

Kapitel 6 Spezielle Relativitätstheorie

(Fortsetzung von Theorie I)

Kurzwiederholung (bis 6.2)

Relativitätsprinzip \leftrightarrow Inertialsysteme } auch
Deterministisches Prinzip } Newton

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (alle Inertialsysteme)

6.1 Erste Konsequenzen der Postulate

Bezugssysteme K, K' mit $\vec{v}_{rel}(K', K) = \vec{v}$

• Relativität der Gleichzeitigkeit
(Schon in Newton-Mechanik: Relativität von Position/Abstand)

• Längen senkrecht zu \vec{v} unverändert

• Zeitdilatation $T' = \gamma T$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\beta = \frac{v}{c}$

• Längenkontraktion (in Bewegungsrichtung): $l' = \frac{l}{\gamma}$

6.2 Der Abstand und die Eigenzeit $\checkmark s^2 = 0 \Leftrightarrow (s')^2 = 0$

Für Lichtsignal: $s^2 \equiv c^2(\Delta t)^2 - |\Delta \vec{x}|^2 = 0 = c^2(\Delta t')^2 - |\Delta \vec{x}'|^2 \equiv s'^2$

Infinitesimaler Abstand $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - |dx|^2}$

Notation $\vec{u} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$; $\beta_u = \frac{|\vec{u}|}{c}$

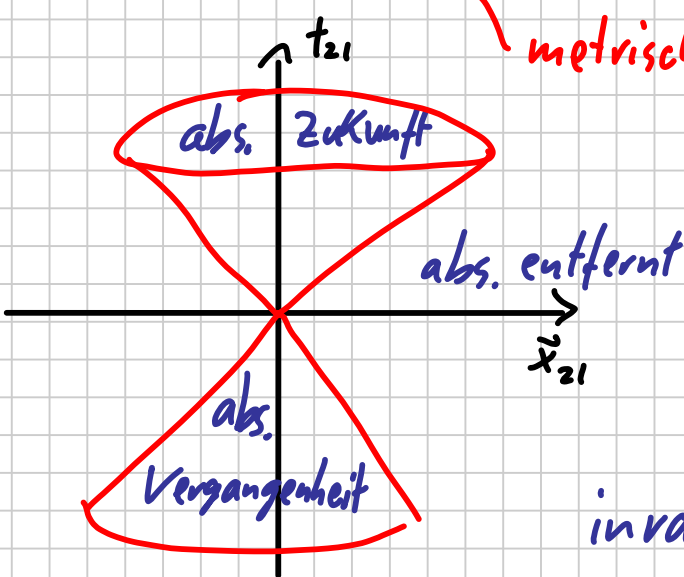
Lorentz-Transformation $\begin{pmatrix} c dt' \\ d\vec{x}' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} c dt \\ d\vec{x} \end{pmatrix}$

Homogenität, Isotropie etc. $\leadsto (ds)^2 = (ds')^2 \quad \forall ds$

$\leadsto s_{21}^2 = (s'_{21})^2 \quad \forall$ Paare von Ereignissen (t_{112}, \vec{x}_{112})

(Korrektur der Notation: gespiegelte Matrix $\tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda^T$)

$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \Lambda^T \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \Lambda$



metrischer Tensor

$s_{21}^2 > 0$ zeitartig

$s_{21}^2 = 0$ lichtartig

$s_{21}^2 < 0$ raumartig

invariante inf. Zeit $d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{dt}{\gamma_u}$
Eigenzeit τ

6.3 4-Schreibweise und Lorentz-Transformationen

Wir sind es gewöhnt, Euklidische Längen/Abstände kompakt zu notieren: $|\vec{x}|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i x_i \equiv x_i x_i$

Analoge Notation für $s^2 = (ct)^2 - |\vec{x}|^2$?

Führe dazu den kontravarianten 4-(Orts-)Vektor ein:

$x^\mu \equiv (ct, \vec{x})^T \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$
Index oben!

sowie den metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu=\nu=0 \\ -1 & \text{falls } \mu=\nu \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}_{\mu\nu}$$

↑ beide Indizes unten ↑ beide oben

Wichtig: Die Stellung der Indizes (unten/oben) ist i.A. sehr relevant. Diese ändert sich insbesondere bei Anwendung des Metrischen Tensors:

Einstein-Konv. neg. Vorzeichen!

Kovarianter 4-Orts-Vektor: $x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{x})^T$

Damit gilt: $\underline{s^2} = c^2 t^2 - |\vec{x}|^2 = (ct, \vec{x}) \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = \underline{x^\mu x_\mu}$

Modifizierte Einstein-Konvention: Summation über Indizes, die einmal unten, einmal oben auftreten (Kontraktion). Dabei ist die Differenz #(Obere Indizes) - #untere Indizes konstant.

Formal kann man Indizes mithilfe des metrischen Tensors "herauf- und herunterziehen". Es gilt z.B.

$$g_{\mu\rho} g^{\nu\rho} = g_\mu{}^\nu \equiv \delta_\mu{}^\nu = (\mathbb{1})_{\mu\nu} = \delta^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu}$$

Die Ableitung nach einem kontravarianten Vektor eliminiert einen oberen Index und wird daher kovariant

notiert: $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\leadsto \partial_\mu (a_\nu x^\nu) = a_\nu)$

Analog: $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = g^{\mu\nu} \partial_\nu$

Auch der d'Alembert-Operator kann somit kompakt geschrieben werden: $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu$

Lorentz-Transf. $x_i'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x_i^{\nu}$ lassen die relativistischen Abstände invariant: $x_{\mu}' x'^{\mu} = x_{\mu} x^{\mu}$ ← linearer Ansatz

6.2 \Leftrightarrow $\underline{g^{-1} g} \Lambda^{-1} = \underline{g^{-1} \Lambda^T g} \Lambda \Lambda^{-1}$ metr. Tensor ist selbstinvers (21)

$$\Lambda^{-1} = g^{-1} \Lambda^T g = g \Lambda^T g$$

Wir haben also einen expliziten Ausdruck für die inverse Transformation Λ^{-1} gefunden.

Muss das Transformationsgesetz zwischen Inertialsystemen **linear** sein? Ja, weil

(i) geradlinig gleichförmige Bewegungen in geradlinig gleichförmige Bewegungen zu überführen sind

(ii) $\partial_{\gamma} \partial_{\mu} (x^{\alpha}) = 0$ (siehe Skript)
 (\sim Linearität, Λ x-unabhängig)

6.3.1 Poincaré und Lorentz-Transformationen

Allgemeinste relativistisch korrekte Transformation:

Poincaré-Transformation $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$

Die Inhomogenität a^{μ} entspricht einer Translation in Zeit und Raum: $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$; $t' = t + \frac{a^0}{c}$

Homogener Anteil: Lorentz-Transformation.

Die Lorentz-Transf. bilden eine **Gruppe** bezüglich Hintereinanderausführung (bzw. Matrixmultiplikation, da

(i) mit Λ_1, Λ_2 auch das Produkt $\Lambda_1 \Lambda_2$ die Bedingung

* erfüllt: $(\Lambda_2^T \Lambda_1^T) g (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^T g \Lambda_2 = g$

- (ii) das Produkt ist assoziativ (aber nicht kommutativ!)
- (iii) es existiert das 1-Element: Identität $\equiv \mathbb{1}$,
- (iv) zu jedem Λ ex. das inverse Element Λ^{-1} (s.o.)

Wegen $\det(\Lambda^{-1} g \Lambda) = \det(\Lambda) \det(g) \det(\Lambda) \stackrel{!}{=} \det g$

gilt: $\det(\Lambda) = \pm 1$

Wichtigste Untermenge der Lorentz-Gruppe \mathcal{L} :
eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe

$$\mathcal{L}^+ = \{ \Lambda \mid \det(\Lambda) = +1, \Lambda^0_0 \geq 1 \}$$

Erhält Zeitrichtung und Parität, ist stetig mit der Identität verbunden.

Spezialfälle: (i) Drehungen $\Lambda_R(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R(\vec{\alpha}) \end{pmatrix}$

mit 3-dimensionaler orthogonaler Matrix $R(\vec{\alpha})$

(ii) Lorentz-Boosts: Geschwindigkeitstransformationen im Orts-Zeit-Raum (vgl. Übungsaufgabe 2):

$$\Lambda_B(\phi, \hat{\beta}) = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} \cosh(\phi) - 1 & -\sinh(\phi) \hat{\beta}^T \\ -\sinh(\phi) \hat{\beta} & [\cosh(\phi) - 1] \hat{\beta} \hat{\beta}^T \end{pmatrix}$$

$\hat{\beta} \hat{\beta}^T$ Dyade

Hierbei hängt die Geschwindigkeit \vec{v} des Ursprungs von K' in K mit der Rapidität ϕ wie folgt zusammen:

$$\vec{v} = c \tanh(\phi) \hat{\beta}$$

12.1.09

Theorie II: Vorlesung 22

Notiztitel

12.01.2009

(Fortsetzung 6.3.1)

Konkret erhält man für Ortsvektoren

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) ct & -\sinh(\phi) (\vec{x} \cdot \hat{\beta}) \\ -\sinh(\phi) ct \hat{\beta} + [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \hat{\beta}) \hat{\beta}] + \cosh(\phi) (\vec{x} \cdot \hat{\beta}) \hat{\beta} \end{pmatrix}$$

bzw. mit $\cosh(\phi) = (1 - \tanh^2(\phi))^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma$:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x}_\perp \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} ct - \beta x_{\parallel} \\ (x_{\parallel} - vt) \hat{\beta} \end{pmatrix}$$

wobei $x_{\parallel} = \vec{x} \cdot \hat{\beta}$; $\vec{x}_\perp = \vec{x} - x_{\parallel} \hat{\beta}$

Nichtrelativistischer Grenzfall: für $v \ll c$ gilt
 $\beta \ll 1$, $\gamma \rightarrow 1 \rightarrow t' = t$, $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$

Noch zu zeigen: Drehungen und Lorentz-boosts erfüllen Metrik-Bedingung $g = \Lambda^T g \Lambda$:

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \Lambda^T g \Lambda &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R^T(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R^T(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -R(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = g \quad \text{o.k.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Inverse: } \Lambda^{-1} &= g \Lambda^T g = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -R^T(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R^T(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} \\ &= \Lambda^T = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R(-\vec{\alpha}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Betrachte o.B.d.A Boost in x -Richtung (Geschw. β):

$$\Lambda^T g \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit $a = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1$, $b = -\beta\gamma^2 + \beta\gamma^2 = 0$

= g o.k. **Beachte:** hier $\Lambda = \Lambda^T$ symmetrisch.

$\Lambda \xrightarrow{\beta \rightarrow -\beta} \Lambda^{-1}$ (Vorzeichenwechsel in $\Lambda^0{}_i, \Lambda^i{}_0$)

6.4 Physikalische Konsequenzen der Lorentz-Invarianz

Zentrales Postulat der Relativitätstheorie (universelle Lichtgeschwindigkeit)

(\Rightarrow) $c^2(dt)^2 = (ds)^2 = dx^\mu dx_\mu$ ist invariant

Beachte: $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \Rightarrow dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu$
 \uparrow Poincaré-Transform \uparrow Lorentz-Transform

Rotationen im Wesentlichen trivial \rightarrow betrachte (weiter) Geschwindigkeits Transformationen (Lorentz-Boosts).

Da $\vec{x}'_1 = \vec{x}_1$ unverändert \rightarrow nur 2 interessante Komponenten

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x_{II} \right) & \text{(A)} \\ x_{II}' &= \gamma (x_{II} - vt) \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} t &= \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x_{II}' \right) & \text{(B)} \\ x_{II} &= \gamma (x_{II}' + vt') \end{aligned}$$

$\Lambda^{-1} = \gamma \Lambda^T \gamma$

Anwendung auf Stab (parallel zu $\vec{\beta}$), der in K' ruht
(Achtung: in Skript $K \leftrightarrow K'$ vertauscht)

$$x_{II}'^{(2)} - x_{II}'^{(1)} = \ell' \quad (\text{für alle Zeiten})$$

Eine Messung in K zur Zeit t ergibt:

$$\underline{\ell} = x_{II}^{(2)} - x_{II}^{(1)} \stackrel{A}{=} \left(\frac{1}{\gamma} x_{II}'^{(2)} + vt \right) - \left(\frac{1}{\gamma} x_{II}'^{(1)} + vt \right) = \underline{\frac{\ell'}{\gamma}}$$

\rightarrow Längenkontraktion: bewegte Objekte erscheinen in Bewegungsrichtung verkürzt.

\rightarrow Volumen um Faktor $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2} < 1$ kleiner.

Betrachte jetzt Uhr, die in K' ruht und anzeigt, dass zwischen 2 Ereignissen, die beide am Ort (x_{II}', x_{II}') stattfanden, die Zeit $\Delta t' = t'^{(2)} - t'^{(1)}$ vergangen ist.

Der Beobachter in K findet dagegen:

$$\Delta t = t^{(2)} - t^{(1)} = \gamma \left(t'^{(2)} + \frac{v}{c^2} x_{II}' \right) - \gamma \left(t'^{(1)} + \frac{v}{c^2} x_{II}' \right) = \underline{\underline{\gamma \Delta t'}}$$

Bewegte Uhren laufen langsamer.

Frage: wieso ist das „Zwillingsparadoxon“ paradox?

Antwort: Symmetrie - Beobachtung von Zeitdilatation und Lorentz-Kontraktion ist wechselseitig („retardierter Zwerg“).

Aber: bei konstanter Relativgeschwindigkeit trifft man sich nur einmal!

Wiedertreffen \rightarrow Beschleunigung (siehe Aufg. 36).

Beachte: Lorentz-Transf. sind i.A. nicht-kommutativ (z.B. Drehungen um verschiedene Achsen, Lorentz-Boosts in verschiedene Richtungen).

Ausnahme: Boosts in gleiche Richtung (Skript, Aufg. 2)

$$\leadsto \beta_{1+2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$$

Jetzt Transformation beliebiger Geschwindigkeiten: für Inertialsysteme K, K' mit $\vec{v}_{rel}(K', K) = \vec{v}$ gilt (s.o.):

$$\begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x}'_{\perp} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & \vec{\beta} \\ \vec{\beta} & \hat{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x'_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (*)$$

$\leftarrow 4 \times 2 \text{ Matrix}$

Mit $\vec{u} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$, $\vec{u}' \equiv \frac{d\vec{x}'}{dt'}$ und $u_{\parallel} = \vec{u} \cdot \hat{\beta}$, $\vec{u}_{\perp} = \vec{u} - u_{\parallel} \hat{\beta}$

folgt: $t = \gamma \left(t' + \frac{\beta}{c} x'_{\parallel} \right)$ (1. Zeile von *)

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} \frac{dx'_{\parallel}}{dt'} \right) \Leftrightarrow \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{1}{c^2} v u_{\parallel} \right)}$$

$$\vec{x} = \vec{x}'_{\perp} + \gamma (ct' \vec{\beta} + x'_{\parallel} \hat{\beta})$$

$$\underline{\vec{u}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dt'}{dt} \left[\frac{d\vec{x}'_{\perp}}{dt'} + \gamma \left(\beta c + \frac{dx'_{\parallel}}{dt'} \right) \hat{\beta} \right]$$

$$= \frac{\vec{u}'_{\perp} + \gamma (v + u_{\parallel}) \hat{\beta}}{\gamma \left(1 + \frac{1}{c^2} v u_{\parallel} \right)}$$

Komponentenweise erhält man also:

$$u_{\parallel} = \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + v u'_{\parallel} / c^2}; \quad \vec{u}_{\perp} = \frac{\vec{u}'_{\perp}}{\gamma \left(1 + v u'_{\parallel} / c^2 \right)} \quad (\diamond)$$

Nicht-kommutativ in $\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}$!

Zur Berechnung des Transformationsverhaltens von Winkeln setze $u_{||} = u \cos(\vartheta')$

(analog für \vec{u}') $\vec{u}_{\perp} = u \sin(\vartheta') \hat{u}_{\perp}$



$$\rightarrow u \cos(\vartheta) = \frac{u' \cos(\vartheta') + v}{1 + v u' \cos(\vartheta') / c^2}; \quad u \sin(\vartheta) = \frac{u' \sin(\vartheta')}{\gamma [1 + v u' \cos(\vartheta') / c^2]}$$

$$\rightarrow \tan(\vartheta) = \frac{\sin(\vartheta')}{\gamma [u' \cos(\vartheta') + v]}$$

Für $u' \rightarrow c$ (ultrarelativistischer Grenzfall oder Photonen, d.h. Lichtstrahl) erhält man:

$$\tan(\vartheta) = \frac{\sin(\vartheta')}{\gamma [\cos(\vartheta') + \beta]}$$

Diese Richtungsänderung des Lichts beim Übergang auf ein anderes Inertialsystem (Aberration) wurde schon 1725 von Bradley beobachtet (Umlaufgeschw. der Erde um die Sonne): $\Delta \vartheta \sim \beta \sin(\vartheta') + \mathcal{O}(\beta^2)$

14.1.2009

+ Evaluation

Theorie II: Vorlesung 23

Notiztitel

15.01.2009

6.5 4-Vektoren

Jede (4-komponentige) Größe $a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)$, die genau so wie der 4-Ortsvektor x^μ transformiert wird

$$(a')^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu$$

heißt **kontravarianter 4-Vektor**; jede Größe a_μ , die gemäß $(a')_\mu = \Lambda_\mu^\nu a_\nu$; $\Lambda_\mu^\nu = g_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma g^{\sigma\nu}$ transformiert wird, heißt **kovarianter 4-Vektor**.

Umwandlung mit metrischem Tensor: $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$; $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$.

Das **Quadrat** eines 4-Vektors $a^2 = a_\mu a^\mu$ ist ein **Lorentz-Skalar**, d.h. invariant unter Lorentz-Transformationen, ebenso wie das allgemeine **Skalarprodukt** (hier **nicht** positiv definit!) $a \cdot b = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu$

Falls $\varphi(x)$ ein Skalar ist, dann ist der **4-Gradient**

$$\partial_\mu \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \vec{\nabla} \varphi \right) \text{ ein kovarianter 4-Vektor.}$$

Dagegen ist die **4-Divergenz** $\partial \cdot a = \partial^\mu a_\mu = \partial_\mu a^\mu = \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\mu}$ ein Lorentz-Skalar.

Wir definieren die **4-Geschwindigkeit** dimensionslos als

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}; \quad ds = \frac{cdt}{\gamma} = c d\tau$$

↑ 4-Vektor ↑ Skalar

Offensichtlich ist u^μ 4-Vektor, z. B. im Gegensatz zu $\frac{dx^\mu}{dt}$.
Achtung: in Literatur auch $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ gebräuchlich.

Explizite Form: $u^\mu = \frac{\gamma}{c} \frac{d}{dt}(ct, \vec{x}) = \gamma_u (1, \vec{\beta}_u)$

Beachte: $u^2 = \gamma_u^2 (1 - \beta_u^2) = 1$

Auch 4-Vektor: 4-Beschleunigung $\frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2 x^\mu}{ds^2}$; steht senkrecht auf 4-Geschwindigkeit

Beispiele/Anwendungen: a) Ladung/Strom

Experimentelles Faktum: elektrische Ladung ist L-Skalar.

Längen/Volumenkontraktion \Rightarrow Ladungsdichte wird für $\vec{v}_{rel}(K', K) = \vec{u}$ als $\rho = \gamma_u \rho_0$ transformiert, falls die Ladung in K' ruht. Zusätzlich misst man in K auch eine Stromdichte $\vec{j} = \rho \vec{u} = \gamma_u \rho_0 \vec{u}$. Zusammen \leadsto

4-Stromdichte $j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j}) = \rho_0 c \gamma_u (1, \vec{\beta}_u) = \rho_0 c u^\mu$, die als 4-Vektor transformiert wird.

Kontinuitätsgleichung: $0 = \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{j} = \partial_\mu j^\mu$ (L-Skalar)

b) Elektromagnetische Potentiale

Aus den Maxwell-Gleichungen lässt sich ableiten (siehe

Skript): $\frac{1}{\epsilon_0 c} j^\mu = \square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu)$ mit 4-Potential

$A^\mu = (\phi, c\vec{A})$, welches folglich als 4-Vektor transformiert

wird. Lorentz-Eichung $\partial_\nu A^\nu = 0 \leadsto \square A^\mu = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\mu$

(in homogene Wellengleichung).

Homogene Lösung: Ebene Wellen $A^\mu(x) = A_0^\mu e^{-ik_\nu x^\nu}$ mit 4-Wellenvektor $k^\nu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$; $\omega = \frac{ck}{c}$ ($\Rightarrow k^2 = 0$)

Beachte: die Phase $\varphi(x) = k_\nu x^\nu$ ist Lorentz-Skalar.

Explizit lautet die Transformation für den 4-Wellenvektor $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$ mit $k_{||} = \vec{k} \cdot \hat{n} = k \cos(\vartheta)$; $k_\perp = \vec{k} - k_{||} \hat{n} = k \hat{k}_\perp \sin(\vartheta)$:

$$\begin{pmatrix} \omega'/c \\ \vec{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{k}_\perp \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_{||} \end{pmatrix}$$

$$\omega' = \gamma(\omega - \beta c k_{||}) = \gamma \omega [1 - \beta \cos(\vartheta)]$$

Relativistischer Doppler-Effekt

Spezialfälle: (i) longitudinaler Doppler-Effekt

$$\omega' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \omega \quad (\vartheta=0); \quad \omega' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \omega \quad (\vartheta=\pi)$$

(ii) transversaler Doppler-Effekt $\omega = \frac{\omega'}{\gamma} < \omega' \quad (\vartheta = \frac{\pi}{2})$
 z. B. k' Ruhesystem eines Sterns \nwarrow Beobachter-System
 \rightarrow Rotverschiebung

Transformationsgesetz für Winkel:

$$\tan(\vartheta') = \frac{|\vec{k}'_\perp|}{k'_{||}} = \frac{|\vec{k}_\perp|}{\gamma(k_{||} - \beta \frac{\omega}{c})} = \frac{\sin(\vartheta)}{\gamma[\cos(\vartheta) - \beta]}$$

wie aus Kap 6.4 bekannt.

6.6 Masse und Energie

Betrachten wir ein Teilchen mit Ruhemasse m_0 und 4-Geschwindigkeit u^μ . Offensichtlich ist $p^\mu \equiv m_0 c u^\mu$ ein 4-Vektor. Für die Ortskomponenten gilt:

$$p^i = m_0 c \gamma \beta^i = m_0 \gamma \frac{dx^i}{dt} \xrightarrow{|\vec{u}| \rightarrow 0} m_0 \frac{dx^i}{dt}$$

→ relativistischer Impuls $\vec{p} = m_u \vec{u}$ mit $m_u = \gamma_u m_0$

Bedeutung der Zeitkomponente p^0 ?

$$p_\mu p^\mu = m_0^2 c^2 \underbrace{u_\mu u^\mu}_{=1} = m_0^2 c^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2$$

$$\Rightarrow p^0 = \sqrt{m_0^2 c^2 + |\vec{p}|^2} = m_0 c \sqrt{1 + \left(\frac{|\vec{p}|}{m_0 c}\right)^2}$$
$$= m_0 c \left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{2(m_0 c)^2} + \mathcal{O}(c^{-4})\right)$$

$$\Rightarrow c p^0 = m_0 c^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m_0} + \mathcal{O}(c^{-2})$$

↑ nichtrel. kinetische Energie

Daher ist $E \equiv c p^0$ die Energie des Teilchens; die Ruheenergie $m_0 c^2$ kann prinzipiell durch Zerstrahlung freigesetzt werden (siehe Skript).

Also: 4-Impuls $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, m \vec{u}\right)$; $m \equiv m_u = m_0 \gamma_u$

Quantenmechanik: Licht wird in Form von Photonen ausgesendet mit Energie $E = \hbar \omega$. Es gilt dann:

$$p^\mu = \hbar k^\mu \quad (\text{für } m_0 = 0).$$

6.7 Die Lorentz-Kraft und elektromagnetische Felder

Das **Dyadische Produkt** $D^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu$ von kontravarianten 4-Vektoren a^μ, b^μ wird wie folgt transformiert:

$$(D')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma a^\rho b^\sigma = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma D^{\rho\sigma}$$

(= $(a')^\mu (b')^\nu$)

Die **Dyaden** $\left\{ \begin{array}{l} D^{\mu\nu} (= a^\mu b^\nu) \\ D_{\mu\nu} (= a_\mu b_\nu) \\ D_\mu{}^\nu (= a_\mu b^\nu) \\ D^\mu{}_\nu (= a^\mu b_\nu) \end{array} \right\}$ heißen $\left\{ \begin{array}{l} \text{kontravariant} \\ \text{kovariant} \\ \text{gemischt} \\ \text{''} \end{array} \right\}$

Sie können mit dem metrischen Tensor ineinander überführt werden: $D_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} D^{\rho\sigma}$ etc.

Jede Größe $T^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$), die wie $D^{\mu\nu}$ transformiert wird, heißt **kontravarianter Tensor 2. Stufe**.

Analog: • **kovariante und gemischte Tensoren**
• Tensoren anderer Stufen.

Beachte: • 4-Vektoren sind Tensoren 1. Stufe,
• 4-Skalare sind Tensoren 0. Stufe

Die Bildung von Skalarprodukten führt zur **Verjüngung** der Tensoren. So sind z.B.

$d^\mu = D^{\mu\nu} c_\nu = a^\mu b^\nu c_\nu$ und $t^\mu = T^{\mu\nu} c_\nu$
jeweils (kontravariante) 4-Vektoren.

Folglich ist der **elektromagnetische Feldtensor**

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

ein antisymmetrischer kovarianter Tensor 2. Stufe mit

$$(F')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$$

Mit $F^{\mu\mu} = 0$, $F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = [-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}]_i = E_i$

und $F^{ij} = \epsilon_{ijk} (-c B_k)$ (wegen $B_k = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \epsilon_{ijk} \partial_i A_j / c$)

folgt Komponentenweise:

$$F^{\mu\nu} (= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit kann man direkt das Verhalten von \vec{E} und \vec{B} unter Raumspiegelungen ableiten:

$$F^{\mu\nu} \xrightarrow{\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}} (F')^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ -E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ -E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix} (= F_{\mu\nu})$$

d.h. $\vec{B} \rightarrow \vec{B}$ (Pseudovektor), $\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$ (echter Vektor)

19.1.2009

Theorie II: Vorlesung 24

Notiztitel

16.01.2009

(Fortsetzung 6.7)

Aus der Transformationsvorschrift für den Feldtensor folgt die für \vec{E} und \vec{B} . So erhält man für einen Lorentz-Boost (siehe Skript/Übung):

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - (\gamma - 1)(\hat{\beta} \cdot \vec{E})\hat{\beta}$$

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \frac{1}{c}\hat{\beta} \times \vec{E}) - (\gamma - 1)(\hat{\beta} \cdot \vec{B})\hat{\beta}$$

bzw. komponentenweise (siehe Übung):

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel}$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp})$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\hat{\beta} \times \vec{E}_{\perp})$$

Für ein Teilchen mit Ladung q stellt der 4-Vektor $K^{\mu} \equiv q F^{\mu\nu} u_{\nu}$ die relativistische Verallgemeinerung der **Lorentz-Kraft** $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ dar:

$$\begin{aligned} K^{\mu} &= q(F^{\mu 0} u_0 + F^{\mu i} u_i) = q\gamma_u [F^{\mu 0} - \underbrace{F^{\mu j} \beta_j}_{(-E_j/c \text{ & } B_k)(-\beta_j)}] \\ &= q\gamma_u (\vec{E} \cdot \hat{\beta}, \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

für $\mu=i$

Die **Bewegungsgleichung** $m_0 \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = K^{\mu}$ ist sicher

korrekt im momentanen Ruhesystem: $(0, m_0 \frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2}) = (0, q\vec{E})$.
 \leadsto (kovariante Formulierung) gilt in jedem Inertialsystem.

Check: $u^2 = 0 \Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} u_{\mu} \frac{d u^{\mu}}{d\tau} = \frac{1}{m_0 c} u_{\mu} K^{\mu} = \frac{q}{m_0 c} u_{\mu} F^{\mu\nu} u_{\nu} = 0$ ✓
↓ antisymmetrisch

Kapitel 9: Relativistische Dynamik

Theorie I: $\vec{F} = m \vec{a}$

Kapitel 6: relativistische Verallgemeinerung

Kapitel 7+8: Analytische Mechanik:
Hamilton'sches Prinzip
Lagrange - Gleichungen
Hamilton - Gleichungen
Hamilton - Jacobi - Formalismus
...

Frage: Relativistische Verallgemeinerung der Methoden von Kap. 7+8 möglich?

Antwort: Im Prinzip ja: sogar relativ einfach für einzelne Teilchen

Aber: Fernwirkungen verboten \rightarrow
Zwangsbedingungen problematisch,
(Gravitation \rightarrow allgemeine Relativitätstheorie)

(Skript 9.1 + 9.2: Wiederholung)

9.3 Kräftefreie Teilchen

Der gesuchte Formalismus muss folgendes reproduzieren:

(i) die freie Bewegungsgleichung $m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$

(mit Lösung: $u^\mu = \text{konstant}$, d.h. geradlinig gleichförmige Bewegung)

(ii) die „Einstein-Formel“ $E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$

(iii) den nichtrelativistischen Grenzfall.

Ansatz für Lorentz-invariantes Wirkungsfunktional
(Max Planck, 1906):

$$S_M = S_1[x] = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Materie}}} -m_0 c \int_{t_1}^{t_2} ds = \underset{\substack{\uparrow \uparrow \\ \text{Lorentz-Skalare}}} -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma_u(t)}$$

Hierbei sind den Ereignissen „1“ und „2“ die Koordinaten $x_1^\mu = (ct_1, \vec{x}_1)$ bzw. $x_2^\mu = (ct_2, \vec{x}_2)$ zugeordnet (in einem beliebig, aber fest, gewählten Inertialsystem). Diese sind bei Variation von S festzuhalten.

(i) Zur Bestimmung des stationären Punkts $\vec{0} = \frac{\delta S}{\delta \vec{x}(t)}$

$$\text{schreiben wir } S_M = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$$

$$\text{mit } L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = -\frac{m_0 c^2}{\gamma_u(t)} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{c^2}}$$

Kontrolle: im nichtrelativistischen Limes erhält man:

$$\begin{aligned} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) &= -m_0 c^2 \left[1 - \frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{2c^2} + \mathcal{O}(c^{-4}) \right] & L = -m_0 c^2 t \\ &= -m_0 c^2 + \frac{1}{2} m |\dot{\vec{x}}|^2 + \mathcal{O}(c^{-2}) \xrightarrow{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2} m_0 |\dot{\vec{x}}|^2 + \frac{d}{dt} L & \text{o.k.} \end{aligned}$$

$$\leadsto \vec{0} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = -\frac{d}{dt} \left[-m_0 c^2 \frac{-\dot{\vec{x}}/c^2}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2}} \right]$$

$$= -m_0 \frac{d}{dt} (\gamma_u \vec{u})$$

$$\text{Lösung: } \vec{u} \text{ konstant} \Rightarrow m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad \square$$

(ii) Hier: S_m ist für physikalische Bahn minimal:

Abstand $\|x_1^m - x_2^m\|$ zeitartig (sonst keine Bahn $1 \rightarrow 2$)

\rightarrow es existiert ein Inertialsystem K' mit $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$

\rightarrow Gesamtabstand $\int_1^2 ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\frac{1}{\gamma_u(t)}}_{\leq 1}$

wird durch ruhendes Teilchen maximiert

\rightarrow ruhendes Teilchen (in K') minimiert S_m

\rightarrow Bewegung in jedem IS geradlinig gleichförmig. \square

Verallgemeinerter Impuls (wie üblich):

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m_0 \dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2}} = \gamma m_0 \vec{u}$$

$$\rightarrow p_i = m_0 c u^i$$

Lagrange-Funktion nicht explizit zeitabhängig

(iii) \rightarrow Energie ist durch das Jacobi-Integral gegeben:

$$\mathcal{E}(\dot{\vec{x}}) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L = \frac{m_0 |\dot{\vec{x}}|^2}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2}} - \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{c^2}} \right)$$

$$= \gamma_u m_0 c^2 (\beta^2 + (1 - \beta^2))$$

$$= \gamma_u m_0 c^2 = m_0 c u^0$$

$$\Rightarrow p^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p} \right) = m_0 c u^\mu$$

$$\mathcal{E}(\vec{p}) = H(\vec{x}, \vec{p}; t) = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{nichtrelativistischer Limes: } \varepsilon(\vec{p}) = m_0 c^2 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + \dots \\ \text{ultrarelativistischer Limes: } \varepsilon(\vec{p}) = |\vec{p}|c \quad (m_0 = 0) \end{array} \right)$$

Hamilton-Gleichungen:

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = 0; \quad \dot{\vec{x}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}c}{\sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m_0^2 c^4}}$$

$\rightarrow \vec{u} = \dot{\vec{x}}$ konstant \rightarrow geradlinig gleichf. Bewegung. \square

(iv) Manifest kovariante Formulierung:

$$\delta S_m = -m_0 c \int_1^2 \delta(ds) = -m_0 c \int_1^2 \delta \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$$

$$= -m_0 c \int_1^2 \frac{dx^\mu}{ds} \delta(dx_\mu) = -m_0 c \int_1^2 u^\mu d(\delta x_\mu)$$

$$\delta \sqrt{f} = \frac{\delta f}{2\sqrt{f}}$$

$$= -m_0 c u^\mu \delta x_\mu \Big|_1^2 + m_0 c \int_1^2 \delta x_\mu \frac{du^\mu}{ds} ds \stackrel{!}{=} 0$$

Dies kann für beliebige δx^μ nur gelten, falls

$$\frac{du^\mu}{ds} = 0 \quad \rightarrow \text{geradlinig gleichf. Bewegung. } \square$$

Relativistische Verallgemeinerung des Drehimpulses

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} = \begin{pmatrix} x_2 p_3 - x_3 p_2 \\ x_3 p_1 - x_1 p_3 \\ x_1 p_2 - x_2 p_1 \end{pmatrix}; \quad L_i = \varepsilon_{ija} x_j p_a$$

(als Erhaltungsgröße im Zentralpotential)?

\vec{L} ist Pseudovektor \rightarrow müsste räumlich-räumlichen Komponenten eines Tensors entsprechen.

Ansatz: $L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$ (da kräftefrei)

$$\begin{aligned} \text{Check: } \frac{dL^{\mu\nu}}{ds} &= \frac{dx^\mu}{ds} p^\nu + x^\mu \frac{dp^\nu}{ds} - \frac{dx^\nu}{ds} p^\mu - x^\nu \frac{dp^\mu}{ds} \\ &= u^\mu p^\nu - u^\nu p^\mu \\ &= m_0 c (u^\mu u^\nu - u^\nu u^\mu) = 0 \end{aligned}$$

Der Tensor ist also (für freies Teilchen) tatsächlich erhalten. Explizit in Komponenten:

$$L^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\ell}^T \\ \vec{\ell} & \begin{matrix} 0 & L_3 & -L_2 \\ -L_3 & 0 & L_1 \\ L_2 & -L_1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}; \quad \vec{\ell} = \frac{\epsilon}{c} \vec{x} - \vec{p} ct$$

Neben dem (Pseudovektor) Drehimpuls finden wir also eine weitere Erhaltungsgröße, den echten Vektor $\vec{\ell}$, der die geradlinig gleichförmige Bewegung beschreibt:

$$\vec{x} = \frac{c}{\epsilon} \vec{\ell} + \vec{u} t; \quad \vec{u} = \frac{c^2}{\epsilon} \vec{p} = \frac{\vec{p}}{\gamma u m_0}$$

Wie zuvor entsprechen die Erhaltungsgrößen Invarianzen der Wirkung: Translation \Leftrightarrow Impuls (Ort) bzw. Energie (Zeit), Lorentzinvarianz \Leftrightarrow Drehimpuls

Insgesamt: Invarianz unter Poincaré-Transf. // 21.109

Theorie II: Vorlesung 25

Notiztitel

21.01.2009

9.4 Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld

Ausgangspunkt: (i) Relativistische Wirkung $S_m = -m_0 c \int_1^2 ds$ des freien Teilchens (9.3).

(ii) Nichtrelativistische Wirkung / Lagrange-Funktion geladener Teilchen im elektromagnetischen Feld (7.2):

$$\tilde{L} = \tilde{L}_m + \tilde{L}_{ww} \quad (\text{hier: Tilde} \sim \text{nichtrelativistisch})$$

$$\text{mit } \tilde{L}_m = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2, \quad \tilde{L}_{ww} = q [\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} - \phi]$$

$$\rightarrow \tilde{S}_{ww} = q \int_{t_1}^{t_2} dt [\dot{\vec{u}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) - \phi(\vec{x}, t)]$$

$$= q \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma_u} [\gamma_u \dot{\vec{u}} \cdot (c \vec{A}) - \gamma_u \phi]$$

$$u_\mu = \gamma_u (1, -\dot{\vec{x}})$$

$$A^\mu = (\phi, c \vec{A}) \quad \Rightarrow \quad = -\frac{q}{c} \int_1^2 ds u_\nu A^\nu$$

Überraschung: der „nichtrelativistische Ausdruck“ \tilde{S}_{ww} ist manifest Lorentz-invariant und stellt somit auch den korrekten relativistischen Ausdruck dar: $S_{ww} = \tilde{S}_{ww}$

$$\Rightarrow S = S_m + S_{ww} = \int_1^2 ds (-m_0 c - \frac{q}{c} u_\nu A^\nu) \\ = \int_{t_1}^{t_2} dt (-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{u}}|^2}{c^2}} + q \dot{\vec{u}} \cdot \vec{A} - q \phi)$$

Der Integrand ist natürlich die relativistisch korrekte

Lagrange-Funktion $L = L_m + L_{ww} = L_m + \tilde{L}_{ww}$

Hieraus leiten wir den **kanonischen Impuls**

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{u}} = \gamma m_0 \vec{u} + q \vec{A} \equiv \vec{\pi} + q \vec{A}$$

ab, wobei $\vec{\pi} \equiv \vec{p} - q \vec{A} = \gamma m_0 \vec{u}$ den **kinetischen Impuls** bezeichnet.
Faktor $\frac{1}{c}$ wegen $A^\mu = (\phi, c\vec{A})$

In 4-Vektoren: $p^\mu = \underline{m_0 c u^\mu + \frac{q}{c} A^\mu} \equiv \pi^\mu + \frac{q}{c} A^\mu$

Die **Hamilton-Funktion** folgt durch Legendre-Transform:

$$\begin{aligned} H &= \vec{u} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{u}} - L \\ &= \vec{u} \cdot (\gamma m_0 \vec{u} + q \vec{A}) - \left(\frac{-m_0 c^2}{\gamma} + q \vec{u} \cdot \vec{A} - q \phi \right) \\ &= \gamma m_0 c^2 \left(\frac{\vec{u}^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) + q \phi = \underline{\gamma m_0 c^2} + q \phi(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(\vec{x}, \vec{p}, t) &= \sqrt{\vec{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4} + q \phi \\ &= \sqrt{(\vec{p} - q \vec{A})^2 c^2 + m_0^2 c^4} + q \phi \end{aligned}$$

Für die Zeitkomponente des 4-Impulses gilt:

$$p^0 = m_0 c \gamma_u + \frac{q}{c} \phi = \frac{H}{c} \Rightarrow p^\mu = \left(\frac{H}{c}, \vec{p} \right)$$

Beachte: H darf nur als Energie interpretiert werden, falls ϕ nicht explizit zeitabhängig ist: $\phi = \phi(\vec{x})$. Dies legt die Eichung von ϕ bis auf eine Konstante fest.

In jedem Fall ist die **intrinsische Energie**

$$E(\vec{u}) = \gamma m_0 c^2 = \sqrt{\vec{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

(kinetische \dot{E} + Ruheenergie) wohldefiniert.

Ableitung der Bewegungsgleichung aus Hamilton'schem Prinzip in kovarianter Form:

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta S = \delta \int_1^2 (-m_0 c \sqrt{dx_\mu dx^\mu} - \frac{q}{c} A^\nu dx_\nu) \\
 \delta(dx^\mu) &= d(\delta x^\mu) \quad (\nu \rightarrow \mu) \\
 &\downarrow \\
 &= \int_1^2 \left[-m_0 c \frac{dx^\mu}{ds} d(\delta x_\mu) - \frac{q}{c} A^\mu d(\delta x_\mu) - \frac{q}{c} (\partial^\mu A^\nu) (\delta x_\mu) dx_\nu \right] \\
 &= \underbrace{-\left(m_0 c u^\mu + \frac{q}{c} A^\mu\right) \delta x_\mu}_=0 \Big|_1^2 \\
 &+ \int_1^2 \delta x_\mu ds \left[m_0 c \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{q}{c} \partial^\nu A^\mu \frac{dx_\nu}{ds} - \frac{q}{c} \partial^\mu A^\nu \frac{dx_\nu}{ds} \right]
 \end{aligned}$$

Variationsprinzip: $[...] = 0$

$$\sim \boxed{m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = m_0 c^2 \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = q u_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = q u_\nu F^{\mu\nu} = K^\mu} *$$

Alt. Ableitung über Lagrange-/Hamilton-Gleichungen: kompliziert

Wir haben also die postulierte Bewegungsgleichung (6.7/9.2) reproduziert. Zur Interpretation schreiben wir um:

$$\begin{aligned}
 m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &= m_0 \gamma_u \frac{d}{dt} (c u^\mu) = \gamma_u \frac{d\pi^\mu}{dt} \\
 &\stackrel{*}{=} K^\mu = q \gamma_u (\vec{E} \cdot \vec{\beta}_u, \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})
 \end{aligned}$$

Mit $\pi^\mu = \left(\frac{\epsilon}{c}, \vec{\pi}\right)$ folgt daraus

$$\frac{d}{dt} \vec{\pi} = q (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}); \quad (\vec{\pi} = \gamma_u m_0 \vec{u})$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{u}$$

Die Ausdrücke für die zeitliche Änderung des kinetischen Impulses und für die zugeführte Leistung haben also die gleiche Form wie im nichtrelativistischen Fall.

Invarianzen: Zeitumkehr ($t \rightarrow -t$), Parität ($\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$),
 allg. Poincaré-Transformation $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$
 und Eichung $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ \leftarrow L-Skalar (siehe Skript).

9.5 Das Coulomb-Problem für ein einzelnes Teilchen

Wir betrachten die Dynamik eines geladenen relativistischen Teilchens (Ladung q , Ruhemasse m_0) in einem Zentralpotential der Form $\phi(\vec{x}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 x}$ (mit $x = |\vec{x}|$), das Vektorpotential sei $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{0}$. Interpretation: immobilisiertes Teilchen (mit Masse $M_0 \rightarrow m_0$) im Ursprung.

Aus der Wirkung $S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} - q\phi(\vec{x}) \right]$

folgen die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = q \vec{E}; \quad \vec{\pi} = \gamma_u m_0 \vec{u}; \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{q_0 \hat{e}_x}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

Neben der Gesamtenergie $E_{\text{ges}} = \sqrt{\pi^2 c^2 + m_0^2 c^4} - \frac{a}{x}$; $a = \frac{-qq_0}{4\pi\epsilon_0}$

ist der Drehimpuls des Teilchens erhalten:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{x} \times \vec{\pi}) = \vec{u} \times \vec{\pi} + \vec{x} \times \frac{d\vec{\pi}}{dt} = \vec{x} \times q \vec{E} = \vec{0}$$

Erinnerung: im nichtrelativistischen Grenzfall ist zusätzlich der Runge-Lenz-Vektor $\vec{a} = \vec{u} \times \vec{L} - a \hat{e}_x$ erhalten, der für $E_{ges}^{NR} < 0$ vom Brennpunkt der Bahnellipse zum Perihel zeigt.

Wir wählen nun $\hat{e}_3 = \hat{L}$ und beschreiben die Umlaufbahn in der (x_1, x_2) -Ebene in Polarkoordinaten (x, φ) .

$$\leadsto L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\varphi}^2)} + \frac{a}{x}$$

Daraus ergeben sich die zu x bzw. φ konjugierten

Impulse $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \gamma m_0 \dot{x} \equiv \pi_x$; $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \gamma m_0 x^2 \dot{\varphi} \equiv \pi_\varphi$

und die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d\pi_x}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} = \gamma m_0 x \dot{\varphi}^2 - \frac{a}{x^2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d\pi_\varphi}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

φ zyklisch $\leadsto \pi_\varphi$ erhalten mit $\pi_\varphi = |\vec{L}|$:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{x} \times \vec{\pi} = \gamma m_0 \vec{x} \times \vec{u} = \gamma m_0 \vec{x} \times (\dot{x} \hat{e}_x + x \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi) \\ &= \gamma m_0 x^2 \dot{\varphi} (\hat{e}_x \times \hat{e}_\varphi) = \pi_\varphi \hat{e}_3 \end{aligned}$$

Wir werden sehen, dass sich die Form der Bahnen im relativistischen Fall teils fundamental von den Kepler-Bahnen unterscheidet. Zunächst betrachten wir jedoch den einfachsten Fall: **Kreisbahnen**.

Bei Kreisbahnen gilt: x konstant $\leadsto \dot{x} = 0 \leadsto \pi_x = 0$
 $\leadsto \gamma m_0 x \dot{\varphi}^2 = \frac{a}{x^2}$ *

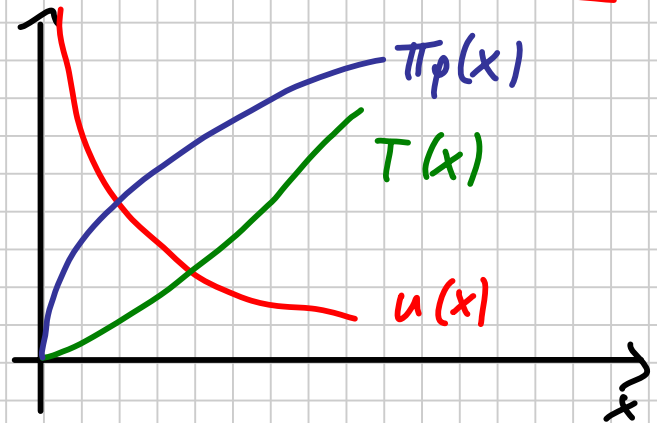
Frage: sind beliebige Radien, Geschwindigkeiten, Drehimpulse, Umlaufzeiten möglich?

Zunächst **nichtrelativistisch**:

$$m_0 x \dot{\varphi}^2 = \frac{a}{x^2} \Leftrightarrow m_0 u^2 = \frac{a}{x} \Leftrightarrow \underline{u(x) = \sqrt{\frac{a}{m_0 x}}}$$

$$\underline{\pi_\varphi = |\vec{L}| = m_0 u x = \sqrt{m_0 a x}}$$

$$\underline{T = \frac{2\pi x}{u} = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{a}} x^{3/2}}$$



Antwort 1: Im nichtrelativistischen Grenzfall ja!

Eine Einschränkung bei der **relativistischen Betrachtung** ist klar: $u(x) < c$ Konsequenzen für $x_{\min/\max}, \pi_\varphi$?

$$\leadsto a = \overset{*}{\gamma} m_0 x^3 \dot{\varphi}^2 = \pi_\varphi \dot{\varphi} = \pi_\varphi u < \pi_\varphi c$$

$$\Rightarrow \bar{a} = \frac{a}{\pi_\varphi c} = \beta < 1$$

$$\Leftrightarrow \pi_\varphi > \frac{a}{c}$$

26.1.09

Theorie II: Vorlesung 26

Notiztitel

26.01.2009

(Fortsetzung 9.5)

Antwort 2a:

Bei gegebener Wechselwirkungsstärke $a = \frac{-q q_0}{4 \pi \epsilon_0}$ sind Kreisbahnen also nur mit einem **Mindest-drehimpuls** $\pi_{\varphi, \min} = \frac{a}{c}$ möglich.

Mechanismus? Werden die möglichen Radien dadurch eingeschränkt? Wie ändert sich die Abhängigkeit $\pi_{\varphi}(x)$?

Rechnung komplizierter wegen $\gamma = \gamma(u)$:

$$\gamma m_0 x \dot{\varphi}^2 = \frac{a}{x^2} \Leftrightarrow \frac{m_0 x^3 \dot{\varphi}^2}{a} = \gamma^{-1}$$
$$\Rightarrow \frac{c^4 m_0^2 x^6 \dot{\varphi}^4}{a^2 c^4} = 1 - \left(\frac{x \dot{\varphi}}{c}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \beta^4 + \alpha \beta^2 - \alpha = 0; \quad \alpha \equiv \left(\frac{a}{m_0 x c^2}\right)^2$$

$$\beta^2 = \sqrt{\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)} - \frac{\alpha}{2}$$

$\alpha \rightarrow 0 \rightarrow \sqrt{\alpha} \sim \frac{1}{x}$
 $\alpha \rightarrow \infty \rightarrow 1 - \frac{1}{\alpha}$
 $\sim \gamma \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \sqrt{\alpha} \sim \frac{1}{x}$

\leadsto Antwort 2b

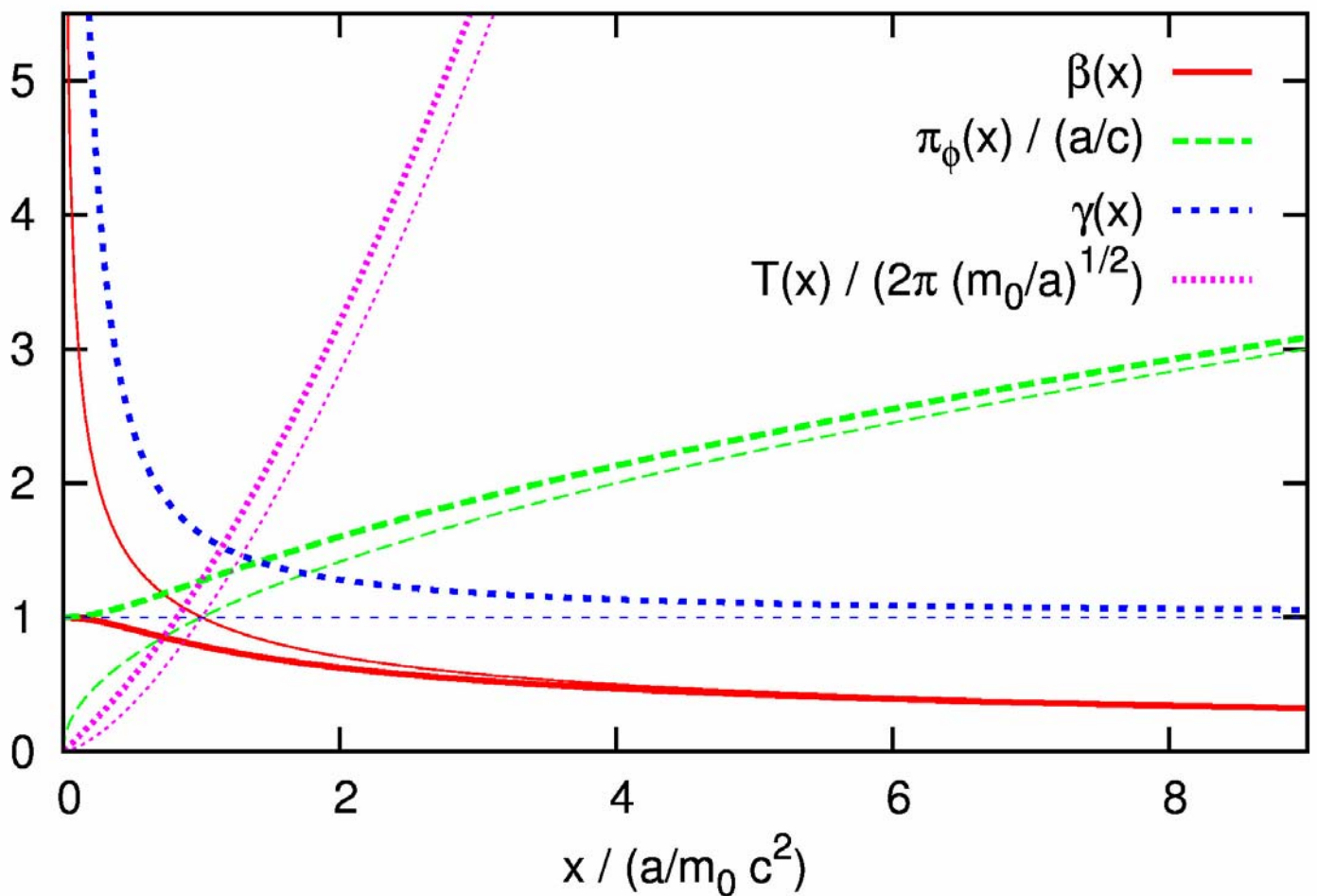
Kreisbahn mit beliebigem Radius möglich, auch jede Geschwindigkeit $0 < \beta < 1$ möglich.

Jetzt Drehimpuls explizit:

$$\pi_\varphi = m_0 x \dot{\varphi} \gamma = m_0 c x \frac{\beta(x)}{\sqrt{1-\beta^2(x)}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{a}{c}$$

Alternativer Ausdruck: $\pi_\varphi = \frac{a}{\beta c}$

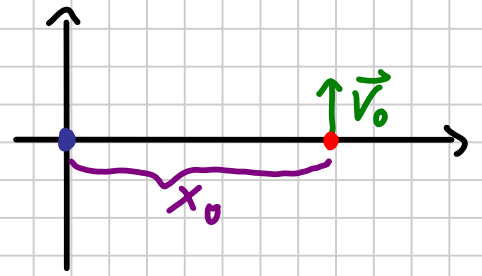
Abbildung: Verlauf der dynamischen Größen für Kreisbahnen mit Radius x



dicke Linien: relativistisch, dünne Linien: nichtrel.

Jetzt allgemeinere Interpretation: Kreisbahnen als Gleichgewichtszustände, bezogen auf den radialen Abstand x (bei festem Drehimpuls π_φ)

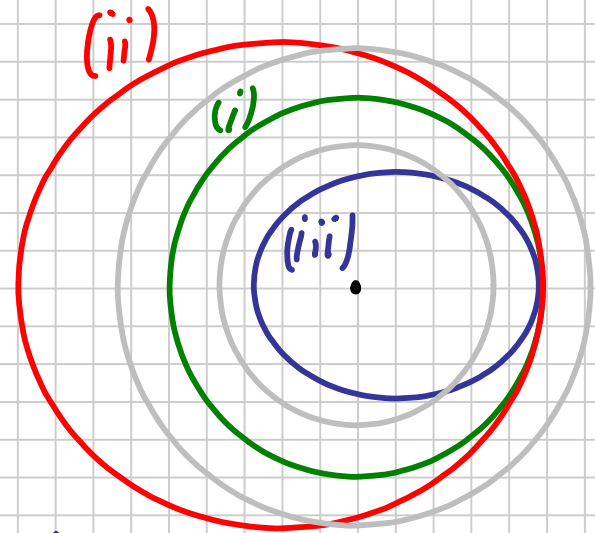
Gedankenexperiment: Das geladene Teilchen wird im Abstand x_0 vom Ursprung mit der tangentialen Geschwindigkeit $\vec{u}_0 = u_0 \hat{e}_\varphi$ „gestartet“. Bahn?



Klar: $\pi_\varphi = m_0 \gamma_{u_0} u_0 x_0$ erhalten

a) nichtrelativistisch: 3 Fälle

(i) $\pi_\varphi = \pi_\varphi^K(x_0) \rightarrow$ Kreisbahn
 \uparrow Drehimpuls für Kreisbahn mit Radius x_0



(ii) $\pi_\varphi > \pi_\varphi^K(x_0)$, $\epsilon_g^{NR} < 0$

\rightarrow es existiert ein „Gleichgewichtsradius“ x_g mit $\pi_\varphi = \pi_\varphi^K(x_g)$

\rightarrow Abstand $x(\varphi)$ schwingt um $x_g > x_0$ mit $x_{\min}(\varphi) = x_0$ (Startpunkt = Perihel)

genauer (3.4.5): $x^{-1}(\varphi) = p^{-1} + A \cos(\varphi)$; $p \approx x_g$ Ellipse

(iii) $0 < \pi_\varphi < \pi_\varphi^K(x_0)$: analog zu (ii) mit $x_g < x_0$
 (Ellipse mit Startpunkt = Aphel)

(iv) $\epsilon_g^{NR} \geq 0$: offene Bahnen (Parabel/Hyperbel)

b) relativistisch:

(i') $\pi_\varphi = \pi_\varphi^k(x_0)$ wie (i)

(ii') $\pi_\varphi > \pi_\varphi^k(x_0), \epsilon_g^{NR} < 0$

Abstand $x(\varphi)$ schwingt um Gleichgewichtsabstand $x_g > x_0$ mit $x_{\min}(|\varphi|) = x_0$

Aber: Bahn nicht exakt periodisch (s.u.)

(iii') $0 < \pi_\varphi < \pi_\varphi^k(x_0)$

Fallunterscheidung:

A) $\pi_\varphi > \pi_{\varphi, \min} = \frac{a}{c}$

→ Bahnen analog zu (iii) bzw. (ii') (s.u.)

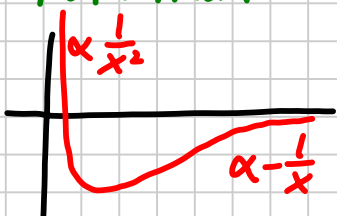
B) $\pi_\varphi \leq \pi_{\varphi, \min} = \frac{a}{c}$

→ Zu diesem Startdrehimpuls existiert kein Gleichgewichtsradius (> 0)

→ Teilchen spiralt mehr oder weniger abgebremst in Kern (s.u.)

(iv') $\epsilon_g^{NR} \geq 0$: offene Bahnen (wie iv), aber andere Gestalt

Bemerkung: Im nichtrelativistischen Fall lässt sich ein minimaler Abstand für $\pi_\varphi \neq 0$ aus dem effektiven Potential $V_\pm(x) = V(x) + \frac{L^2}{2\mu x^2} = \frac{L^2}{2\mu x^2} - \frac{a}{x}$ ableiten.



Relativistisch existiert ein solches Potential nicht (da $T \neq T_x + T_\varphi$)!

Jetzt Rechnung für allgemeine Bahnen: Wegen

$$\vec{\pi} = \gamma m_0 (\dot{x} \hat{e}_x + x \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi) = \pi_x \hat{e}_x + \frac{\pi_\varphi}{x} \hat{e}_\varphi$$

gilt für die erhaltene Gesamtenergie

$$E_g = \sqrt{\vec{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4} - \frac{a}{x} = c \sqrt{\pi_x^2 + \frac{\pi_\varphi^2}{x^2} + (m_0 c)^2} - \frac{a}{x}$$

$$\leadsto (\pi_x)^2 = \frac{1}{c^2} \left(E_g + \frac{a}{x} \right)^2 - \frac{\pi_\varphi^2}{x^2} - (m_0 c)^2$$

$$\leadsto \left(\frac{\pi_x}{\pi_\varphi} \right)^2 = \frac{1}{\pi_\varphi^2 c^2} \left(E_g + \frac{a}{x} \right)^2 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{m_0 c}{\pi_\varphi} \right)^2$$

Andererseits gilt:

$$\frac{\pi_x}{\pi_\varphi} = \frac{\gamma m_0 \dot{x}}{\gamma m_0 x^2 \dot{\varphi}} = \frac{\dot{x}}{x^2 \dot{\varphi}} = \frac{dx}{x^2 d\varphi} = - \frac{d(x^{-1})}{d\varphi}$$

Mit $\bar{a} = \frac{a}{\pi_\varphi c}$ (dimensionslos) erhalten wir also:

$$\left(\frac{d(x^{-1})}{d\varphi} \right)^2 = \frac{E_g^2 - (m_0 c^2)^2}{(\pi_\varphi c)^2} - (1 - \bar{a}^2) \frac{1}{x^2} + 2 \frac{E_g \bar{a}}{\pi_\varphi c} \frac{1}{x}$$

Gewöhnliche Differentialgleichung für $x^{-1}(\varphi)$!

Wir führen die dimensionslose Länge bzw. Energie

$$\xi \equiv \frac{|a| m_0 x}{\pi_\varphi^2} = \frac{|\bar{a}| m_0 c x}{\pi_\varphi} \quad \text{bzw.} \quad \eta = \frac{E_g}{m_0 c^2} \quad \text{ein.}$$

Fall a) $\bar{a} = 1$ (d.h. $\pi_\varphi = \pi_\varphi^K(0)$)

$$\left(\frac{d(x^{-1})}{d\varphi} \right)^2 = \frac{(E_g / m_0 c^2)^2 - 1}{\pi_\varphi^2} (m_0 c)^2 + 2 \frac{E_g}{m_0 c^2} \frac{\bar{a} m_0 c}{\pi_\varphi x}$$

$\bar{a} = 1$
 \downarrow

$$\left(\frac{d\xi^{-1}}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\pi\varphi}{m_0c}\right)^2 \left[(\eta^2 - 1) \left(\frac{m_0c}{\pi\varphi}\right)^2 + 2\eta \frac{m_0c}{\pi\varphi} \frac{m_0c}{\pi\varphi\xi} \right]$$

$$= \eta^2 - 1 + 2\frac{\eta}{\xi}$$

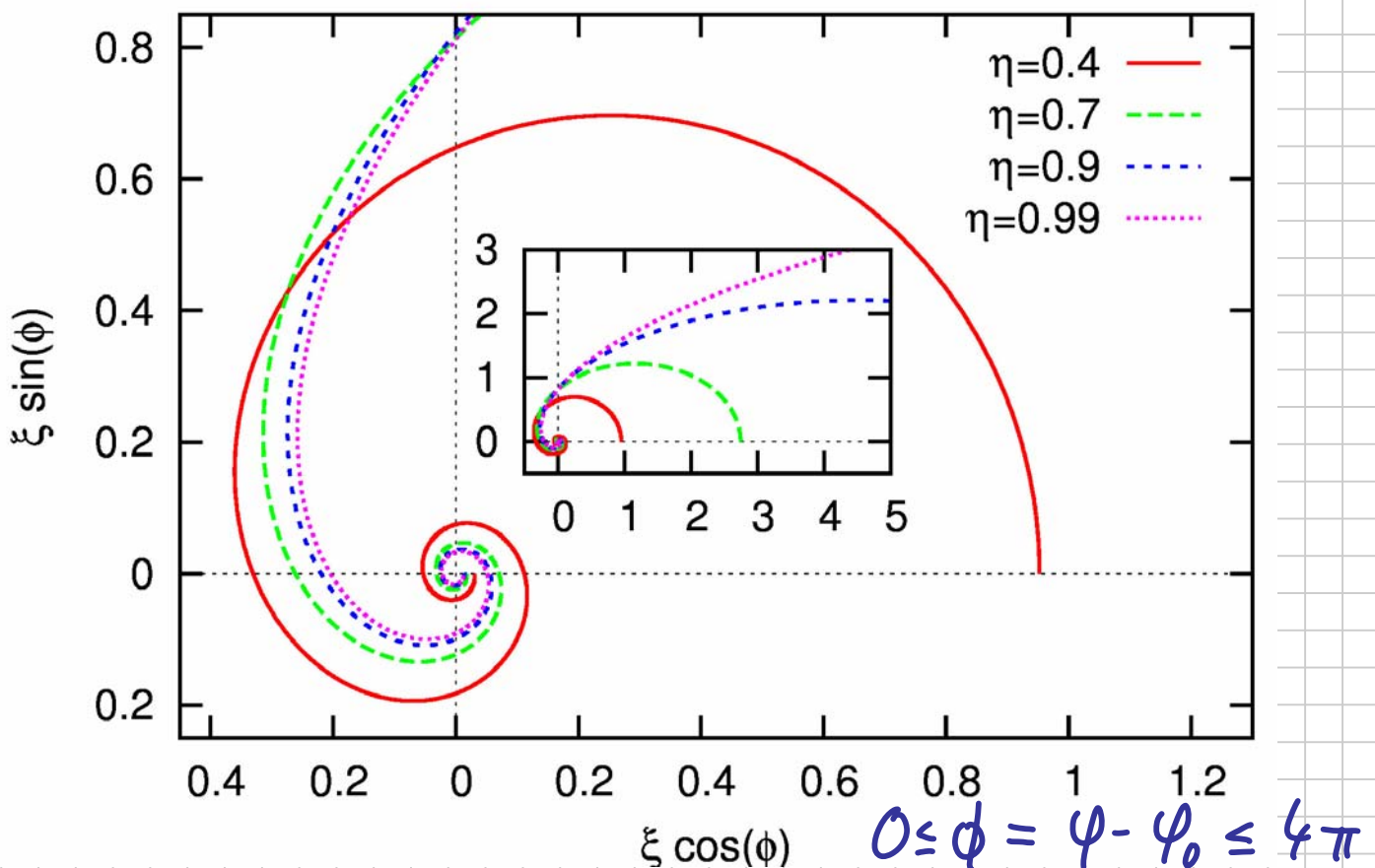
Separationsansatz: $\frac{d\xi^{-1}}{\pm\sqrt{2\eta/\xi + \eta^2 - 1}} = d\varphi$

$$\frac{1}{\eta} \sqrt{2\eta/\xi + \eta^2 - 1} = \pm (\varphi - \varphi_0)$$

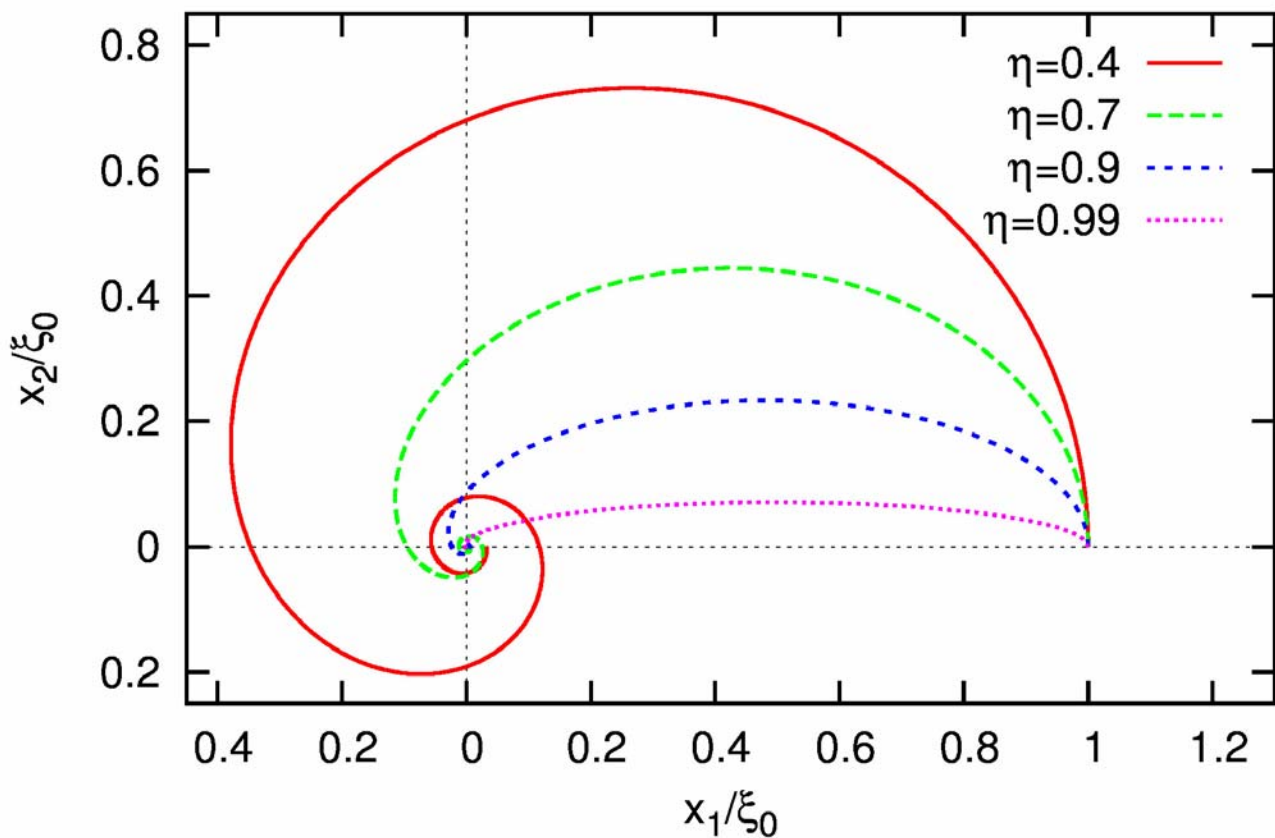
$$\xi(\varphi) = \frac{2\eta}{\eta^2(\varphi - \varphi_0)^2 + (1 - \eta^2)} \quad (\bar{a} = 1)$$

> 0 falls $\eta < 1$

Für $\eta < 1$ (gebundener Zustand) geht $\xi \xrightarrow{\varphi \rightarrow \pm\infty} 0$
 \rightarrow Teilchen spiralt in das Zentrum.



Hier Bahnen reskaliert auf Anfangsabstand:



Für $\eta \geq 1$ gibt es Bahnen mit $\xi = \infty$.

Fall b) $0 < \bar{a} \neq 1$

$$\leadsto \left(\frac{d\xi}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{1-\bar{a}^2} - (1-\bar{a}^2) \left(\frac{1}{\xi} - \frac{\eta}{1-\bar{a}^2} \right)^2; \quad \varepsilon \equiv \sqrt{1 - \frac{1-\eta^2}{\bar{a}^2}}$$

Lösungen für $0 < \bar{a} < 1$, d.h. $\pi_\varphi = \pi_\varphi^K(x_\varphi)$ (s. Skript):

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{1-\bar{a}^2} \left\{ \eta + \varepsilon \cos \left[\sqrt{1-\bar{a}^2} (\varphi - \varphi_0) \right] \right\}$$

fast Ellipse, aber mit gestreckter φ -Skala:

Periode des Cosinus ist $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\bar{a}^2}} > 2\pi$

\leadsto relativistische Präzession

