_{\phi 1}(t), \dots, \vec{x}_{\phi N}(t))$

und $S_{(\vec{X}_1, t_1)}^{(\vec{X}_2, t_2)}[X] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\vec{X}(t), \dot{\vec{X}}(t), t)$

Hamilton'sches Prinzip:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} (\delta S)_{(\vec{x}_1, t)}^{(\vec{x}_2, t)} [\vec{X}_\phi + \varepsilon\, \Xi] = 0 \quad ; \quad \Xi(t) = \{\vec{\varphi}_i(t)\}$$

mit $\vec{\xi}_1(t_1) = \vec{\xi}_1(t_2) = \dots = \vec{\xi}_N(t_1) = \vec{\xi}_N(t_2) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i}(\vec{X}_\phi, \dot{\vec{X}}_\phi, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i}(\vec{X}_\phi, \dot{\vec{X}}_\phi, t) = \vec{0} \quad \forall\, i = 1, \dots, N$$

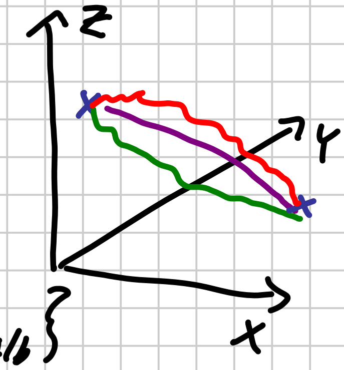
Zusammenfassend haben wir also gezeigt, dass die in der Lagrange-Gleichung enthaltene Dynamik generell aus einem Variationsprinzip abgeleitet werden kann. // 27.10.00

Theorie II: Vorlesung 4

Notiztitel 27.10.2008

7.3.1 Einfache Beispiele aus der Variationsrechnung

a) kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten



Die Punkte (x_a, y_a, z_a) und (x_b, y_b, z_b) seien durch eine Kurve K verbunden, die durch die Variable x parametrisiert werden kann:

$$K = \{(x, y(x), z(x)); \; x_a \leq x \leq x_b \, ; \; y(x_{a/b}) = y_{a/b} ; \; z(x_{a/b}) = z_{a/b}\}$$

Gesucht: Kurve K mit minimaler Bogenlänge S

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

$$\Rightarrow S = \int_{x_a}^{x_b} ds = \int_{x_a}^{x_b} dx \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2}$$

Jetzt Wechsel der Notation: $(x, y, z) \to (t, x_1, x_2) \equiv (t, \vec{x})$

$$\rightsquigarrow \; S = S[\vec{x}(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt \; L(\dot{\vec{x}}(t)); \qquad L(\dot{\vec{x}}) = \sqrt{1 + (\dot{\vec{x}})^2}$$

Wirkungsfunktional für Dynamik eines Teilchens im zweidimensionalen $\vec{x}$-Raum. Lagrange-Gleichung für Extremum der Wirkung:

$$\vec{0} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 + (\dot{\vec{x}})^2}}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1+|\dot{\vec{x}}|^2}}$ ist konstant (Erhaltungsgröße) $\Rightarrow$ „Geschwindigkeit" $\dot{\vec{x}}$ ist konstant.

$$\Leftrightarrow \; (t, \vec{x}(t)) = (t_a, \vec{x}_a) + (1, \dot{\vec{x}}_a)(t - t_a) \; ; \; \dot{\vec{x}}_a = \frac{\vec{x}_b - \vec{x}_a}{t_b - t_a}$$

In der ursprünglichen Formulierung entspricht diese Lösung einer Gerade im dreidimensionalen Raum.

b) Brachistochrone

Wir betrachten nun ein Teilchen, welches sich im Schwerefeld $\vec{g} = -g\hat{e}_z$ reibungsfrei auf einer vorgegebenen Bahn bewegen kann (z.B. gleitend auf einer Schiene).

Gesucht: schnellste (nicht kürzeste) Bahn zum Punkt (x_b, y_b, z_b), wenn das Teilchen für $t=0$ im (höhergelegenen) Punkt (x_a, y_a, z_a) ruht.

Lösung: o.B.d.A. $(x_a, y_a, z_a) = \vec{0}$; $y_b = 0$

Symmetrie $\Rightarrow$ $y = 0$ für gesamte Bahn

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E$

$$\Rightarrow \quad v \equiv v(z) \overset{\text{n.V.}}{=} \sqrt{2g(z_a - z)} \overset{\text{n.V.}}{=} \sqrt{-2gz}$$

$$T = \int_{t_a}^{t_b} dt = \int_0^{s_b} \frac{ds}{v} = \int_0^{x_b} \sqrt{\frac{1 + (dz/dx)^2}{-2gz}}$$

Wechsel der Notation: $(T, x, x_b, z) \to (S, t, T, x)$

Damit ist die zu minimierende Größe

$$S[x] = \int_0^T dt \; L(x, \dot{x}); \qquad L(x, \dot{x}) = \sqrt{\frac{1 + \dot{x}^2}{-2gx}}$$

(mit Randbedingungen $x(0) = 0$; $x(T) = x_b \leq 0$)

Lagrange-Gleichung: $0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x}$

Integrations-Konstante

Aufg. 6

$$\leadsto \quad \frac{d}{dt}\left[x(1 + \dot{x}^2)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(1 + \dot{x}^2) = -\frac{1}{2}\ell$$

Die Lösung hat die Form einer Zykloide, parametrisiert durch Winkelvariable φ:

$$t - t_0 = \frac{1}{4}\ell\,[\varphi - \sin(\varphi)]; \qquad x = -\frac{1}{4}\ell\,[1 - \cos(\varphi)]$$

7.4 Invarianzen der Lagrange-Gleichung

7.4.1 Addition einer vollständigen Zeitableitung

Behauptung: Das Hinzufügen einer totalen Zeitableitung einer beliebigen Funktion $\lambda(\{\vec{x}_i\}, t)$ der Koordinaten und der Zeit (nicht der Geschwindigkeiten!) zur Lagrange-Funktion ändert die Dynamik nicht.

$$L \to L' = L + \underline{\frac{d}{dt}\lambda(\{\vec{x}_i\}, t)} = L + \underline{\sum_j \dot{\vec{x}}_j \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial\vec{x}_j}(\vec{x}, t) + \frac{\partial\lambda}{\partial t}(\vec{x}, t)}$$

Beweis 1: λ liefert keinen Zusatzterm zur L-Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\vec{x}}_i}\frac{d\lambda}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial\vec{x}_i}\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\lambda}{\partial\vec{x}_i} - \frac{\partial}{\partial\vec{x}_i}\frac{d\lambda}{dt} = 0$$

Beweis 2: λ liefert nur konstanten Zusatzterm zur Wirkung:

$$S'^{(\vec{x}_2, t_2)}_{(\vec{x}_1, t_1)}[\vec{x}] = S^{(\vec{x}_2, t_2)}_{(\vec{x}_1, t_1)}[\vec{x}] + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt}\lambda(\vec{x}(t), t)$$

$$= S^{(\vec{x}_2, t_2)}_{(\vec{x}_1, t_1)}[\vec{x}] + \underbrace{\lambda(\vec{x}_2, t_2) - \lambda(\vec{x}_1, t_1)}_{\text{kein Beitrag zu } \delta S, \text{ da Randpunkte fest}}$$

29.10.08
(nur 1 Stunde)

Theorie II: Vorlesung 5

Notiztitel 29.10.2008

7.4.2 Galilei-Invarianz

[Galilei-Trafo: $\vec{x}'(\vec{x},t) = \sigma R(\vec{\alpha})^{-1}\vec{x} - \vec{v}_\alpha t - \vec{\xi}$; $t'(\vec{x},t) = t - \tau$]

a) Wir betrachten zunächst abgeschlossene Systeme.

Die potentielle Energie ist invariant unter Galilei-Trafos (bei 3. Newtonschem Gesetz): $V(\vec{X}') = V(\vec{X})$

Die Kinetische Energie ändert sich um eine totale Zeitableitung (Aufg. 10): $T' = T + \frac{d}{dt}\lambda(\vec{x},t)$

$\rightsquigarrow L' = L + \frac{d}{dt}\lambda(\vec{x},t) \overset{7.4.1}{\rightsquigarrow}$ Lagrange-Gleichung invariant.

b) Jetzt Teilsysteme: Notwendig für die Invarianz der Bewegungsgleichung $m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i$ ist das Mittransformieren der äußeren Kräfte: $\vec{F}_i' = \sigma R(\vec{\alpha})^{-1}\vec{F}_i$ (*) Trafo als echter Vektor

(i) Wirbelfreie Kräfte: hier folgt * aus einem invarianten Potential:

$$(V_{ex}^{wf})'(\vec{x}',t') = V_{ex}^{wf}(\vec{X},t)$$

$$= V_{ex}^{wf}(\{\sigma R(\vec{\alpha})\vec{x}_i' + \vec{v}_\alpha(t'+\tau) + \vec{\xi}_\alpha\}, t'+\tau)$$

$$\Rightarrow F_{i\gamma}' = -\frac{\partial}{\partial x_{i\gamma}'}(V_{ex}^{wf})' = -\frac{\partial}{\partial x_{i\gamma}'} V_{ex}^{wf} \overset{\Delta}{=} -\frac{\partial x_{i\beta}}{\partial x_{i\gamma}'}\frac{\partial V_{ex}^{wf}}{\partial x_{i\beta}}$$

$$= \sigma R(\vec{\alpha})_{\beta\gamma} F_{i\beta} \Rightarrow \vec{F}_i' = \sigma R(\vec{\alpha})^{-1}\vec{F}_i$$

Δ Summenkonvention!

Aus der Invarianz des Potentials folgt wie in 7.4.1 die Invarianz der Lagrange-Gleichung.

(ii) Elektromagnetische Kräfte:
Für die elektromagnetischen Potentiale gilt:

$$A'(\vec{x}',t') = \sigma R(\vec{\alpha})^{-1} \vec{A}(\vec{x},t)$$

$$\phi'(\vec{x}',t') = \phi(\vec{x},t) - \vec{v}_\alpha \cdot \vec{A}(\vec{x},t)$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{aligned} \vec{E}'(\vec{x}',t') &= \sigma R(\vec{\alpha})^{-1}[\vec{E}(\vec{x},t) + \vec{v}_\alpha \times \vec{B}(\vec{x},t)] \\ \vec{B}'(\vec{x}',t') &= R(\alpha)^{-1} \vec{B}(\vec{x},t) \end{aligned} \right]$$ vgl. 5.5

Damit folgt für das Lorentz-Potential:

$$V'_{Lor}(\vec{x}',\dot{\vec{x}}',t') = \sum_i q_i [\phi'_i(\vec{x}_i',t) - \dot{\vec{x}}_i' \cdot \vec{A}'(\vec{x}_i',t)] = V_{Lor}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)$$

weil

$$\phi' - \dot{\vec{x}}' \cdot \vec{A}' = \phi - \vec{v}_\alpha \cdot \vec{A} - [\sigma R(\alpha)^{-1}(\dot{\vec{x}} - \vec{v}_\alpha)][\sigma R(\alpha)^{-1}\vec{A}]$$

$$= \phi - \vec{v}_\alpha \cdot \vec{A} - (\dot{\vec{x}} - \vec{v}_\alpha) \cdot \vec{A} = \phi - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}$$

Das Potential ist also wieder invariant $\rightsquigarrow L' = L + \frac{d}{dt}\lambda(\vec{x},t)$
$\rightsquigarrow$ Invarianz der Lagrange-Gleichung.

7.4.3 Eichinvarianz

Auch Eichtransformationen der elm Felder ändern die Lagrange-Funktion nur um eine totale Zeitableitung

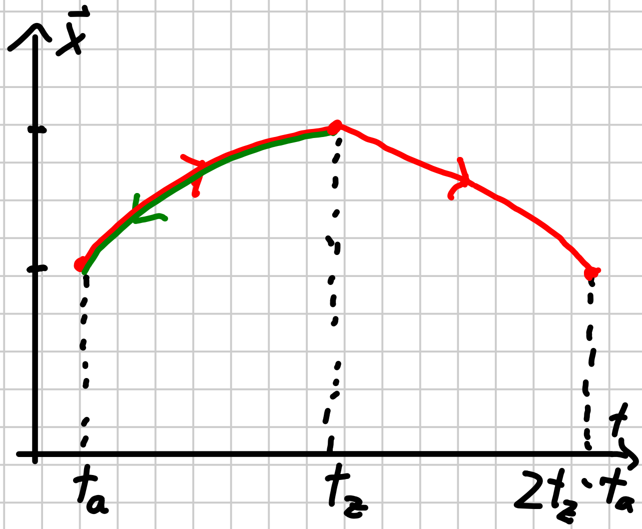
$$L' = L + \frac{d}{dt}\lambda(\vec{x},t)$$ (siehe Aufgabe 10)

7.4.4 Invarianz unter „Zeitumkehr"

Zeitumkehr: • instantanes Umkehren aller Geschwindigkeiten

Frage: wird vorherige Bahn rückwärts durchlaufen (wie rückwärts abgespielter Film)?

Beispiel: Teilchen startet zur Zeit t_a am Ort $\vec{x}_a$ mit Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}_a$ und erreicht Ort $\vec{x}_z$ zur Zeit t_z



Zeitumkehr zur Zeit t_z

$$\vec{x}\,'(t') = \vec{x}(2t_z - t') \quad \text{für } t' > t_z$$

$\leadsto$ Teilchen erreicht $\vec{x}_a$ wieder zur Zeit $2t_z - t_a$ mit Geschwindigkeit $-\dot{\vec{x}}_a$ (falls Zeitumkehrinvarianz)

N-Teilchen-System: $\vec{x}_i\,'(t') = \vec{x}_i(\underbrace{2t_z - t'}_{t})$ für $t' > 2t_z$

Beachte: $t = 2t_z - t' \Rightarrow \frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt}\frac{dt}{dt'} = -\frac{d}{dt}$; $\frac{d^2}{(dt')^2} = \frac{d^2}{dt^2}$

Skript-Variante:

Invarianz unter Zeitumkehr bedeutet:

$$\vec{F}_i\,'(\vec{x}\,', \dot{\vec{x}}\,', t') = m_i \frac{d^2 \vec{x}_i\,'}{(dt')^2}(t') \stackrel{!}{=} m_i \frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2}(2t_z - t')$$

$$= \vec{F}_i(\vec{x}(2t_z - t'), \dot{\vec{x}}(2t_z - t'), 2t_z - t')$$

$$\stackrel{!}{=} \vec{F}_i\,'(\vec{x}\,', -\dot{\vec{x}}\,', 2t_z - t')$$

$\frac{d\vec{x}\,'}{dt'}$; $d\vec{x}/dt$

In ungestrichener Notation:

$$\vec{F}_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \vec{F}_i(\vec{x}, -\dot{\vec{x}}, 2t_z - t)$$

bzw. $$V(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = V(\vec{x}, -\dot{\vec{x}}, 2t_z - t)$$

Also: $$\vec{x}_i'(t') = \vec{x}_i(2t_z - t')$$
$$\dot{\vec{x}}_i'(t') = -\dot{\vec{x}}_i(2t_z - t')$$
$$\vec{F}_i' = m_i \ddot{\vec{x}}_i'(t') = m_i \ddot{\vec{x}}_i(2t_z - t') = \vec{F}_i$$

Ab jetzt: Striche weglassen, Größen werden durch Zeitargument unterschieden ($< t_z$ oder $> t_z$)

$\leadsto$ Bedingung für Zeitumkehrinvarianz der Newton-Bewegungsgleichungen bzgl. t_z ist eine spezielle Symmetrie der Kräfte:
$$\vec{F}_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \vec{F}_i(\vec{x}, -\dot{\vec{x}}, 2t_z - t) \quad (*)$$
bzw. der Potentiale $V(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = V(\vec{x}, -\dot{\vec{x}}, 2t_z - t)$ $(**)$

Bemerkung: $** \Rightarrow *$ wegen $\vec{F}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{x}}_i} - \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i}$; im ersten Term heben sich 2 Vorzeichenwechsel auf.

Im Lagrange-Formalismus ist $**$ (wegen Invarianz von T unter Zeitumkehr) gleichbedeutend mit
$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = L(\vec{x}, -\dot{\vec{x}}, 2t_z - t)$$

Diese Bedingung lässt die Wirkung für äquivalente Zeiträume invariant:
$$S' = \int_{t_z}^{2t_z - t_a} dt'\, L(\vec{x}'(t'), \dot{\vec{x}}'(t'), t')$$
$$= \int_{t_z}^{2t_z - t_a} dt'\, L(\vec{x}(2t_z - t'), -\dot{\vec{x}}(2t_z - t'), t')$$

$$= \int_{t_2}^{t_a} (-dt) \; L(\vec{X}(t), -\dot{\vec{X}}(t), 2t_2 - t)$$

wechsel der Integrationsvariable

$$\overset{**}{=} \int_{t_a}^{t_2} dt \; L(\vec{X}(t), \dot{\vec{X}}(t), t) \quad = S$$

Wir haben also wieder die Äquivalenz von Newton- und Lagrange-Formalismus demonstriert.

Frage: Welche Systeme erfüllen ** ?

(i) abgeschlossene Systeme mit 3. Newton: $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{X})$ ✓

(ii) wirbelfreie äußere Kräfte: nur, falls

$$V_{ex}^{wf}(\vec{X}, t) = V_{ex}^{wf}(\vec{X}, 2t_2 - t)$$

z.B. Umklappen aller Geschwindigkeiten der ww. Teilchen in der Außenwelt

(iii) Lorentz-Kräfte: nur, falls

$$\vec{E}(\vec{x}, 2t_2 - t) = \vec{E}(\vec{x}, t); \quad \vec{B}(\vec{x}, 2t_2 - t) = -\vec{B}(\vec{x}, t)$$

Vorzeichenwechsel!

bzw. $\phi(\vec{x}, 2t_2 - t) = \phi(\vec{x}, t)$; $\vec{A}(\vec{x}, 2t_2 - t) = -\vec{A}(\vec{x}, t)$

physikalisch: Vorzeichenwechsel aller externen Geschwindigkeiten bzw. Ströme.

Strengere Invarianz: Zeitumkehr zu jedem Zeitpunkt

$\Longleftrightarrow$ $V_{ex}^{wf} = V_{ex}^{wf}(\vec{X})$; $\phi = \phi(\vec{x})$; $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x})$ statisch,

$\vec{A} \equiv \vec{B} \equiv 0$ kein Magnetfeld.

Theorie II: Vorlesung 6

Notiztitel 02.11.2008

7.5 Zwangsbedingungen

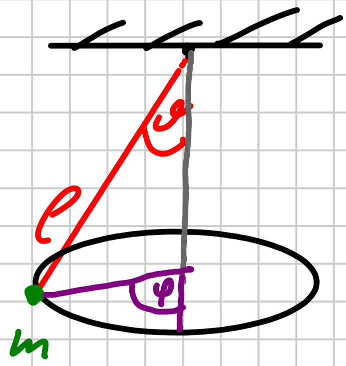
Bisher: Behandlung von N-Teilchen-Systemen mit $3N$ unabhängig voneinander variierbaren Ortskordinaten $\vec{X}$, d.h. mit $3N$ Freiheitsgraden.

Aber: Die Anzahl f der Freiheitsgrade eines Systems kann (sehr viel) kleiner als $3N$ sein

Beispiel: sphärisches Pendel

$$|\vec{x}|^2 - \ell^2 = 0 \quad (\text{Aufhängepunkt } \vec{0})$$

$f=2$; frei variierbare Koordinaten: ϑ, φ



Allgemeine holonome („ganz-gesetzlich") Zwangsbedingungen an kartesische Koordinaten:

$$f_m(\vec{X},t) = f_m(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N, t) = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, z)$$

Unterscheidung: rheonom $\longleftrightarrow$ skleronom

rheonom	skleronom
„fließ-gesetzlich"	starr-gesetzlich
explizit zeitabhängig	zeitunabhängig
~ Rhein	~ Skelett

Annahme / Konvention: jede der z Zwangsbedingungen eliminiert einen Freiheitsgrad: $f = 3N - z$

(d.h. weder überflüssige noch zusammengefasste Zwangsbedingungen wie $f(\vec{X},t) = \sum_{m=1}^{z} [f_m(\vec{X},t)]^2 = 0$).

~~02.11.08~~ 03.11.08

Bei Z solchen (holonomen) Zwangsbedingungen kann jede mögliche (d.h. mit diesen verträgliche) Konfiguration $\vec{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$ des Systems mit Hilfe von $f = 3N - Z$ verallgemeinerten Koordinaten $(q_1, q_2, \dots, q_f) \equiv \vec{q}$ beschrieben werden: $\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t) = \vec{x}_i(\vec{q}, t)$ $(i = 1, \dots, N)$

Einige weitere Begriffe:

Konfigurationsraum Q: Menge aller verfügbaren $\vec{q}$-Werte

Bewegungsmannigfaltigkeit: Menge der verfügbaren $\vec{X}$-Werte $\{\vec{X}(\vec{q}, t) \mid \vec{q} \in Q\}$; f-dimensional; im Allgemeinen zeitabhängig!

Beispiele:

a) sphärisches Pendel (um Ursprung): $f(\vec{x}, t) = |\vec{x}|^2 - \ell^2 = 0$

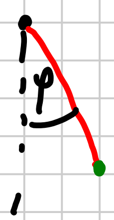
$$\vec{q} \equiv (\vartheta, \varphi); \quad Q = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

$$\vec{x}(\vec{q}) = \ell(\sin\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, -\cos\vartheta)$$

Wegen $\vec{x}(\vartheta, \varphi) = \vec{x}(\vartheta, \varphi + 2\pi)$ kann der Konfigurationsraum auf $Q = [0, \pi] \times \mathbb{R}$ ausgedehnt werden $\rightsquigarrow$ stetiges $\varphi(t)$ für Kreiselbewegung

b) mathematisches Pendel (um Ursprung in x_2-Ebene)

$$f_1(x, t) = |\vec{x}|^2 - \ell^2 = 0; \quad f_2(\vec{x}, t) = x_2 = 0$$



$\vec{q} = \varphi$; $\quad Q = [0, 2\pi]$ bzw. (fortgesetzt) $Q = \mathbb{R}$

$\vec{x}(\vec{q}) = (\sin\varphi, 0, \cos\varphi)$

Bewegungsmannigfaltigkeit: Kreisrand

c) Hantelmolekül: 2 Atome (Massen m_1 und m_2)

mit festen Abstand ℓ; Modell für Gase wie O_2, N_2, CO

$$f(\vec{x}, t) = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 - \ell^2 = 0$$

$$f = 6 - 1 = 5 \quad \text{Freiheitsgrade}$$

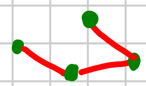
Verallgemeinerte Koordinaten: z.B. Schwerpunkt + Richtung

$$q = (\vec{x}_s, \vartheta, \varphi)$$

d) Lineares Polymer: Kette von Atomen mit festen Abständen

$$f_m(\vec{x}, t) \equiv |\vec{x}_{m+1} - \vec{x}_m|^2 - \ell_m^2 = 0 \quad (m = 1, \dots, N-1)$$

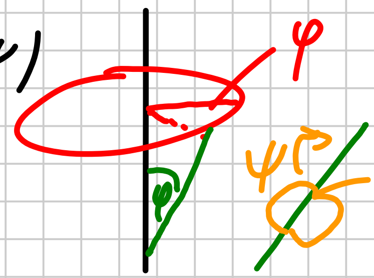
$$f = 3N - (N-1) = 2N+1$$



verallg. Koordinaten: z.B. Schwerpunkt + 2 Winkel pro Bond

e) Starrer Körper $f = 6$; $\vec{q} = (\vec{x}_s, \vartheta, \varphi, \psi)$

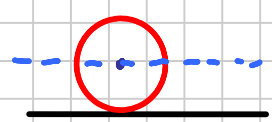
$\rightsquigarrow$ i.A. $3N - 6$ Zwangsbedingungen



f) Bewegung einer Kugel (Radius R) über ideal glatte Ebene

($x_3 = 0$): $$f(\vec{x}_m, t) \equiv \hat{e}_3 \cdot \vec{x}_m - R = 0$$

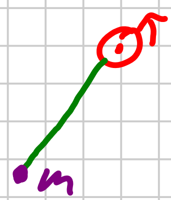
$$f = 5; \quad \vec{q} = (x_{m1}, x_{m2}, \vartheta, \varphi, \psi)$$



e) Mathematisches Pendel mit angetriebenen Aufhängungspunkt

$$f_1(\vec{x}, t) \equiv |\vec{x} - \vec{a}(t)|^2 - \ell^2 = 0; \quad f_2(\vec{x}, t) \equiv x_2 = 0$$

z.B. $a(t) = (\cos(\omega t), 0, \sin(\omega t))$

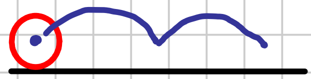


rheonome (holonome) Zwangsbedingung (vorher skleronom)!

Nicht-holonome Zwangsbedingungen:

(i) Ungleichung einer Funktion der Koordinaten und Zeit:

$$f(\vec{x}, t) \geq 0$$

Beispiel: Kugel, die auf glatter Ebene hüpft: 

$$f(\vec{x}_m, t) = x_3 - R \geq 0$$

(ii) Bedingung an Koordinaten, Geschwindigkeiten und ggf. Zeit, die nicht in der Form $f(\vec{x}, t) = 0$ (*) geschrieben werden kann.

Zwar gilt * $\Rightarrow$ $\quad df = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_i} \cdot d\vec{x}_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$

bzw. $\quad \frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \dot{\vec{x}}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$

aber es können umgekehrt differenzielle Bedingungen

$$d\vec{\phi} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\varphi}_i(\vec{x}, t) \cdot d\vec{x}_i + \varphi_0(\vec{x}, t)\, dt = 0$$

bzw. $\quad \dot{\vec{\phi}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\varphi}_i(\vec{x}, t) \cdot \dot{\vec{x}}_i + \varphi_0(\vec{x}, t) = 0$

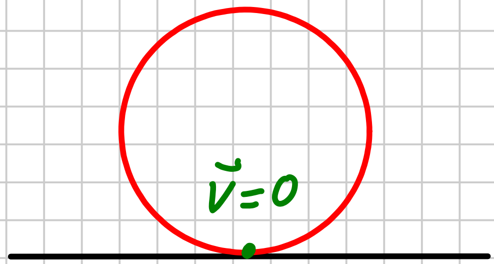
nur dann in der Form * geschrieben werden, falls das Differential $d\vec{\phi}$ exakt ist, d.h.

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \; ; \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \qquad \forall \; i, j = 1, \dots, N,$$

oder falls es integrabel ist, d.h. falls ein integrierender Faktor $\gamma(\vec{x}, t)$ existiert mit $\gamma(\vec{x}, t)\, d\vec{\phi}$ exakt.

Beispiel: Kugel mit Radius R, die auf ideal rauher Ebene reibungsfrei **rollt** (nicht gleitet):

Hier ist die Geschwindigkeit des Kontaktpunkts zu jeder Zeit gleich 0.



⇝ nicht-integrable Beziehungen zwischen (Winkel)geschwindigkeiten ⇝ nicht-holonom.

7.6 Verallgemeinerte Koordinaten

Ab jetzt: N-Teilchen-Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen, beschrieben durch $f = 3N - Z$ verallgemeinerte Koordinaten $\{q_k\} = \vec{q}$

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_f, t) = \vec{x}_i(\vec{q}, t) \qquad (i = 1, 2, \dots, N) \qquad (\Delta)$$

Def: verallgemeinerte Geschwindigkeit $\dot{\vec{q}} = \frac{d}{dt}\vec{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$

Forderung: sowohl Q als auch $\{\vec{x}(\vec{q},t) \mid \vec{q} \in Q\}$ sollen f-dimensional sein ⇝ Δ muss nicht-singulär sein, d.h. die f Tangentialvektoren $\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k}(\vec{q},t)$ müssen linear unabhängig sein.

Aus Δ folgt:
$$d\vec{x}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}(\vec{q},t)\, dq_k + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}(\vec{q},t)\, dt$$

bzw.
$$\dot{\vec{x}}_i = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}(\vec{q},t)\, \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}(\vec{q},t) \qquad (\Delta\Delta)$$

⇝ Alle Größen, die als Funktionen der kartesischen Koordinaten und Geschwindigkeiten bekannt sind, können durch verallgemeinerte Variablen $\vec{q}, \dot{\vec{q}}$ ausgedrückt werden.

Konvention: Index „K" für kartesische Koordinaten.

Wichtige Anwendung: kinetische Energie

$$T_K(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{x}}_i|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left| \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}(\vec{q},t)\, \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}(\vec{q},t) \right|^2 \equiv T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$$

Klar: $T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ ist quadratisch als Funktion der verallg. Geschwindigkeiten $\dot{q}_k$:

$$T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = \frac{1}{2} \sum_{k\ell} a_{k\ell}\, \dot{q}_k\, \dot{q}_\ell + \sum_k a_k\, \dot{q}_k + a_0 \quad (\square)$$

mit
$$a_{k\ell}(\vec{q},t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}(\vec{q},t) \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\ell}(\vec{q},t)$$

$$a_k(\vec{q},t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}(\vec{q},t) \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}(\vec{q},t)$$

$$a_0(\vec{q},t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}(\vec{q},t) \right]^2$$

Nur im Fall von zeitunabhängigen Koordinatenabbildungen d.h. für $\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}(\vec{q},t) = 0 \ \forall i$ (nur möglich für skleronome Zwangsbedingungen) ist $T(q,\dot{\vec{q}},t)$ homogen quadratisch als Funktion der $\{\dot{q}_k\}$, d.h. $a_k = a_0 = 0$.

Wichtig (für Hamilton-Theorie, Kap. 8): $T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ ist strikt konvex als Funktion der Geschwindigkeiten, d.h. die Matrix $A \equiv (a_{k\ell}) = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_\ell}$ ist positiv definit:

(vgl. 3.5.1)

$\vec{u}^T A \vec{u} > 0$ für jeden Vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_f) \neq \vec{0}$

Beweis: mit $\vec{y}_i \equiv \sqrt{m_i}\,\vec{x}_i$ und $\vec{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ gilt

$$\vec{u}^T A \vec{u} = \sum_{k,l} u_k a_{kl} u_l = \sum_{k,l} u_k \frac{\partial \vec{Y}}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{Y}}{\partial q_l} u_l = \Big| \underbrace{\frac{\partial \vec{Y}}{\partial \vec{q}} \vec{u}}_{\neq 0 \text{ n.V.}} \Big|^2 > 0$$

Im letzten Schritt geht ein, dass die Tangentialvektoren $\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k}$ und somit auch die f Vektoren $\frac{\partial \vec{Y}}{\partial q_k}$ linear unabhängig sind.

5.11.08

Beachte: die Argumente der kinetischen Energie $T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ sind als unabhängig anzusehen. Damit folgt z.B. aus $\Delta\Delta$:

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}(\vec{q}, t) = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}(\vec{q}, t)$$

Theorie II: Vorlesung 7

Notiztitel 09.11.2008

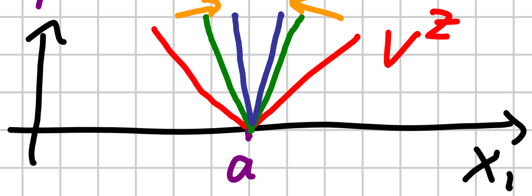
7.6.1 Die Bewegungsgleichung in verallgemeinerten Koordinaten

Newton'sche Bewegungsgleichungen (bei Zwangsbedingungen):

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^K(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + \vec{F}_i^z \qquad (7.23)$$

Gesamtkraft $\vec{F}_i$ laut deterministischem Prinzip Funktion von $\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t$.
aber: (i) unbekannt (zunächst)
(ii) singulär/unbestimmt wegen Zwangsbedingungen

Bsp: $f(\vec{x}) \equiv x_1 = a$



Daher Aufteilung:

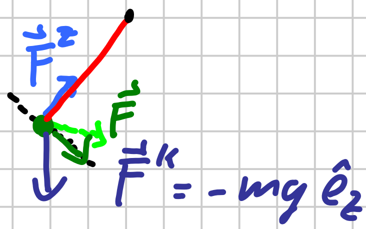
$\vec{F}_i^K(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ mikroskopisch behandelte Kräfte (z.B. elm., Gravitation etc.), die explizit als Funktionen von kart. Koordinaten, Geschwindigkeiten und Zeit bekannt sind (und ohne Zwangsbed. die Dynamik bestimmen würden).

Zwangskräfte $\vec{F}_i^z$ sorgen für Einhaltung der Zwangsbedingungen (z.B. durch Wände, Stäbe etc. übermittelt).

Beispiel: sphärisches/mathematisches Pendel

$\vec{F}^K = -mg\,\hat{e}_z$ trivial

$|\vec{F}^z|$ zunächst unbekannt (hängt von Dynamik ab); klar: $\vec{F}_z \parallel -\vec{x}$



Behandlung in f verallgemeinerten Koordinaten entspricht einer Projektion auf (f-dimensionale) Tangentialebenen:

Betrachte Punkt $\vec{X}_\phi(t) = \vec{X}(\vec{q}_\phi(t),t)$ sowie beliebige ~~infinitesimale~~ Vektoren $\delta\vec{q} \equiv (\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_f) \in \mathbb{R}^f$

Der Vektor $\delta\vec{X} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \vec{X}}{\partial q_k}(\vec{q}_\phi(t),t)\,\delta\vec{q}$ stellt geometrisch einen Tangentialvektor an die Bewegungsmannigfaltigkeit im Punkt $\vec{X}_\phi(t)$ zur Zeit t dar.

$\leadsto$ Die Menge aller Vektoren X der Form

$$\vec{X} = \vec{X}_\phi(t) + \delta\vec{X} = \vec{X}_\phi(t) + \left(\frac{\partial\vec{X}}{\partial\vec{q}}\right)_\phi \delta\vec{q} \quad (\delta\vec{q} \in \mathbb{R}^f)$$

bildet die entsprechende Tangentialebene.

Notation: $\delta\vec{X} \equiv (\delta\vec{x}_1, \delta\vec{x}_2, \dots, \delta\vec{x}_N)$ „virtuelle Verrückung"

Offensichtlich folgt aus (7.23) für beliebige $\delta\vec{X}$:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{x}_i \equiv \underset{\uparrow}{\delta W} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{x}}_{\phi i} \cdot \delta\vec{x}_i$$

„virtuelle Arbeit"

Forme nun beide Ausdrücke mithilfe verallg. Koordinaten um:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{x}}_{\phi i} \cdot \left[\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}(\vec{q}_\phi(t),t)\,\delta q_k\right]$$

$$= \sum_{i,k} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\right]_\phi \delta q_k$$

↖ Punkt fehlte in Vorlesung

$$\overset{*}{=} \sum_k \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2\right)\right]_\phi \delta q_k$$

$$= \sum_k \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right]_\phi \delta q_k$$

In * wurde die Vertauschbarkeit der Ableitungen benutzt: $\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec x_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q_k}\vec x_i = \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{d}{dt}\vec x_i = \frac{\partial}{\partial q_k}\dot{\vec x}_i$

in Vorlesung verhunzt, korrekt!

Jetzt linke Seite der Bewegungsgleichung:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec F_{\phi i} \left[\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \vec x_i}{\partial q_k}(\vec q_\phi(t),t)\, \delta q_k \right] \equiv \sum_{k=1}^{f} F_{\phi k}\, \delta q_k$$

mit verallgemeinerten Kräften

$$F_k(\vec q, \dot{\vec q}, t) \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec F_i \frac{\partial \vec x_i}{\partial q_k}, \quad F_{\phi k} = F_k(q_\phi, \dot q_\phi, t)$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\sum_k \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - F_k \right]_\phi \delta q_k = 0$$

Diese Gleichung kann nur dann für beliebige Tangentialvektoren $\delta \vec X$ bzw. Variationen $\delta \vec q$ gelten, falls die Klammer verschwindet:

$$\boxed{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - F_k \right]_\phi = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, f)} \quad (7.29)$$

Lagrange-Bewegungsgleichung in verallgemeinerten Koordinaten

Problem: F_k unbekannt $\rightsquigarrow$ Vereinfachung nötig!

7.6.2 Verallgemeinerte Kräfte

Die verallgemeinerten Kräfte $\mathcal{F}_k$ enthalten neben den mikroskopischen Kräften $\vec{F}_i^K$ zunächst unbekannte Zwangskräfte:

$$\mathcal{F}_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^K \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^Z \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}}_{=0}$$

Achtung: zentrales Postulat der analytischen Mechanik: alle Zwangskräfte stehen senkrecht auf Bewegungsmannigfaltigkeit und Tangentialebene (in Abwesenheit von Reibungskräften):

$$\mathcal{F}_k^Z = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^Z \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = 0 \quad (i=1,\dots,f)$$

Die Zwangskräfte tragen also nicht zur virtuellen Arbeit δW bei.

Beispiel: Pendel mit masselosem Faden/Stab
Ansonsten: ⚡ Drehimpulserhaltung (für Faden/Stab)

Letztlich Definitionssache: minimalistische Zwangskräfte, die nichts anderes tun, als die Bedingungen $f_k = 0$ zu erzwingen.

Damit hängt die Bewegungsgleichung

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - \mathcal{F}_k\right]_\phi = 0; \quad \mathcal{F}_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^K \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$$

nicht mehr von den Zwangskräften ab, d.h. ist vollständig bestimmt!

Bemerkung 1: Formalismus ist weitgehend unabhängig von der Wahl der verallg. Koordinaten: gleiche Struktur der Bewegungsgleichung.

Die explizite Form ändert sich jedoch bei einer (nichtsingulären) Punkttransformation $\vec{q} \to \vec{\bar{q}}$ mit

$$\bar{q}_k \equiv \bar{q}_k(\vec{q},t) \quad \text{bzw.} \quad \vec{\bar{q}} = \vec{\bar{q}}(\vec{q},t):$$

$$(T, F_k) \to (\bar{T}, \bar{F}_k)$$

Bemerkung 2: Bei rheonomen Zwangsbedingungen können die Zwangskräfte durchaus reale Arbeit leisten:

$$\frac{dW^z}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^z \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^z \left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^z \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} (\vec{q}_\phi(t), t)$$

am 10.11.08 nur mündlich

Jetzt weitere Umformung für verschiedene Fälle:

a) Geschwindigkeitsunabhängige Kräfte (aus Potential)

$$\vec{F}_i^K = -(\vec{\nabla}_i V^K)(\vec{x},t)$$

Hierfür lautet die verallgemeinerte Kraft:

$$F_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^K \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V^K}{\partial \vec{x}_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}(\vec{q},t), \tag{7.33}$$

wobei das Potential $V(\vec{q},t)$ durch

$V(\vec{q},t) \equiv V^K(\vec{x}(q,t),t)$ definiert ist.

Definieren wir nun die Lagrange-Funktion (wie üblich) als

$$L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) - V(\vec{q},\dot{\vec{q}},t),$$

so folgt aus (7.29) und (7.33):

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_k}$$

$$\boxed{0 = \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right]_p \qquad (k = 1,\dots,f)} \qquad (7.35)$$

Lagrange-Gleichung 2. Art

Gleiche Struktur wie für kartesische Koordinaten!

10.11.08

Bemerkung: $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ ist streng konvex als Funktion der verallgemeinerten Geschwindigkeit $\dot{\vec{q}}$: schon gezeigt für $T(q,\dot{\vec{q}},t)$; V ist $\dot{\vec{q}}$-unabhängig.

Theorie II: Vorlesung 8

Notiztitel 10.11.2008

Korrektur zu Vorlesung 7:

in Vorlesung: mehr zur totalen Ableitung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = \sum_\ell \frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial q_\ell \partial q_k}\dot{q}_\ell + \frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial t \partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_\ell \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\ell}\dot{q}_\ell + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{d}{dt}\vec{x}_i = \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_k}$$

(*) ist Korrekt!

aber $\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$ (◇) wurde auch gebraucht:

$$\delta W = \sum_{i,k} m_i \left[\ddot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\right]_\phi \delta q_k$$

mit
$$\ddot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\dot{\vec{x}}_i \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}}_{\overset{\diamond}{=}\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k}} - \dot{\vec{x}}_i \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}}_{\overset{*}{=}\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_k}}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}|\dot{\vec{x}}_i|^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}|\dot{\vec{x}}_i|^2\right)$$

Vorl. 7 $\rightsquigarrow$ $$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - F_k\right]_\phi = 0; \quad F_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^K \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$$

Bemerkung 1: Formalismus ist weitgehend unabhängig von der Wahl der verallg. Koordinaten: gleiche Struktur der Bewegungsgleichung.

Die explizite Form ändert sich jedoch bei einer (nichtsingulären) Punkttransformation $\vec{q} \to \bar{\vec{q}}$ mit

$\bar{q}_k = \bar{q}_k(\vec{q}, t)$: $\quad (T, F_k) \to (\bar{T}, \bar{F}_k)$

Bemerkung 2: Bei rheonomen Zwangsbedingungen können die Zwangskräfte durchaus reale Arbeit leisten:

$$\frac{dW^z}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^z \cdot \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^z \cdot \left(\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^z \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} (\vec{q}_\phi(t), t)$$

Jetzt Fortsetzung der Fallunterscheidung

b) Lorentz-Kräfte

Geladene Teilchen im elm. Feld: $\vec{F}_i^{Lor} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_{Lor}^K}{\partial \dot{\vec{x}}_i}\right) - \frac{\partial V_{Lor}^K}{\partial \vec{x}_i}$

mit $V_{Lor}^K(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) = \sum_{i=1}^{N} \hat{q}_i \left[\phi(\vec{x}_i, t) - \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{A}(\vec{x}_i, t) \right] \equiv V_{Lor}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$

↑ Ladung des i-ten Teilchens (umbenannt zur Unterscheidung von q_a)

Analog zum kartesischen Fall finden wir:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_{Lor}}{\partial \dot{q}_a}\right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial V_{Lor}^K}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \underbrace{\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_a}}_{= \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_a}} + \frac{\partial V_{Lor}^K}{\partial \vec{x}_i} \underbrace{\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \dot{q}_a}}_{=0} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial V_{Lor}^K}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \right) \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_a} + \underline{\frac{\partial V_{Lor}^K}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_a}} \right]$$

$$\frac{\partial V_{Lor}}{\partial q_a} = \sum_{i=1}^{N} \left[\underline{\frac{\partial V_{Lor}^K}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_a}} + \frac{\partial V_{Lor}^K}{\partial \vec{x}_i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_a} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_{Lor}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial V_{Lor}}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial V^K_{Lor}}{\partial \dot{\vec{x}}_i} - \frac{\partial V^K_{Lor}}{\partial \vec{x}_i}\right]\cdot\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{Lor}\cdot\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = \mathcal{F}_k^{Lor}$$

Wenn wir jetzt zusätzlich wirbelfreie Kräfte (Teil a) erlauben, gilt mit $V(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = V^{wf}(\vec{q},t) + V^{Lor}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$:

$$\mathcal{F}_k \equiv \mathcal{F}_k^{wf} + \mathcal{F}_k^{Lor} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$ und somit

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \qquad \left(L = T - V = T - V^{wf} - V^{Lor}\right).$$

Wir erhalten also wieder Lagrange-Gleichungen 2. Art.

Betrachte nun verallgemeinerte Potentiale:

$$V_{Lor}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = \sum_{i=1}^{N} \hat{q}_i\left[\phi^K(\vec{x}_i,t) - \left(\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}\right)\cdot\vec{A}^K(\vec{x}_i,t)\right]$$

$$\equiv \phi(\vec{q},t) - \sum_k \underline{\dot{q}_k}\, A_k(\vec{q},t)$$

mit $$\phi(\vec{q},t) = \sum_{i=1}^{N}\hat{q}_i\left[\phi^K(\vec{x}_i,t) - \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}\cdot\vec{A}^K(\vec{x}_i,t)\right]$$

$$A_k(\vec{q},t) = \sum_{i=1}^{N}\hat{q}_i\,\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}\cdot\vec{A}^K(\vec{x}_i,t)$$

Bemerkung: Da $V = V^{wf} + V^{Lor}$ nur linear von der Geschwindigkeit abhängt und die kinetische Energie strikt konvex als Funktion der Geschwindigkeiten ist, ist auch die Lagrange-Funktion L strikt konvex als Fkt. von $\dot{\vec{q}}$.

Eichinvarianz in kartesischen Koordinaten: die Eichtransformation $(\phi^K, \vec{A}^K) \to (\tilde{\phi}^K, \tilde{\vec{A}}^K)$ mit

$$\tilde{\vec{A}}^K = \vec{A}^K - \frac{1}{c}\vec{\nabla}\Lambda^K; \quad \tilde{\phi}^K = \phi^K + \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda^K}{\partial t}$$

ändert die Lagrange-Funktion nur um totale Zeitableitung: $\tilde{L}_K = L_K - \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\frac{\hat{q}_i}{c}\Lambda^K(\vec{x}_i,t)$ und lässt somit die Lagrange-Gleichung invariant.

Mit $\Lambda(\vec{q},t) \equiv \sum_{i=1}^{N}\hat{q}_i\,\Lambda^K(\vec{x}_i,t)$ erhält man für die verallgemeinerten Potentiale

$$\tilde{A}_\ell(\vec{q},t) - A_\ell(\vec{q},t) = \sum_{i=1}^{N}\hat{q}_i\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_\ell}\cdot[\tilde{\vec{A}}^K(\vec{x}_i,t) - \vec{A}^K(\vec{x}_i,t)]$$

$$= -\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{N}\hat{q}_i\frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_\ell}\cdot\vec{\nabla}\Lambda^K(\vec{x}_i,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_\ell}(\vec{q},t)$$

$(\vec{q},t)$

$$\tilde{\phi} - \phi = \sum_{i=1}^{N}\hat{q}_i\left[\tilde{\phi}^K(\vec{x}_i,t) - \phi^K(\vec{x}_i,t) - \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial t}\cdot(\tilde{\vec{A}}^K(\vec{x}_i,t) - \vec{A}^K(\vec{x}_i,t))\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\hat{q}_i\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\Lambda^K}{\partial t}(\vec{x}_i,t) + \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial t}\cdot\vec{\nabla}\Lambda^K(\vec{x}_i,t)\right] \underset{\uparrow \text{ subtil}}{=} \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}(\vec{q},t)$$

$$\Rightarrow \tilde{L}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \sum_{\ell=1}^{f}\dot{q}_\ell\frac{\partial\Lambda}{\partial q_\ell}\right)$$

$$= L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) - \frac{1}{c}\frac{d\Lambda}{dt}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$$

Analog zum kartesischen Fall zeigt man, dass die Addition einer totalen Zeitableitung die Lagrange-Gleichung 2. Art invariant lässt.

c) Reibungskräfte

Wie im kartesischen Fall lässt sich mit der verallg. Dissipationsfunktion $\mathcal{F}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = \mathcal{F}^K(\dot{\vec{X}})$ die verallg. Reibungskraft

$$\mathcal{F}_{k,R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,R}^K \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial \mathcal{F}^K}{\partial \dot{\vec{x}}_i}\frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}$$

eine Erweiterung der Lagrange-Gleichung (2. Art) angeben:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}$$

Einige historische Begriffe

Das zentrale Postulat der Analytischen Mechanik $\mathcal{F}_k^Z = 0$ impliziert

$$0 = \sum_{k=1}^{f} \mathcal{F}_k^Z \, dq_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^Z \cdot \delta\vec{x}_i$$

und mit $m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^K - \vec{F}_i^Z$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\vec{x}}_i - \vec{F}_i^K) \cdot \delta\vec{x}_i = 0 \quad \forall \delta\vec{X}}$$

d'Alembertsches Prinzip

Das d'Alembert'sche Prinzip stellt quasi eine Einschränkung der Newton'schen Bewegungsgleichung (mit $\vec{F}_i = \vec{F}_i^K$) auf die Tangentialebene dar: bei Wegnahme der Zwangsbedingungen wären die $\delta\vec{x}_i$ unabhängig und beliebig, man erhielte $m_i \ddot{\vec{x}}_i - \vec{F}_i^K = 0 \;\; \forall i$ zurück.

Historisch diente es Lagrange als Startpunkt für die Herleitung der Lagrange-Gleichung.

Achtung: die virtuellen Verrückungen $\delta \vec{X} = (\delta\vec{x}_1, \delta\vec{x}_2, .., \delta\vec{x}_N)$ entsprechen i.A. weder tatsächlichen noch möglichen Teilchenbahnen; dies folgt schon daraus, dass die Betrachtung bei fester Zeit durchgeführt wird.

Folglich hat auch die virtuelle Arbeit δW i.A. keine reale Entsprechung.

// 12.11.08

Theorie II: Vorlesung 9

Notiztitel 16.11.2008

7.8 Das Hamilton'sche Prinzip in verallgemeinerten Koordinaten

Vorgehensweise analog zum kartesischen Fall (Kap. 7.3).

Die Wirkung wird auch für verallgemeinerte Koordinaten als Zeitintegral der Lagrange-Funktion definiert:

$$S_{(\vec{q}_1,t_1)}^{(\vec{q}_2,t_2)}[\vec{q}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L(\vec{q}(t),\dot{\vec{q}}(t),t)$$

Betrachte nun:

- die physikalische Bahn im Konfigurationsraum: $\vec{q}_\phi(t) = \{q_{\phi k}(t)\}$
- benachbarte Bahnen $\vec{q}(t) = \{q_k(t)\}$, die zur Anfangs- und Endzeit mit der phys. Bahn zusammenfallen:
$$\vec{q}(t_1) = \vec{q}_\phi(t_1) \equiv \vec{q}_1\,; \qquad \vec{q}(t_2) = \vec{q}_\phi(t_2) \equiv \vec{q}_2$$
- die Variationen $\delta\vec{q}(t) \equiv \vec{q}(t) - \vec{q}_\phi(t) = \varepsilon\,\vec{\kappa}(t)$

mit $\vec{\kappa}(t_1) = \vec{\kappa}(t_2) = \vec{0}\,;$ δS

Das Hamilton'sche Prinzip lautet:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\,\delta S_{(\vec{q}_1,t_1)}^{(\vec{q}_2,t_2)}[\vec{q}_\phi+\varepsilon\vec{\kappa}] = 0 \qquad (\forall\,\vec{\kappa} \text{ mit } \vec{\kappa}(t_1)=\vec{\kappa}(t_2)=\vec{0})$$

Die explizite Berechnung erfolgt wieder durch Taylor-Entw.:

$$\frac{1}{\varepsilon}\,\delta S = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2} dt\Big[L(\vec{q}_\phi(t)+\varepsilon\vec{\kappa}(t),\, \dot{\vec{q}}_\phi(t)+\varepsilon\dot{\vec{\kappa}}(t),t) - L(\vec{q}_\phi(t),\dot{\vec{q}}_\phi(t),t)\Big]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{q}}(\vec{q}_\phi(t), \dot{\vec{q}}_\phi(t), t) \cdot \vec{\kappa}(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}(\vec{q}_\phi(t), \dot{\vec{q}}_\phi(t), t) \cdot \dot{\vec{\kappa}}(t) \right]$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{q}}(\vec{q}_\phi(t), \dot{\vec{q}}_\phi(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}(\vec{q}_\phi(t), \dot{\vec{q}}_\phi(t), t) \right] \vec{\kappa}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Als Konsequenz des Hamilton'schen Prinzips erhalten wir also ($\kappa(t)$ für $t_1 < t < t_2$ beliebig) die Lagrange-Gleichungen 2. Art.

$$\vec{0} = \left[\frac{\delta S}{\delta \vec{q}(t)} \right]_\phi = \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right]_\phi$$

z.B. aus Eich-Trafo

Die Addition einer totalen Zeitableitung zur Lagrange-Fkt.

$$L \to L' = L + \frac{d}{dt} \lambda(\vec{q}, t)$$

ändert die Wirkung (bei festgehaltenen Endpunkten) wieder nur um eine Konstante (bezüglich der Variation der Bahnen)

$$S \to S' = S + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \lambda(\vec{q}(t), t) = S + \lambda(q_2, t_2) - \lambda(q_1, t_1)$$

und lässt folglich die Lagrange-Gleichungen invariant.

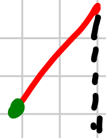
7.9 Die Lagrange-Gleichungen der ersten Art

Bisherige Strategie: Elimination aller Zwangsbedingungen durch Einführung verallgemeinerter Koordinaten
$\rightsquigarrow$ Lagrange-Gleichungen 2. Art.

Vorteil: einfache Struktur
Nachteil: keine Information über Zwangskräfte
(außerdem: $\vec{x} \to \vec{q}$ nichttrivial)

Zur Berechnung von Zwangskräften (z.B. Seilspannung):
Lagrange-Gleichung 1. Art (alternativer Zugang)

Beispiel: sphärisches Pendel



$L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}|^2 - mg\,\vec{x}\cdot\vec{e}_3$ Zwangsbedingung $f \equiv |\vec{x}| - \ell = 0$

verallg. Koordinaten $\vec{q} = (\vartheta, \varphi)$; $\vec{x} = \vec{x}(\vartheta, \varphi)$

Bewegungsgleichung: Lagrange-Gleichung 2. Art

Alternative: Bewegungsgleichung direkt in kart. Koordinaten

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}^K + \vec{F}^Z \iff \vec{F}^K - m\ddot{\vec{x}} + \vec{F}^Z = \vec{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} + \vec{F}^Z = \vec{0}$$

Nutze aus: Zwangskraft steht senkrecht auf Bewegungsmannigfaltigkeit, d.h. parallel zu Gradienten an f:

$$\vec{F}^Z(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange-Multiplikator}}}{\lambda(t)}\,\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x},t) = \lambda(t)\,\hat{x} \qquad \left(|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = 0$$

Lagrange-Gleichung 1. Art

Hier zu lösen:

$$\left|\begin{array}{r} -mg\,\hat{e}_3 - m\ddot{\vec{x}}(t) + \lambda(t)\,\hat{x}(t) = 0 \\ |\vec{x}(t)| - \ell = 0 \end{array}\right|$$

Forme die Zwangsbedingung um:

$$|\vec{x}| = \ell \overset{\ell>0}{\iff} \vec{x}\cdot\vec{x} = \ell^2 \iff \vec{x}\cdot\vec{x} - \ell^2 = 0$$

$$\overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow} \dot{\vec{x}}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\dot{\vec{x}} - 0 = 0 \iff \vec{x}\cdot\dot{\vec{x}} = 0$$

$$\overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow} \dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}} + \vec{x}\cdot\ddot{\vec{x}} = 0$$

Multipliziere Lagrange-Gleichung mit $\hat{x}$:

$$-mg\,\hat{e}_3\cdot\hat{x} - m\,\hat{x}\cdot\ddot{\vec{x}} + \lambda(t)\,\underbrace{\hat{x}\cdot\hat{x}}_{=1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(t) = mg\,\hat{e}_3\cdot\hat{x} - \frac{m}{\ell}|\dot{\vec{x}}|^2$$

⇝ Zwangskraft durch Bahnkurve ausgedrückt!

Setze in Lagrange-Gleichung 1. Art ein:

$$-mg\,\hat{e}_3 - m\,\ddot{\vec{x}} + mg(\hat{e}_3\cdot\hat{x})\hat{x} - \frac{m}{\ell}|\dot{\vec{x}}|^2\hat{x} = 0$$

$$\ddot{\vec{x}} = g\,[\underbrace{(\hat{e}_3\cdot\hat{x})\hat{x} - \hat{e}_3}_{(\hat{e}_3\times\hat{x})\times\hat{x}}] - \frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{x}\hat{x} \qquad (*)$$

geschlossene Bewegungsgl.

Frage: Erfüllt jede Lösung von * die Zwangsbedingung?

Nein, nur für Anfangsbedingung $\vec{x}(0) = \ell$; $\vec{x}(0)\dot{\vec{x}}(0) = 0$!

□

Wir betrachten ein N-Teilchen-System mit Z holonomen Zwangsbedingungen der Form

$$f_m(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, t) = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, Z)$$

Von den zugehörigen Z Zwangskräften möchten wir die ersten $z \leq Z$ explizit behandeln (und bestimmen). Dies entspricht einer Aufteilung

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{K} + \underbrace{\vec{F}_i^{Z-z}}_{\text{zu eliminieren}} + \underbrace{\vec{F}_i^{z}}_{\text{explizit behandeln}}$$

Wir führen daher $3N-(z-z)=f+z$ verallgem. Koordinaten $\vec{q}=(q_1,q_2,\dots,q_{f+z})$ ein, die die letzten $z-z$ Zwangsbedingungen automatisch erfüllen.

$\rightsquigarrow$ Bewegungsgleichung

$$* \qquad \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \vec{q}}-\tilde{F}_k^z\right]_\phi = 0 \qquad (k=1,\dots,f+z)$$

mit der verallgemeinerten Kraft $F_k^z = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \vec{F}_i^z \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$

die mit den verbleibenden Zwangsbedingungen

$$** \qquad f_m(\vec{q},t) \equiv \tilde{f}_m(\vec{X}(q,t),t) = 0 \qquad (m=1,2,\dots,z)$$

assoziiert sind.

Für alle Variationen $\delta\vec{q}$ in der f-dimensionalen Tangentialebene muss gelten

$$\vec{F}^z \cdot \delta\vec{q} = \sum_{k=1}^{f+z} F_k^z \delta q_k = 0$$

Da das orthogonale Komplement der Tangentialebene an $\{f_m(\vec{q},t)=0\}$ im Punkt $(\vec{q}_\phi,t)$ durch die Gradienten $\frac{\partial f_m}{\partial \vec{q}}(\vec{q}_\phi,t)$ mit $1 \le m \le z$ aufgespannt wird: $(\delta f_m)(\vec{q},t) = \frac{\partial f_m}{\partial \vec{q}}(\vec{q}_\phi,t)\cdot(\delta\vec{q})(t) = 0 \quad (m=1,\dots,z)$

muss für gewisse Proportionalitätsfaktoren $\lambda_m(t)$ gelten:

$$\tilde{F}_\phi^z = \sum_{m=1}^{z} \lambda_m(t)\, \frac{\partial f_m}{\partial \vec{q}}(\vec{q}_\phi(t),t)$$

Damit erhalten wir als Bewegungsgleichung die Lagrange-Gleichung 1. Art:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right]_\phi = \sum_{m=1}^{z} \lambda_m(t) \frac{\partial f_m}{\partial q_k}(\vec{q}_\phi(t),t)$$

$$(k=1,\dots,f+z)$$

mit Zwangsbedingungen

$$f_m(q_\phi(t),t) = 0 \qquad (m=1,2,\dots,z)$$

Insgesamt haben wir also $f+2z$ unabhängige Gleichungen für die $f+2z$ Unbekannten

$$\{q_k\}_{k=1}^{f+z}, \quad \{\lambda_m\}_{m=1}^{z} \rightsquigarrow \text{vollständig bestimmt.}$$

Die mit der Zwangsbedingung $f_m = 0$ verknüpften Zwangskräfte ergeben sich im Unterraum $\{f_m = 0 \mid z+1 \leq m \leq Z\}$ durch

$$\vec{F}_\phi^{(m)} = \lambda_m(t) \frac{\partial f_m}{\partial \vec{q}}(\vec{q}_\phi,t) \qquad \Delta$$

Wichtiger Spezialfall: $z = Z$

Dann gilt $f = 3N - Z$, Δ gibt also die vollständige Zwangskraft an. Die Form der Bewegungsgleichung kann (trotzdem) durch die Wahl der verallg. Koordinaten optimiert werden.

17.11.08

Theorie II: Vorlesung 10

Notiztitel 18.11.2008

Auch die Lagrange-Gleichungen 1. Art können aus einem Variationsprinzip hergeleitet werden, bei Variation nach $\vec{q}$ und $\vec{\lambda}$ sogar inklusive Zwangsbedingungen. $\rightsquigarrow$ Aufg. 17

Beachte: statt durch Lösung der Lagrange-Gleichungen 1. Art kann man die Zwangskräfte auch berechnen, indem man die Zwangskräfte durch neue verallg. Koordinaten $\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_f$ ganz eliminiert, die zugehörigen L.-Gl. 2. Art löst und die resultierende Bahn $\vec{\bar{q}}_\phi(t)$ mittels $\vec{q}_\phi(\vec{\bar{q}}_\phi(t), t)$ in die linke Seite der L-Gleichungen 1. Art einsetzt. Dies liefert die verallg. Gesamtzwangskraft, die sich eindeutig als Linearkomb. der Gradienten $\left\{\frac{\partial f_m}{\partial \vec{q}} \middle| m = 1, \ldots, z\right\}$ aufspalten lässt.

7.10 Erhaltungsgrößen

Bestimmung von Erhaltungsgrößen wichtig für die Klassifikation von Lösungen und ihre konkrete Berechnung.

a) Bei nicht explizit zeitabhängiger Lagrange-Funktion*

ist das Jacobi-Integral $\mathcal{J}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \equiv \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$

für die physikalische Bahn erhalten. Dies folgt aus

$$\left(\frac{d\mathcal{J}}{dt}\right)_\phi = \left\{ \sum_k \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] - \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right] - \frac{\partial L}{\partial t} \right\}_\phi$$

$$= \left\{ \sum_k \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} \right\}_\phi = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_\phi$$

(für kartesische Koordinaten schon in Aufg. 7 gezeigt).

* nach Elimination der Zwangsbedingungen

Frage: Jacobi-Integral = Energie?

Spezialfall: skleronome Zwangsbedingungen, verallg. Koordinaten zeitunabhängig: $\vec{x}_i = \vec{x}_i(\vec{q})$

Auf. 7.6 $\rightsquigarrow$ $T = T(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{kl} a_{kl}(\vec{q})\,\dot{q}_k \dot{q}_l \;; \quad a_{kl} = a_{lk}$

Falls außerdem die Kräfte konservativ sind ($V \equiv V(\vec{q})$), gilt:

$$\mathcal{J}_\phi = \left[\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - (T-V)\right]_\phi = \left[2T-(T-V)\right]_\phi = (T+V)_\phi = E$$

Hier gilt also $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}E = 0$

Umgekehrt gilt das nicht, denn ein System mit $\frac{dE}{dt} = 0$ kann durch 2 Lagrange-Funktionen L, L' mit

$$L' = L + \frac{d}{dt}\lambda(\vec{q},t) = L + \sum_k \frac{\partial \lambda}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

beschrieben werden. Es gilt:

$$\mathcal{J}' = \sum_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L' = \mathcal{J} + \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right) - \frac{d\lambda}{dt}$$

$$= \mathcal{J} + \sum_k \frac{\partial \lambda}{\partial q_k}\dot{q}_k - \sum_k \frac{\partial \lambda}{\partial q_k}\dot{q}_k - \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \mathcal{J} - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Für generisches $\lambda(\vec{q},t)$ ist also mindestens eines der Jacobi-Integrale nicht konstant (bei E konstant).

b) Falls die Lagrange-Funktion nicht explizit von der verallg. Koordinate q_ℓ abhängt, so wird diese als zyklisch bezeichnet. Dann ist der zugehörige verallgemeinerte Impuls $p_\ell(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ erhalten:

$$0 = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\ell}\right]_\phi = \left[\frac{d}{dt}\, p_\ell(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)\right]_\phi \quad (q_\ell \text{ zyklisch})$$

In kartesischen Koordinaten und für konservative Kräfte mit $L = \frac{1}{2}\sum_i m_i |\dot{\vec{x}}_i|^2 - V(\vec{X})$ stimmt der verallg. Impuls mit dem physikalischen Impuls überein: $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} = m_i \dot{\vec{x}}_i = \vec{p}_i$

Im Allgemeinen hat p_ℓ jedoch nicht einmal die „richtige" Dimension und ist für ein System auch nicht eindeutig:

$$L' = L + \frac{d\lambda}{dt} \Rightarrow p_\ell' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\ell} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\ell}\left(L + \frac{\partial \lambda}{\partial q_\ell}\dot{q}_\ell + \frac{\partial \lambda}{\partial t}\right) = p_\ell + \frac{\partial \lambda}{\partial q_\ell}$$

Beispiel 1: 2-Teilchen-Problem in zylindrischen Relativ-Koordinaten (vgl. 3.3): $L(x,\dot{x},\varphi,\dot{\varphi},t) = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2) - V(x)$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \text{Drehimpuls } \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu x^2 \dot{\varphi} \text{ ist erhalten.}$$

(außerdem: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow J = E = T + V$ erhalten).

Beispiel 2: geladenes Teilchen im elm. Feld

$$L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}|^2 - \hat{q}\left[\phi(\vec{x},t) - \dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x},t)\right]$$

mit $\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_3} = \vec{0}$

$\rightsquigarrow$ die 3-Komponente des verallgemeinerten (= kanonischen) Impulses ist erhalten: $\frac{d}{dt}p_3 = \frac{d}{dt}\left[m\dot{x}_3 + \hat{q}A_3(x_1,x_2)\right] = 0$

Achtung: die Abwesenheit zyklischer Variablen schließt die Existenz von Erhaltungsgrößen nicht aus, z.B. ist bei dem 2-Teilchenproblem in kart. Koordinaten keine davon zyklisch: $L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, t) = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - V(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$

Transformationstheorie: Bestimmung eines optimalen Koordinatensystems mit möglichst vielen zyklischen Variablen.

7.10.1 Elimination von zyklischen Koordinaten

Betrachten wir eine Lagrange-Funktion, die nicht explizit von q_{f+1} abhängt:

$$L^{(f+1)} = L^{(f+1)}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \dot{q}_{f+1}, t); \qquad \vec{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_f)$$

q_{f+1} zyklisch $\rightsquigarrow$ $p_{f+1} = \dfrac{\partial L^{(f+1)}}{\partial \dot{q}_{f+1}}$ ist Erhaltungsgröße auf physikalischer Bahn, die dazu genutzt werden kann, $\dot{q}_{f+1}$ aus den Bewegungsgleichungen für $\vec{q}_f(t)$ zu eliminieren:

$$\dot{q}_{f+1} = f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t; p_{f+1}) \qquad \Delta$$

$\rightsquigarrow$ Reduktion der Dimensionalität des Problems.

Frage: Elimination direkt in Lagrange-Funktion möglich?

(Erinnerung: analoges Vorgehen bei Relativproblem in Kap 3, wo zyklische Koordinate φ eliminiert worden war:

$\rightsquigarrow$ $E = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 + V_f(x)$; $\quad V_f(x) = V(x) + \dfrac{|\vec{L}|^2}{2\mu x^2}$

entsprechend $L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 - V_f(x)$ (1-d Problem)

Antwort: ja, mit

$$L^{(f)}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t;p_{f+1}) = L^{(f+1)}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\dot{q}_{f+1},t) - p_{f+1}\,\dot{q}_{f+1} \quad (*)$$

Beweis: wir betrachten die mit $L^{(f)}$ verknüpfte Wirkung

$$S_{(\vec{q}_1,t_1)}^{(\vec{q}_2,t_2)}[\vec{q}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L^{(f)}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t;p_{f+1})$$

Für die physikalische Bahn muss gelten: $\delta S = 0$.

Beachte: aus Δ folgt:

$$q_{f+1}(t) = q_{f+1}(t_1) + \int_{t_1}^{t} dt'\, f(\vec{q}(t'),\dot{\vec{q}}(t'),t';p_{f+1})$$

und somit gilt i.A. nicht $\delta q_{f+1}(t_1) = \delta q_{f+1}(t_2) = 0$.

Diese Randterme müssen vom 2. Term in $*$ kompensiert werden:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L^{(f+1)}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\dot{q}_{f+1},t) = (p_{f+1}\,\delta q_{f+1})\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$+ \sum_{k=1}^{f+1}\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L^{(f+1)}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^{(f+1)}}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]_\phi (\delta q_k)(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$= p_{f+1}\,\delta\int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{q}_{f+1} \underset{\uparrow}{=} \delta\int_{t_1}^{t_2} dt\, p_{f+1}\,\dot{q}_{f+1}$$

p_{f+1} für alle Variationen gleich

Es folgt: $\delta S^{(f+1)} = 0 \iff \delta S^{(f)} = 0$, d.h. die physikalische Bahn $\vec{q}_\phi(t)$ erfüllt auch die mit $L^{(f)}$ assoziierte Lagrange-Gleichung.

$\square$

Bsp: für das 2-Teilchen-Relativproblem gilt:

$$L^{(1)}(x,\dot{x},t) = L^{(2)}(x,\dot{x},\varphi,\dot{\varphi},t) - p_\varphi \dot{\varphi}$$

$$= \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2) - V(x) - \mu x^2 \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2}\mu \dot{x}^2 - V_f(x) \; ; \quad V_f(x) = V(x) + \frac{|L|^2}{2\mu x^2}$$

T

$$\dot{\varphi} = \frac{|\vec{L}|}{\mu x^2}$$

Im Fall von mehreren zyklischen Variablen

$\vec{q}_z = (q_{f+1}, q_{f+2}, \ldots, q_{f+n})$ mit

$$L^{(f+n)} = L(\vec{q},\dot{\vec{q}},\dot{\vec{q}}_z,t)$$

sind alle Komponenten des assoziierten Impulses erhalten:

$$\vec{p}_z = \frac{\partial L^{(f+n)}}{\partial \dot{\vec{q}}_z}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\dot{\vec{q}}_z,t)$$

$$\text{bzw.} \qquad \dot{\vec{q}}_z = \vec{f}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t;\vec{p}_z)$$

und die Eliminationsvorschrift führt auf die

Routh-Funktion

$$L^{(f)}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t;\vec{p}_z) = L^{(f+n)}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\dot{\vec{q}}_z,t) - \vec{p}_z\cdot\dot{\vec{q}}_z \, ,$$

wobei $\dot{q}_z$ jeweils durch $\vec{f}(\vec{q},\dot{\vec{q}},t;\vec{p}_z)$ zu ersetzen ist.

19.11.08

Theorie II: Vorlesung 11

Notiztitel 23.11.2008

7.10.2 Die Zeit als zyklische Variable

Sei die Lagrange-Funktion nicht explizit zeitabhängig:

$$L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$$

Frage: kann man t als zyklische Variable betrachten?

Antwort: a) Nicht direkt: (i) t ist unabhängiger Parameter

(ii) was soll $p_t = \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \frac{dt}{dt}} = \frac{\partial L}{\partial 1}$ heissen???

b) aber mit Erweiterung des Formalismus, nämlich neuer Parametrisierung der Bahnen

$$t \leftrightarrow \tau \;;\quad [t_1, t_2] \leftrightarrow [0,1] \;;\quad \frac{dt}{d\tau} > 0$$

$$(\vec{q}(\tau), t(\tau)); \quad \vec{q}(0) = \vec{q}_1 \;;\; \vec{q}(1) = \vec{q}_2 \;;\; t(0) = t_1 \;;\; t(1) = t_2$$

und der Wirkung $\quad S^{(f+1)}[\vec{q}, t] = \int_0^1 d\tau \, L^{(f+1)}(\vec{q}(\tau), \vec{q}\,'(\tau), t'(\tau))$

mit $\quad \underbrace{\vec{q}\,'}_{\tau\text{-Zeitableitung}} = \frac{d\vec{q}}{d\tau} \;;\; t' = \frac{dt}{d\tau} \quad$ und $\quad L^{(f+1)} d\tau \underset{\text{gleiche Wirkung für gleiche Bahnen}}{=} L\, dt,$

d.h. $L^{(f+1)}(\vec{q}, \vec{q}\,', t') \equiv t' L(\vec{q}, \vec{q}\,'/t')$.

In der neuen Formulierung ist t zyklisch, d.h. entspricht q_{f+1} aus Abschnitt 7.10.1

$\rightsquigarrow$ Der verallgemeinerte Impuls p_t ist erhalten mit

$$p_t = \frac{\partial L^{(f+1)}}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'} [t' L(\vec{q}, q'/t')] = L - (t')^{-1} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot \vec{q}\,'$$

$$= -\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\dot{\vec{q}} - L\right) = -J$$

↖ Jacobi-Integral

Jetzt kann die zyklische Variable t eliminiert werden:

$$L^{(t)}(\vec{q},\vec{q}\,') = L^{(f+1)} - p_t t' = t'(L - p_t) = t'\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\cdot\dot{\vec{q}}$$

Auf der rechten Seite sind t' (und ggf. $\dot{\vec{q}}$) durch die entsprechenden Funktionen von $\vec{q}, \vec{q}\,'$ zu ersetzen.

Beispiel: $L(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = T(\vec{q},\dot{\vec{q}}) - V(\vec{q})$ mit

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k\ell} a_{k\ell}(\vec{q})\,\dot{q}_k\dot{q}_\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2; \quad |ds|^2 = \frac{1}{2}\sum_{k\ell} a_{k\ell}(\vec{q})\,dq_k\,dq_\ell$$

Hier: „Bogenlänge" s. Wegen Energieerhaltung gilt:

$$E - V(\vec{q}) = T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}(t')^{-2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad t' = \frac{ds}{d\tau}\left[2(E-V)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\rightsquigarrow \quad L^{(t)} = t'\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\dot{\vec{q}} = 2t'T = 2t'(E-V) = \frac{ds}{d\tau}\sqrt{2(E-V)}$$

Die physikalische Bahn $q_\phi(\tau)$ ist nun durch das Variationsprinzip $\delta S^{(t)}[\vec{q}] = 0$ bestimmt mit

$$S^{(t)}[\vec{q}] = \int_0^1 d\tau\, L^{(t)}(\vec{q},\vec{q}\,') = \int_0^1 d\tau\, \frac{ds}{d\tau}\sqrt{2(E - V(\vec{q}))}$$

$$= \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}_2} ds\,\sqrt{2(E-V(\vec{q}))}$$

Dieses Jacobi-Prinzip ≡ Prinzip der kleinsten Wirkung bestimmt nur die Form der Bahn $\vec{q}_\phi$, nicht ihre Zeitabhängigkeit.

7.11 Das Noether-Theorem

Bisher untersucht: Erhaltungsgrößen aufgrund von Invarianzen der Lagrange-Funktion unter Translationen der Form $t' = t + \alpha$ bzw. $q_a' = q_a + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Jetzt: allgemeinerer Zusammenhang zwischen Symmetrien von Lagrange-Funktion/-Gleichung und Erhaltungsgrößen.

Betrachte Punkttransformationen der Form

$$t' = t'(t;\vec{\alpha}); \quad \vec{q}\,' = \vec{q}\,'(\vec{q},t;\vec{\alpha}) \qquad \text{(keine Zeitableitung!)}$$

die von einem kontinuierlich variierbaren Parameter $\vec{\alpha}$ abhängig und umkehrbar sind:

$$t = t(t';\vec{\alpha}); \quad \vec{q} = \vec{q}(\vec{q}\,',t;\vec{\alpha})$$

Dabei soll $\vec{\alpha} = \vec{0}$ der Identität entsprechen:

$$t'(t;\vec{0}) = t; \quad \vec{q}\,'(\vec{q},t;\vec{0}) = \vec{q}$$

und die Abhängigkeit von $\vec{\alpha}$ glatt sein:

$$(\vec{q}\,',t') = (\vec{q},t) + \mathcal{O}(|\vec{\alpha}|)$$

Wir definieren die neue Lagrange-Funktion $L'(\vec{q}\,',\dot{\vec{q}}\,',t')$ durch $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)\,dt = L'(\vec{q}\,',\dot{\vec{q}}\,',t')\,dt'$; $\quad \dot{\vec{q}}\,' = \frac{d\vec{q}\,'}{dt'}$

d.h. $L'(\vec{q}\,',\dot{\vec{q}}\,',t') = L(\vec{q}(\vec{q}\,',t';\vec{\alpha}), \dot{\vec{q}}(\vec{q}\,',\dot{\vec{q}}\,',t';\vec{\alpha}), t(t';\vec{\alpha}))\,\frac{dt}{dt'}(t';\vec{\alpha})$

Die Forminvarianz der Bewegungsgleichung erfordert

$$L'(\vec{q}\,',\dot{\vec{q}}\,',t';\vec{\alpha}) = \mu(\vec{\alpha})\,L(\vec{q}\,',\dot{\vec{q}}\,',t') + \frac{d\Lambda}{dt}(\vec{q}\,',t';\alpha)$$

↑ Vorfaktor kürzt sich bei L-Gleichungen (bzw. $S' = \mu(\vec{\alpha})\, S + \lambda(\vec{q}', t'; \vec{\alpha})\Big|_{t_1'}^{t_2'}$)

Insgesamt folgt:

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\,dt = \mu(\vec{\alpha})\, L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)\,dt' + (d\lambda)(\vec{q}', t', \vec{\alpha}) \quad (*)$$

Gleichförmigkeitstransformation (mit $\mu(\vec{\alpha}) \neq 1$): siehe Skript.

Notation: $(\vec{q}', t') = T_{\vec{\alpha}}\,(\vec{q}, t)$

Translation, nicht kin. Energie!

Wir betrachten nur Trafos, die 1-Parameter-Gruppe bilden: $T_{(\alpha_1+\alpha_2)\hat{\alpha}} = T_{\alpha_1\hat{\alpha}}\, T_{\alpha_2\hat{\alpha}}$ ($\hat{\alpha}$ fest, $\alpha_i \in \mathbb{R}$)

Notation (anders als Skript: $\vec{\alpha} \to \alpha$)

Wegen $T_\alpha = (T_{\alpha/N})^N$ reicht es, infinitesimale Trafos T_α für $\alpha \to 0$ zu betrachten $\leadsto$ Entwicklung

Notation: „D" für linearen Beitrag in Entwicklung:

$$t' = t'(t, \alpha) = t + Dt + \mathcal{O}(\alpha^2); \quad Dt = \frac{\partial t'}{\partial \alpha}(t, 0)\,\alpha$$

$$\vec{q}' = \vec{q}'(\vec{q}, t; \alpha) = \vec{q} + D\vec{q} + \mathcal{O}(\alpha^2); \quad D\vec{q} = \frac{\partial \vec{q}'}{\partial \alpha}(\vec{q}, t; 0)\,\alpha$$

$$\leadsto \dot{\vec{q}}' = \frac{d\vec{q}'}{dt'} = \frac{d\vec{q}'}{dt} \Big/ \frac{dt'}{dt} = \left[\dot{\vec{q}} + \frac{d}{dt}(D\vec{q})\right] \Big/ \left[1 + \frac{d}{dt}(Dt)\right] + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$$= \dot{\vec{q}} + D\dot{\vec{q}} + \mathcal{O}(\alpha^2); \quad D\dot{\vec{q}} = \frac{d}{dt}(D\vec{q}) - \dot{\vec{q}}\,\frac{d}{dt}(Dt)$$

Außerdem gilt: $\mu(\alpha) = 1 + D\mu + \mathcal{O}(\alpha^2); \quad D\mu = \frac{\partial \mu}{\partial \alpha}(0)\,\alpha$

$$\lambda(\vec{q}', t'; \alpha) = (D\lambda)(\vec{q}, t) + \mathcal{O}(\alpha^2); \quad (D\lambda)(\vec{q}, t) = \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}(\vec{q}, t; 0)\,\alpha$$

Für das Differential benötigen wir noch:

$$dt' = dt + D(dt) + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad \text{mit} \quad D(dt) = \frac{\partial^2 t'}{\partial t\,\partial \alpha}(t; \vec{0})\,\alpha\, dt$$
$$= d(Dt)$$

Einsetzen in $\ast$ liefert:

$$0 = (1 + D\mu)\, L(\vec{q} + D\vec{q};\, \dot{\vec{q}} + D\dot{\vec{q}},\, t + Dt)\, d(t + Dt)$$
$$- L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\, dt + d[(D\lambda)(\vec{q}, t)] + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$$= \Big[(D\mu)\, L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{\partial L}{\partial \vec{q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \cdot D\vec{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \cdot D\dot{\vec{q}}$$
$$+ \frac{\partial L}{\partial t}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\, Dt\Big]\, dt + L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\, d(Dt) + d[(D\lambda)(\vec{q}, t)]$$

$\leadsto$ $\mathcal{H} = \dot{\vec{q}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - L$

$$0 = (D\mu)\, L + \frac{\partial L}{\partial \vec{q}}\, D\vec{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\, \frac{d(D\vec{q})}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}\, Dt - \mathcal{H}\, \frac{d(Dt)}{dt} + \frac{d(D\lambda)}{dt}$$

Für die physikalische Bahn gilt:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{q}}\right)_\phi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right); \quad \frac{d\mathcal{H}_\phi}{dt} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_\phi$$

$$\leadsto \quad 0 = (D\mu)\, L + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot D\vec{q} - \mathcal{H}\, Dt + D\lambda\right)$$

Falls keine Gleichförmigkeitstransformation vorliegt ($\mu \equiv 1$):

$$\boxed{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot D\vec{q} - \mathcal{H}\, Dt + D\lambda\right)_\phi = \text{konstant}}$$

Noether-Theorem

24.11.08

Theorie II: Vorlesung 12

Notiztitel 25.11.2008

Kurzwiederholung: Falls die Lagrange-Gleichungen invariant sind unter einer kontinuierlichen Punkttrafo

$$(\vec{q}\,',t') = T_\alpha(\vec{q},t)$$

lin. Ordnung in α-Entw.

$$\rightsquigarrow \quad 0 = (D\mu)L + \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} D\vec{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \frac{d(D\vec{q})}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} Dt - \mathcal{J} \frac{d(Dt)}{dt} + \frac{d(D\lambda)}{dt}$$

phys. Bahn $\rightsquigarrow$

$$0 = (D\mu)L + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot D\vec{q} - \mathcal{J}\,Dt + D\lambda\right)$$

Falls keine Gleichförmigkeitstransformation vorliegt ($\mu \equiv 1$):

$$\boxed{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot D\vec{q} - \mathcal{J}\,Dt + D\lambda\right)_\phi = \text{konstant}}$$

Noether-Theorem

Allgemein: $D\vec{q} \neq 0, \quad Dt \neq 0, \quad D\lambda \neq 0$

Spezialfälle: nur $D\vec{q} \neq 0 \rightsquigarrow$ zugeh. Impuls konst.

nur $Dt \neq 0 \rightsquigarrow \mathcal{J}$ konst.

noch etwas genauer ...

(i) Zeittranslation $\quad (\vec{q}\,',t') = (\vec{q}, t+\alpha)$

$\rightsquigarrow \quad D\vec{q} = 0, \quad Dt = \alpha$

Falls Lagrange-Funktion invariant $\rightsquigarrow D\mu = 0, D\lambda = 0$

$\rightsquigarrow \quad \mathcal{J} = $ konstant

(ii) Translationen im Konfigurationsraum

$$(\vec{q}\,', t') = (\vec{q} + \alpha, t)$$

$$\Rightarrow \quad D\vec{q} = \vec{\alpha}\,; \quad Dt = 0$$

Falls Lagrange-Funktion invariant $\rightsquigarrow$ $D\mu = 0, D\lambda = 0$

$\rightsquigarrow$ verallg. Impuls $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot \hat{a}$ in $\vec{\alpha}$-Richtung erhalten

(iii) Drehungen im Ortsraum

$$\vec{x}_i\,' = R(\vec{\alpha})\vec{x}_i = \vec{x}_i + \vec{\alpha} \times \vec{x}_i + \mathcal{O}(\alpha^2)\,; \quad t' = t$$

$$\rightsquigarrow \quad D\vec{x}_i = \vec{\alpha} \times \vec{x}_i\,; \quad Dt = 0$$

Falls Lagrange-Funktion invariant $\rightsquigarrow$ $D\mu = 0, D\lambda = 0$

$\rightsquigarrow$ Erhaltungsgröße $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{x}_i) = \vec{\alpha} \cdot \sum_i \vec{x}_i \times \vec{p}_i = \vec{\alpha} \cdot \vec{L}$

Drehimpuls in $\vec{\alpha}$-Richtung   auch richtig für $\vec{\alpha} \to \hat{\alpha}$

(iv) Geschwindigkeitstransformationen siehe Übung

7.12 Nicht-holonome Zwangsbedingungen

Anwendungen:
- Kugel auf rauher Ebene
- Autoreifen auf Straße

} differentielle Zwangsbed.

- (hüpfende Kugel auf glatter Ebene) Ungleichung

Wir betrachten die als nicht-integrabel angenommene diff. Zwangsbedingung $0 = d\phi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(\vec{x}, t)\, d\vec{x}_i + \varphi_0(\vec{x}, t)\, dt$

Behandlung analog zur Herleitung der Lagrange-

Gleichungen 1. Art in Abschnitt 7.9.

Sei also ein N-Teilchen-System gegeben mit $Z-z$ holonomen Zwangsbedingungen der Form

$$f_m(\vec{x},t) = 0 \quad (m = z+1, z+2, \dots, Z)$$

und z nicht-holonomen Zwangsbed. der Form

$$0 = d\bar{\phi}_m = \sum_{i=1}^{\bar{N}} \bar{\varphi}_{mi}(\vec{x},t)\cdot d\vec{x}_i + \bar{\varphi}_{m0}(\vec{x},t)dt \quad (m=1,\dots,z)$$

Damit wirkt auf das Teilchen i die Kraft

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,K} + \vec{F}_i^{\,Z-z} + \vec{F}_i^{\,z}$$

↑kartesisch ↑holonom ↑nicht-holonom

Führe $f+z$ verallg. Koordinaten $\vec{q} = (q_1, \dots, q_{f+z})$ ein ($f = 3N - Z$), die die $Z-z$ holonomen Zwangsbedingungen eliminieren.

$$\rightarrow \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \mathcal{F}_k^{\,z}\right]_\phi = 0 \qquad (k = 1, \dots, f+z)$$

Die verbleibende verallg. Zwangskraft $\mathcal{F}_k^{\,z} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,z}\cdot\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$ wird von den (modifizierten) nicht-holonomen Zwangsbed.

$$0 = d\phi_m = \sum_{k=1}^{f+z} \varphi_{mk}(\vec{q},t)dq_k + \varphi_{m0}(\vec{q},t)\,dt \qquad (*)$$

mit $\varphi_{mk}(\vec{q},t) = \sum_{i=1}^{N} \bar{\varphi}_{mi}(\vec{x}(\vec{q},t),t)\cdot\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}$, $\varphi_{m0}(\vec{q},t) = \bar{\varphi}_{m0}(\vec{x}(\vec{q},t),t)$

hervorgerufen.

Die f-dimensionale Tangentialebene an die Bewegungsmannigfaltigkeit im Punkt $q_\phi(t)$ wird (wieder) zu fester Zeit t bestimmt, also ergibt sich mit $dt = 0$ folgende Orthogonalitätsbedingung an $\delta\vec{q}$:

$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ $0 = \sum_{k=1}^{f+z} \varphi_{mk}(\vec{q}_\phi, t)\, \delta q_k = \vec{\varphi}_m(\vec{q}_\phi, t) \cdot \delta\vec{q} \quad (m = 1, \dots, z)$

$\delta\vec{q}$ senkrecht auf alle Zwangsb.

Da auch die Zwangskräfte senkrecht auf $\delta\vec{q}$ stehen (zentrales Postulat) $\quad \vec{F}^z \cdot \delta\vec{q} = \sum_k F_k^z \delta q_k = 0$

muss für gewisse Faktoren $\lambda_m(t)$ gelten:

$$\vec{F}_\phi^z = \sum_{m=1}^{z} \lambda_m(t)\, \vec{\varphi}_m(\vec{q}_\phi, t) \equiv \sum_m F_\phi^{(m)}$$

$\rightsquigarrow$ Bewegungsgleichungen ($\sim$ L.-Gl. 1. Art)

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right]_\phi = \sum_{m=1}^{z} \lambda_m(t)\, \varphi_{mk}(\vec{q}_\phi, t) \quad (k = 1, \dots, f+z)$$

mit Zwangsbedingungen

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \vec{\varphi}_m(\vec{q}_\phi, t) \cdot \dot{\vec{q}}_\phi + \varphi_{m0}(\vec{q}_\phi, t) = 0 \quad (m = 1, .., z)$$

Insgesamt: $f + 2z$ Gleichungen für $f + 2z$ Unbekannte $\{q_k, \lambda_m\}$, also wohlbestimmt.

Frage: Was ändert sich für Erhaltungsgrößen?

a) Jacobi-Integral $\quad \mathcal{J}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \cdot \dot{\vec{q}} - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$

$$\left(\frac{d}{dt}\mathcal{J}\right)_\phi = \left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}}\right] \cdot \dot{\vec{q}} - \frac{\partial L}{\partial t}\right\}_\phi$$

$$= \left(\vec{F}^z \cdot \dot{\vec{q}} - \frac{\partial L}{\partial t}\right)_\phi = \left(\sum_{m=1}^{z} \lambda_m\, \vec{\varphi}_m \cdot \dot{\vec{q}} - \frac{\partial L}{\partial t}\right)_\phi$$

$$\overset{*}{=} -\left[\sum_{m=1}^{z} \lambda_m(t)\, \varphi_{m0}(\vec{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial t}\right]_\phi$$

Hinreichende Bedingung für J_ϕ konstant:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 ; \quad \varphi_{m0}(\vec{q}, t) = 0 \quad \forall\ m = 1, \ldots, z$$

Dies ist i.A. auch notwendig, falls nicht z.B. alle Zwangskräfte verschwinden. Also:

$$\frac{d}{dt} J_\phi = 0 \quad \text{für} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \ \text{und} \ d\phi_m = \vec{\varphi}_m(\vec{q}, t) \cdot d\vec{q} = 0$$
$$(m = 1, \ldots, z)$$

Falls $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ und verallg. Koordinaten zeitunabhängig ($\vec{x} = \vec{x}(\vec{q})$) gilt zusätzlich: $J_\phi = (T + V)_\phi = E$

b) Zyklische Variable: aus $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ folgt (wie im Formalismus 1. Art in der Regel nicht die Existenz einer Erhaltungsgröße, da die zugehörige Zwangskraft i.A. nicht verschwindet:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right]_\phi = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]_\phi = (F_k^z)_\phi = \underbrace{\sum_{m=1}^{z} \lambda_m(t)\, \varphi_{mk}(\vec{q}_\phi, t)}_{\overset{\text{i.A.}}{\neq} 0}$$

Später (Kap. 10): Beispiele für Erhaltungsgrößen trotz Zwangskraft.

Noch Fragen?

24.11.08