Kapitel 10: Der starre Körper

Wir kehren nun wieder zur nichtrelativistischen Physik zurück und wenden uns starren Körpern, d.h. ausgedehnten Körpern, die (näherungsweise) nicht deformiert werden, zu.

Beispiele: Kinderkreisel, Tennisschläger, Bumerang, Frisbee, Flugzeug
Himmelskörper: Erde, Mond, Raumstation, ...

Vernachlässigung: innere Freiheitsgrade, insbesondere Schwingungen (auch Gezeiten auf Erde)

10.1 Anzahl der Freiheitsgrade

Offensichtlich kann die Lage eines starren Körpers durch die Position eines beliebigen körperfesten Punktes sowie die Orientierung des Körpers angegeben werden, wobei letztere durch eine Drehmatrix relativ zu einer Ausgangsorientierung zu parametrisieren ist.
Insgesamt ergeben sich $3+3=6$ Freiheitsgrade

Im Folgenden verwenden wir eine diskrete Notation, d.h. denken uns den starren Körper aus N Teilchen mit Massen m_i (und ggf. Ladungen $\hat{q}_i$) zusammengesetzt.

Bemerkungen: (i) Zur realistischen Beschreibung müsste man Grenzübergänge wie $\sum_i \vec{x}_i m_i \to \int d^3r\, \vec{x}\, \rho(\vec{x})$ durchführen.

(ii) Für $N > 2$ müssen $3N-6$ unabhängige innere Zwangsbedingungen der Form $|\vec{x}_i - \vec{x}_j| = l_{ij}$ vorliegen.

Standard-Parametrisierung:

$$\vec{x}_i(t) = \vec{x}_M(t) + D(\vec{\vartheta}(t))\,[\vec{x}_i(0) - \vec{x}_M(0)]$$

mit dem Schwerpunkt $\vec{x}_M(t) \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i(t)$; $M \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i$

und der Drehmatrix D, die durch die 3 „Winkel" $\vec{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ festgelegt wird.

($\rightsquigarrow$ 6 verallgemeinerte Koordinaten $\vec{q} \equiv (\vec{x}_M, \vec{\vartheta})$)

Beachte: die Definition der Drehmatrix kann zwar, wie in Theorie I eingeführt als

(i) $\vec{\vartheta} = (\alpha, \vartheta, \varphi)$; $D(\vec{\vartheta}) = R(\vec{\alpha}) = R(\alpha\hat{\alpha})$; $\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$

erfolgen. Alternativ hat sich jedoch

(ii) die Parametrisierung

$$D(\vec{\vartheta})\,\mathcal{O} = R(\vartheta_3\hat{e}_3)\,R(\vartheta_2\hat{e}_1)\,R(\vartheta_1\hat{e}_3) \equiv R_3 R_2 R_1$$

(mit zeitunabhängiger orthogonaler Transformation $\mathcal{O}$) bewährt. $\vec{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ heissen Euler-Winkel.

Die nachfolgenden Überlegungen sind weitgehend unabhängig von der Parametrisierung der Drehmatrix.

Durch externe Zwangsbedingungen kann die Zahl der Freiheitsgrade weiter (auf $f<6$) reduziert werden:

bei dem starren Rotator wird ein Punkt $\vec{x}_0$ des Körpers festgehalten $\rightsquigarrow$ $\vec{x}_i(t) = \vec{x}_0 + D(\vartheta(t))[\vec{x}_i(0) - \vec{x}_0]$ $\rightsquigarrow$ $f=3$ Freiheitsgrade; unter Einwirkung der Schwerkraft heisst dieser (hier) Kreisel.

$f=2$ Freiheitsgrade sind möglich, wenn z.B. bei dem starren Rotator zusätzlich die Rotation um eine körperfeste Achse unterbunden ist.

Falls der starre Rotator / Kreisel nur um eine Achse (durch $\vec{x}_0$) drehbar ist, erhält man das physikalische Pendel.

10.2 Kinetische Energie und Drehimpuls

Um die volle Lagrange-Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ zu konstruieren, betrachten wir zunächst die kinetische Energie. Wir definieren $\vec{\xi}_i(t) \equiv \vec{x}_i(t) - \vec{x}_m(t)$ (für Massenschwerpunkt $\vec{x}_m$), sowie $\bar{\vec{\xi}}_i \equiv \vec{\xi}_i(0)$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{x}_i(t) = \vec{x}_m(t) + \vec{\xi}_i(t) = \vec{x}_m(t) + D(\vec{\vartheta}(t))\, \bar{\vec{\xi}}_i}$$

(Nach Definition gilt: $\sum_i m_i \vec{\xi}_i = \sum_i m_i \bar{\vec{\xi}}_i = 0$)

Für die kinetische Energie finden wir mit $\dot{\vec{x}}_i = \dot{\vec{x}}_m + \dot{D}\, \bar{\vec{\xi}}_i$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{x}}_i|^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m (\dot{\vec{x}}_m + \dot{D}\, \bar{\vec{\xi}}_i)^2$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{x}}_M^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i |\dot{D} \vec{\bar{\xi}}_i|^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{x}}_M \cdot \dot{D} \vec{\bar{\xi}}_i}_{= \dot{\vec{x}}_M \cdot \dot{D} \sum_{i=1} m_i \vec{\bar{\xi}}_i = 0}$$

$$\equiv T_{tr}(\dot{\vec{x}}_M) + T_{rot}(\vec{\vartheta}, \dot{\vec{\vartheta}})$$

Die Translations- und Rotationsanteile von T entkoppeln also (nur!), falls als Bezugspunkt der Schwerpunkt $\vec{x}_M$ gewählt wird.

Wegen $D D^T = \mathbb{1} = D^T D$ können wir umschreiben:

$$\dot{D} \vec{\bar{\xi}}_i = (\dot{D} D^T) D \vec{\bar{\xi}}_i = \dot{D} D^T \vec{\xi}_i$$

$$T_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{D} \vec{\bar{\xi}}_i| = \sum_i \frac{1}{2} m_i |D^T \dot{D} \vec{\bar{\xi}}_i|^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{D} D^T \vec{\xi}_i|^2$$

Die Produkte $D^T \dot{D}$ und $\dot{D} D^T$ sind antisymmetrisch:

$$\mathbb{1} = D^T D \Rightarrow \dot{D}^T D + D^T \dot{D} = (D^T \dot{D})^T + D^T \dot{D} = 0$$

$$\mathbb{1} = D D^T \Rightarrow \dot{D} D^T + D \dot{D}^T = \dot{D} D^T + (\dot{D} D^T)^T = 0$$

Mit den Bezeichnungen $\Omega \equiv -\dot{D} D^T$; $\bar{\Omega} = -D^T \dot{D}$ können wir also schreiben: $\Omega_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega_\gamma$ bzw. $\bar{\Omega}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{\omega}_\gamma$, wobei die Vektoren $\vec{\omega}, \vec{\bar{\omega}}$ durch

$$\omega_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Omega_{\beta\gamma}; \quad \bar{\omega}_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{\Omega}_{\beta\gamma}$$

definiert sind (bei $\alpha, \beta, \gamma \in \{1,2,3\}$).

Es folgen die Eigenschaften

$$(\Omega \vec{\xi})_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \xi_\beta \omega_\gamma = (\vec{\xi} \times \vec{\omega})_\alpha$$

$$\rightsquigarrow \Omega \vec{\xi} = -\vec{\omega} \times \vec{\xi} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\Omega} \vec{\bar{\xi}} = -\vec{\bar{\omega}} \times \vec{\bar{\xi}}$$

für beliebige Vektoren $\vec{\xi}, \bar{\vec{\xi}}$.
(Insbesondere gilt: $\Omega \vec{\omega} = \vec{0} = \bar{\Omega} \bar{\vec{\omega}}$).

Aus der Identität $\dot{\vec{\xi}}_i(t) = \dot{D} D^T \vec{\xi} = -\Omega \vec{\xi} = \vec{\omega} \times \vec{\xi}$ schliessen wir, dass $\vec{\omega}$ die (momentane) Winkelgeschwindigkeit der Rotation darstellt.

Achtung: i. A. ist $\vec{\omega} \neq \dot{\vec{\vartheta}}$!

Beachte: die ungestrichenen Größen $\vec{\xi}_i, \vec{\omega}, \Omega$ beziehen sich auf das „raumfeste" Koordinatensystem, ein Inertialsystem. Die gestrichenen Größen $\bar{\vec{\xi}}_i, \bar{\vec{\omega}}, \bar{\Omega}$ beziehen sich dagegen auf das „körperfeste" Koordinatensystem, das i. A. beschleunigt ist.

Die Drehmatrix D transformiert zwischen beiden Koordinatensystemen:

$$\vec{\omega} = D \bar{\vec{\omega}}; \quad \Omega = -\dot{D} D^T = D(-D^T \dot{D}) D^T = \overbrace{D \bar{\Omega} D^T}^{\text{Ähnlichkeitstrafo}}$$

22.09

Allgemein werden Vektoren wie $\vec{v} = D \bar{\vec{v}}$ und Matrizen (Tensoren 2. Stufe) wie $M = D \bar{M} D^T$ transformiert.

Spezialfall: Ω zeitunabhängig $\Rightarrow$ $\vec{\omega} = \bar{\vec{\omega}}$, $\Omega = \bar{\Omega}$ und $D = e^{-\Omega t} = R(\vec{\omega} t)$ (s. Skript)

Theorie II: Vorlesung 28

Notiztitel 04.02.2009

(Fortsetzung 10.2)

Die kinetische Energie lässt sich nun mit $\vec{\omega}$ schreiben:

$$T_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \, |\dot{D} D^T \vec{\xi}_i|^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \, |\vec{\omega} \times \vec{\xi}_i|^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\vec{\omega}^2 \vec{\xi}_i^{\,2} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\xi}_i)^2\right] = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \, \vec{\omega}$$

Dyade

mit Trägheitstensor $\quad I(t) \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{\xi}_i^{\,2} \mathbb{1} - \vec{\xi}_i \vec{\xi}_i^{\,T}\right)$

Für eine beschränkte Massenverteilung ($|\vec{\xi}_i| \leq \xi_{max} \; \forall i$) gilt die Ungleichung: $0 \leq Sp(I) = 2 \sum_i m_i \vec{\xi}_i^{\,2} \leq 2M \xi_{max}^2$

Aus dem Trägheitstensor lässt sich das Trägheitsmoment für Rotationen um eine beliebige feste Achse (durch den Bezugspunkt, hier $\vec{x}_M$) gewinnen:

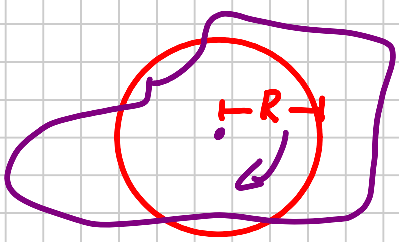
$$J_{\vec{x}_M + \lambda \hat{e}} = \hat{e}^T I \, \hat{e} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, |\hat{e} \times \vec{\xi}_i|^2 = \sum_i m_i \, |\xi_{i\perp}|^2,$$

wobei $\quad \vec{\xi}_{i\perp} \equiv \vec{\xi}_i - (\vec{\xi}_i \cdot \hat{e}) \, \hat{e}$

$$\rightsquigarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2} \omega^2 J_{\vec{x}_M + \lambda \hat{\omega}}$$

Wir definieren noch den Gyrationsradius $R_{\vec{x}_M + \lambda \hat{e}}$ durch

$$J_{\vec{x}_M + \lambda \hat{e}} = M \, R^2_{\vec{x}_M + \lambda \hat{e}}$$



Wichtig: mithilfe von I und $\vec{\omega}$ lässt sich (neben T_{rot}) auch der Drehimpuls ausdrücken:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \, (\vec{x}_m + \vec{\xi}_i) \times (\dot{\vec{x}}_m + \dot{D} D \vec{\xi}_i)$$

$$= M \vec{x}_m \times \dot{\vec{x}}_m + \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{\xi}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\xi}_i)$$

$$\equiv \vec{L}_{tr} + \vec{L}_{rot}$$

mit $\underline{\vec{L}_{rot}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{\xi}^{\,2} \vec{\omega} - \vec{\xi} (\vec{\xi} \cdot \vec{\omega}) \right) = \underline{I \vec{\omega}}$

Der Massentensor I enthält also genau die Eigenschaften des starren Körpers, die für beliebige (freie) Rotationen um den Schwerpunkt wichtig sind (mit nur 6 Parametern). Problem: $I = I(t)$

Deswegen Transformation auf körperfeste Koordinaten:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(D \bar{\vec{\xi}}_i)^2 \mathbb{1} - D (\bar{\vec{\xi}} \, \bar{\vec{\xi}}^T) D^T \right]$$

$$= D \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\bar{\vec{\xi}}_i^{\,2} \mathbb{1} - \bar{\vec{\xi}}_i \bar{\vec{\xi}}_i^T \right) \right] D^T \equiv D \bar{I} D^T$$

("normale" Trafo für Matrizen: $M = D \bar{M} D^T$)

Offensichtlich ist $\bar{I}$ zeitunabhängig. Einsetzen von $\vec{\omega} = D \bar{\vec{\omega}}$ liefert nun:

(Skalar) $T_{rot} = \bar{T}_{rot} \equiv \frac{1}{2} \bar{\vec{\omega}}^T \bar{I} \bar{\vec{\omega}}$

(Vektor) $\vec{L}_{rot} = D \bar{\vec{L}}_{rot}$ mit $\bar{\vec{L}}_{rot} \equiv \bar{I} \bar{\vec{\omega}}$

Es gilt: $\bar{\vec{L}}_{rot} = \frac{\partial \bar{\bar{T}}_{rot}}{\partial \bar{\bar{\vec{\omega}}}}$; $\vec{L}_{rot} = \frac{\partial T_{rot}}{\partial \vec{\omega}}$

Eine weitere Vereinfachung kann durch eine Diagonalisierung des Trägheitstensors $\bar{I}$ mittels einer orthogonalen Transformation $\mathcal{O}$ erreicht werden:

$$\mathcal{O}^T \bar{I} \mathcal{O} \equiv \bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} j_1 & 0 & 0 \\ 0 & j_2 & 0 \\ 0 & 0 & j_3 \end{pmatrix}; \qquad \bar{I} = \mathcal{O} \bar{\bar{I}} \mathcal{O}^T$$

Die Diagonalelemente j_1, j_2, j_3 heißen Hauptträgheitsmomente, die zugehörigen Achsen (d.h. die Eigenvektoren von $\bar{I}$ bzw. $\bar{\bar{I}}$) Hauptträgheitsachsen.

Wir führen einen zweiten Satz von körperfesten Koordinaten ein: $\bar{\bar{\vec{\xi}}}_i \equiv \mathcal{O}^T \bar{\vec{\xi}}_i$ $\left(\rightsquigarrow \vec{\xi}_i = D\bar{\vec{\xi}}_i = D\mathcal{O}\bar{\bar{\vec{\xi}}}_i\right)$

Offensichtlich gelten obige Aussagen für einfach gestrichene Größen auch für den spezielleren Fall der neuen ortsfesten Koordinaten, z.B.:

$$\bar{\bar{I}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\bar{\bar{\vec{\xi}}}_i^{\,2} \mathbb{1} - \bar{\bar{\vec{\xi}}}_i \bar{\bar{\vec{\xi}}}_i^{\,T} \right); \qquad \bar{\bar{\vec{L}}}_{rot} = \frac{\partial \bar{\bar{T}}_{rot}}{\partial \bar{\bar{\vec{\omega}}}}$$

Zusätzlich finden wir aber:

$$T_{rot} = \bar{T}_{rot} = \bar{\bar{T}}_{rot} \equiv \frac{1}{2} \bar{\bar{\vec{\omega}}}^T \bar{\bar{I}} \bar{\bar{\vec{\omega}}} = \frac{1}{2} \left(j_1 \bar{\bar{\omega}}_1^2 + j_2 \bar{\bar{\omega}}_2^2 + j_3 \bar{\bar{\omega}}_3^2 \right)$$

und $\bar{\bar{\vec{L}}}_{rot} = \bar{\bar{I}} \bar{\bar{\vec{\omega}}} = \left(j_1 \bar{\bar{\omega}}_1, j_2 \bar{\bar{\omega}}_2, j_3 \bar{\bar{\omega}}_3 \right)$

Speziell gilt für einen generischen starren Körper mit $j_1 \neq j_2 \neq j_3 \neq j_1$:

$$\bar{\bar{\vec{L}}} \parallel \bar{\bar{\vec{\omega}}} \quad \text{falls} \quad \bar{\bar{\vec{\omega}}} = |\bar{\bar{\vec{\omega}}}|\, \hat{e}_{i_0} = |\vec{\omega}|\, \hat{e}_{i_0} \quad \text{für } i_0 \in \{1,2,3\}$$

$$\Leftrightarrow \vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

$$\bar{\bar{\vec{L}}} \nparallel \bar{\bar{\vec{\omega}}} \quad \text{bzw.} \quad \vec{L} \nparallel \vec{\omega} \quad \text{sonst.}$$

Im freien Fall ist $\vec{L}$ erhalten $\rightsquigarrow$ $\vec{\omega}$ ist nur dann erhalten, falls es parallel zu einer Hauptträgheitsachsen liegt.

genauer: $D(\vec{\vartheta}(t))$

Insgesamt: $\xi(t) = D(t)\,\mathcal{O}\,\bar{\bar{\xi}}\,; \quad \vec{\omega}(t) = D(t)\,\mathcal{O}\,\bar{\bar{\vec{\omega}}}(t)$

$$\Omega(t) = (D(t)\mathcal{O})\,\bar{\bar{\Omega}}(t)\,(D(t)\mathcal{O})^T$$

Konkrete Parametrisierung von $D\mathcal{O}$ z.B. mit Euler-winkeln (siehe 10.1, 10.4).

Für einen allgemeinen Lagrange-Formalismus benötigen wir noch $T(\dot{\vec{x}}_m, \vec{\vartheta}, \dot{\vec{\vartheta}})$, statt $T(\dot{\vec{x}}_m, \vec{\vartheta}, \vec{\omega})$. Dazu schreiben wir

$$\omega_\alpha = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Omega_{\beta\gamma} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} D_{\beta\delta}(\dot{D}^T)_{\delta\gamma}$$

$$= \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} D_{\beta\delta} \frac{\partial D_{\gamma\delta}}{\partial \vartheta_\eta}\dot{\vartheta}_\eta$$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{\omega} = W(\vec{\vartheta})\,\dot{\vec{\vartheta}} \quad \text{mit} \quad W_{\alpha\eta}(\vec{\vartheta}) \equiv \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} D_{\beta\delta}\frac{\partial D_{\gamma\delta}}{\partial \vartheta_\eta}$$

Mithilfe des (Teil)* Massentensors

$$M(\vec{\vartheta}) = W(\vec{\vartheta})^T I \, W(\vec{\vartheta})$$

erhalten wir den vertrauten Ausdruck für die kinetische Energie:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\vartheta}}^T M(\vec{\vartheta}) \dot{\vec{\vartheta}}$$

Dieser lässt sich wiederum transformieren:

$$\bar{\vec{\omega}} = \bar{W} \dot{\vec{\vartheta}} \quad \text{mit} \quad \bar{W}(\vartheta) \equiv D^T W(\vec{\vartheta})$$

$$\rightsquigarrow M(\vec{\vartheta}) = \bar{W}(\vec{\vartheta})^T \bar{I} \, \bar{W}(\vec{\vartheta}) \; \left(= \bar{\bar{W}}(\vec{\vartheta})^T \bar{\bar{I}} \, \bar{\bar{W}}(\vec{\vartheta})\right)$$

(s. Skript)

Mit $\vec{q} = (\vec{x}_m, \vec{\vartheta})$; $\dot{\vec{q}} = (\dot{\vec{x}}_m, \dot{\vec{\vartheta}})$ lautet der (Gesamt-) Massentensor also:

$$M_{ges}(\vec{q}, t) = M_{ges}(\vec{\vartheta}(t)) = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 0 & \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & \\ \hline & 0 & & M(\vec{\vartheta}) \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T M_{ges}(\vec{\vartheta}(t)) \dot{\vec{q}}$$

4.2.09

Theorie II: Vorlesung 29

Notiztitel 08.02.2009

10.3 Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers

Die Lagrange-Funktion des starren Körpers hat i.A. die Form

$$L(\vec{x}_m, \dot{\vec{x}}_m, \vec{\vartheta}, \dot{\vec{\vartheta}}, t) = \frac{1}{2} M \dot{\vec{x}}_m^2 + \frac{1}{2} \dot{\vec{\vartheta}}^T M(\vec{\vartheta}) \dot{\vec{\vartheta}} - V(\vec{x}_m, \dot{\vec{x}}_m, \vec{\vartheta}, \dot{\vec{\vartheta}}, t)$$

Dabei kann das Potential als $V = V_{ex}^K(\{\vec{x}_i\}, t) + V_{Lor}^K(\{\vec{x}_i\}, \{\dot{\vec{x}}_i\}, t)$ geschrieben werden.

Vereinfachung: keine Ladungen bzw. Felder $\leadsto V = V(\vec{x}_m, \vec{\vartheta}, t)$

Damit lauten die Lagrange-Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} M \ddot{\vec{x}}_m &= -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_m}(\vec{x}_m, \vec{\vartheta}, t) \underset{\text{s. skript}}{=} \sum_i \vec{F}_i \\ \frac{d}{dt}\left[M(\vec{\vartheta})\dot{\vec{\vartheta}}\right] &= -\frac{\partial V}{\partial \vec{\vartheta}}(\vec{x}_m, \vec{\vartheta}, t) + \frac{\partial}{\partial \vec{\vartheta}}\left[\frac{1}{2}\dot{\vec{\vartheta}}^T M(\vec{\vartheta}) \dot{\vec{\vartheta}}\right] \end{aligned}} \; *$$

Das sind 6 Bewegungsgleichungen, die die 6 Freiheitsgrade $\vec{q} = (\vec{x}_m, \vec{\vartheta})$ des starren Körpers festlegen.

Offensichtlich ist der Winkelanteil der L-Gleichungen kompliziert. Oft bequemer: direkte Herleitung von Bewegungsgleichungen für $\vec{\omega}$ bzw. $\vec{\bar{\omega}}$. Betrachte dazu die Gesamtdrehimpulsänderung:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{N} \;\Delta; \qquad \vec{N} = \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i$$

mit Gesamtdrehmoment $\vec{N}$. Letzteres lässt sich leicht aufteilen und umschreiben:

$$\vec{N} = \sum_i [\vec{x}_m(t) + D(\vec{\vartheta}(t))\,\vec{\xi}_i] \times \vec{F}_i$$
$$= \vec{x}_m \times \Big(\sum_i \vec{F}_i\Big) + \sum_i (D\,\vec{\xi}_i) \times (\underbrace{D D^T}_{=1} \vec{F}_i) = \vec{x}_m \times \vec{F} + \vec{N}_{rot}$$

Aufgrund der Identität $(D\vec{A}) \times (D\vec{B}) = D(\vec{A} \times \vec{B})$ gilt:

$$\vec{N}_{rot} = D \sum_i \vec{\xi} \times (\underbrace{D^T \vec{F}_i}_{\equiv \vec{\vec{F}}_i}) \equiv D\,\vec{\vec{N}}_{rot}$$

Der linke Term in Δ lässt sich analog umschreiben:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}\left(M \vec{x}_m \times \dot{\vec{x}}_m + \vec{L}_{rot}\right) = M \vec{x}_m \times \ddot{\vec{x}}_m + \frac{d}{dt} D \vec{\vec{L}}_{rot}$$

Einsetzen in Δ liefert $\vec{x}_m \times \vec{F} = \vec{x}_m \times (M \ddot{\vec{x}}_m)$ sowie die

Euler-Gleichung

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\vec{N}}_{rot} &= D^T \frac{d}{dt} D \vec{\vec{L}}_{rot} = D^T \frac{d}{dt} D \bar{I} \vec{\vec{\omega}} \\ &= \bar{I} \dot{\vec{\vec{\omega}}} + D^T \dot{D} \bar{I} \vec{\vec{\omega}} = \bar{I} \dot{\vec{\vec{\omega}}} - \bar{\Omega} \bar{I} \vec{\vec{\omega}} \\ &= \bar{I} \dot{\vec{\vec{\omega}}} + \vec{\vec{\omega}} \times (\bar{I} \vec{\vec{\omega}}) \end{aligned}}$$ $\Diamond$

Wichtig: Trägheitsmoment $\bar{I}$ ist zeitunabhängig.

Die Euler-Gleichungen sind besonders nützlich, wenn $\vec{\vec{N}}_{rot}$ eine einfache Form hat.

Beispiel / Spezialfall: $\vec{\vec{N}}_{rot} = 0$

$$\rightsquigarrow \bar{I} \dot{\vec{\vec{\omega}}} = -\vec{\vec{\omega}} \times (\bar{I} \vec{\vec{\omega}})$$

falls zusätzlich $\vec{\vec{\omega}} \parallel$ Hauptträgheitsachse

$$\rightsquigarrow \bar{I} \vec{\vec{\omega}} \parallel \vec{\vec{\omega}} \Rightarrow \dot{\vec{\vec{\omega}}} = 0$$

Also: Rotationen um Hauptträgheitsachsen stabil!

Oft werden die Euler-Gleichungen direkt für das (körperfeste) Bezugssystem formuliert, in dem der Trägheitstensor diagonal ist: mit $\bar{I} = O\,\bar{\bar{I}}\,O^T$, $O^T\bar{\omega} = \bar{\bar{\omega}}$ erhalten wir:

$$\bar{\bar{N}}_{rot} \equiv O^T \bar{N}_{rot} = \bar{\bar{I}}\,(O^T \dot{\bar{\bar{\omega}}}) + O^T[(O\bar{\bar{\omega}}) \times (O\bar{\bar{I}}\bar{\bar{\omega}})]$$
$$= \bar{\bar{I}}\,\dot{\bar{\bar{\omega}}} + \bar{\bar{\omega}} \times (\bar{\bar{I}}\bar{\bar{\omega}})$$

(obiger Ausdruck mit $- \to =$); in Komponenten gilt jetzt:

Euler-Gleichungen für diagonalen Trägheitstensor $\bar{\bar{I}}$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\bar{N}}_{rot,1} &= J_1 \dot{\bar{\bar{\omega}}}_1 + (J_3 - J_2)\,\bar{\bar{\omega}}_2 \bar{\bar{\omega}}_3 \\ \bar{\bar{N}}_{rot,2} &= J_2 \dot{\bar{\bar{\omega}}}_2 + (J_1 - J_3)\,\bar{\bar{\omega}}_3 \bar{\bar{\omega}}_1 \\ \bar{\bar{N}}_{rot,3} &= J_3 \dot{\bar{\bar{\omega}}}_3 + (J_2 - J_1)\,\bar{\bar{\omega}}_1 \bar{\bar{\omega}}_2 \end{aligned}}$$

Bemerkung: Die Euler-Gleichung ◇ ist äquivalent zur Winkel-Lagrange-Gleichung *, genauer zu

$$-(\bar{\bar{W}}^T)^{-1}\frac{\partial V}{\partial \vec{\vartheta}} = (\bar{\bar{W}}^T)^{-1}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{\vartheta}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vec{\vartheta}}\right]$$

Beweis: teilweise im Skript.

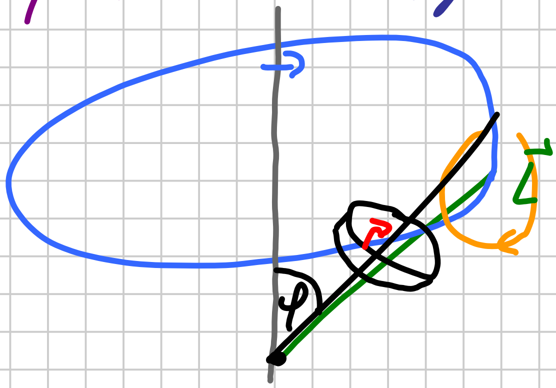
10.4 Explizite Form von $D, \Omega, \bar{\Omega}, \bar{\omega}, \bar{\bar{\omega}}$

Jetzt wählen wir eine konkrete Parametrisierung $D(\vec{\vartheta})$ mittels der Euler-Winkel

$$D(\vec{\vartheta})\,O \equiv R(\vartheta_3 \hat{e}_3)\, R(\vartheta_2 \hat{e}_1)\, R(\vartheta_1 \hat{e}_3), \qquad (\triangleright)$$

wobei O den Trägheitstensor im körperfesten System diagonalisiert (z.B. mit $j_3 \neq j_1 = j_2$)

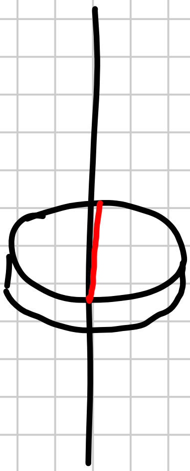
Beispiel: rotationssymmetrischer „schneller" Kreisel



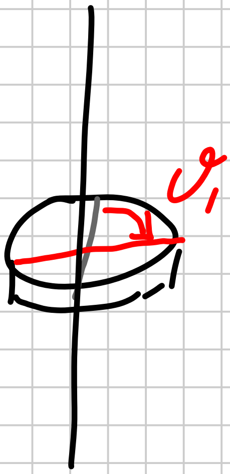
- schnelle Rotation um Figurenachse
- langsame Präzession von $\vec{L}$ um $\hat{e}_3$
- zusätzlich Nutation der Figurenachse um $\vec{L}$

Animation: siehe http://faculty.ifmo.ru/butikov/Applets/Gyroscope.html

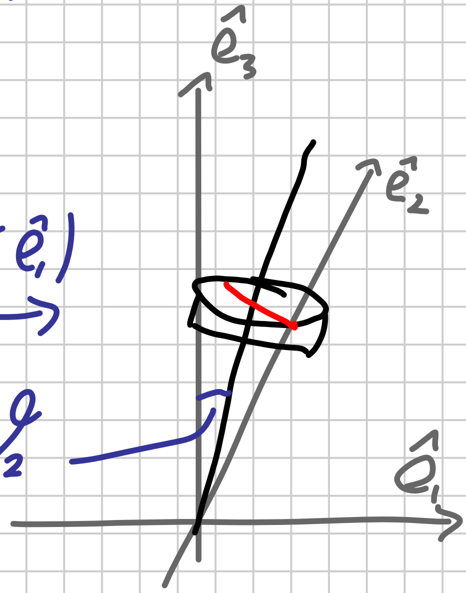
Beschreibung mit Euler-Winkeln:



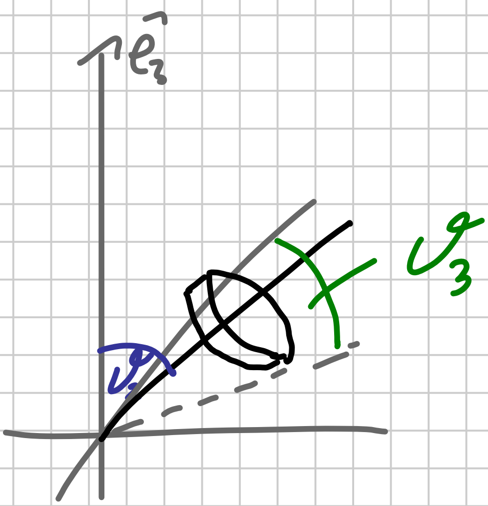
$\xrightarrow{R(\vartheta_1 \hat{e}_3)}$



$\xrightarrow{R(\vartheta_2 \hat{e}_1)}$



$\xrightarrow{R(\vartheta_3 \hat{e}_3)}$



Es gilt:

ϑ_2 = Neigungswinkel

schnelle Rotation $\approx \vartheta_1$

Präzession $\approx \vartheta_3$

09.02.09

Theorie II: Vorlesung 30

(Fortsetzung 10.4) Ausmultiplizieren von

$$D(\vec{\vartheta})\vartheta \equiv R(\vartheta_3\hat{e}_3)\,R(\vartheta_2\hat{e}_1)\,R(\vartheta_1\hat{e}_3) \equiv R_3R_2R_1 \quad (\triangleright)$$

liefert ($c_i \equiv \cos(\vartheta_i)$, $s_i \equiv \sin(\vartheta_i)$):

$$R_3\,R_2\,R_1 = \begin{pmatrix} c_1c_3 - s_1c_2s_3 & -s_1c_3 - c_1c_2s_3 & s_2s_3 \\ c_1s_3 + s_1c_2c_3 & -s_1s_3 + c_1c_2c_3 & -s_2c_3 \\ s_1s_2 & c_1s_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad *$$

Mit der Definition $\Omega_i \equiv \dot{R}_i R_i^T \quad (i=1,2,3)$ gilt:

$$\begin{aligned}\Omega &= -\dot{D}D^T = -(\dot{D}\vartheta)(D\vartheta)^T \\ &= -(\dot{R}_3R_2R_1 + R_3\dot{R}_2R_1 + R_3R_2\dot{R}_1)\,R_1^TR_2^TR_3^T \\ &= -(\dot{R}_3R_3^T + R_3\dot{R}_2R_2^TR_3^T + R_3R_2\dot{R}_1R_1^TR_2^TR_3^T) \\ &= \Omega_3 + R_3^T\Omega_2R_3 + R_3R_2\Omega_1R_2^TR_3^T\end{aligned}$$

Die Matrizen Ω_i haben eine einfache Form:

$$\Omega_{1,3} = -\dot{\vartheta}_{1,3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \Omega_2 = -\dot{\vartheta}_2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} s_2s_3 & c_3 & 0 \\ -s_2c_3 & s_3 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\dot{\vec{\vartheta}}$$

Mit der Drehmatrix $\triangleright$ lässt sich die momentane Drehachse auch im körperfesten System angeben:

$$\vec{\vec{\omega}} = (D\mathcal{O})^T \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & s_1 s_2 \\ 0 & -s_1 & c_1 s_2 \\ 1 & 0 & c_2 \end{pmatrix} \dot{\vec{\vartheta}} \equiv \overline{\overline{W}}(\vec{\vartheta})\dot{\vec{\vartheta}}$$

Damit sind alle Ausdrücke für die kinetische Energie bekannt (insbesondere Massentensor $M = \overline{\overline{W}}^T \overline{\overline{I}}\, \overline{\overline{W}}$).

Die potentielle Energie ist einfach im homogenen Schwerkraftfeld:

$$V = \sum_{i=1}^{N} m_i g \vec{x}_i \cdot \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{N} m_i g (\vec{x}_m + \vec{\xi}_i) \cdot \hat{e}_3$$

$$= M g x_{m3} + g\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\xi}_i\right) = M g x_{m3}$$

In diesem Fall folgt für die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{x}}_m^2 + \frac{1}{2} \dot{\vec{\vartheta}}^T M(\vec{\vartheta}) \dot{\vec{\vartheta}} - M g x_{m3},$$

so dass Translations- und Rotationsfreiheitsgrade entkoppelt sind: freier Fall des Schwerpunkts + kräftefreie (genauer: Drehmoment-freie) Rotation.

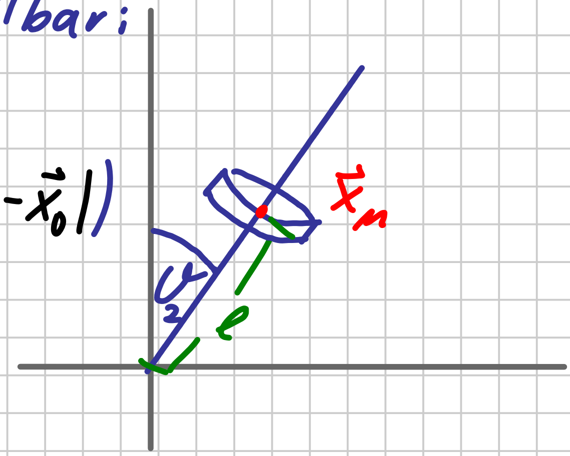
Achtung: dies gilt nur ohne externe Zwangsbedingungen!

(Skript: harmonisches Potential)

10.4.1 Zusätzliche Zwangsbedingungen

Bei dem starren Rotator wählen wir den Fixpunkt (Aufhängepunkt, Unterstützungspunkt) mit $\vec{x}_0(t) = \vec{x}_0 \;\forall t$ als Bezugspunkt (statt $\vec{x}_m$): $\quad \vec{\xi}_i \equiv \vec{x}_i(0) - \vec{x}_0$

Mit der Euler-Parametrisierung $\triangledown$ ist dann die gesamte kinetische Energie als $T = \frac{1}{2}\dot{\vec{\vartheta}}^T M(\vec{\vartheta})\dot{\vec{\vartheta}}$ gegeben. Auch die potentielle Energie im homogenen Schwerkraftfeld ist bequem darstellbar:



z.B. gilt für einen symmetrischen Kreisel mit $|\vec{x}_m(0) - \vec{x}_0| = \ell \; (= |\vec{x}_m(t) - \vec{x}_0|)$

$$\vec{x}_m(t) - \vec{x}_0 = \ell \, D(\vec{\vartheta}(t)) O \hat{e}_3$$

$$\rightsquigarrow V = \sum_{i=1}^{N} m_i g \, (\vec{x}_i - \vec{x}_0) \cdot \hat{e}_3$$

$$= M g \, [\vec{x}_m(t) - \vec{x}_0] \cdot \hat{e}_3 = M g \ell \, \hat{e}_3^T D(\vec{\vartheta}) O \hat{e}_3$$

$$\stackrel{*}{=} M g \ell \cos(\vartheta_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}\dot{\vec{\vartheta}}^T M(\vec{\vartheta})\dot{\vec{\vartheta}} - M g \ell \cos(\vartheta_2)}$$

Für $\ell \to 0$ (d.h. $\vec{x}_0 \to \vec{x}_m$) ergibt sich natürlich der kräftefreie Kreisel.

(Skript: Fall ohne Drehungen um $\vec{x}_0 - \vec{x}_m$, d.h. $f = 2$ sowie starrer Rotator, d.h. physikalisches Pendel)

10.5 Anwendung der Euler'schen Bewegungsgleichung

Wir betrachten die Euler-Gleichung

$$\overline{\vec{N}}_{rot} = \bar{I}\,\dot{\bar{\vec{\omega}}} + \bar{\vec{\omega}} \times (\bar{I}\,\bar{\vec{\omega}}) \qquad (\text{auch } {}^{-} \to {}^{=})$$

ohne Drehmoment, d.h. für $\vec{N}_{rot} = \bar{\vec{N}}_{rot} = \bar{\bar{\vec{N}}}_{rot} = 0$

In diesem Fall ist $L(\dot{\vec{x}}_M, \vec{\vartheta}, \dot{\vec{\vartheta}}) = \frac{1}{2} M \dot{\vec{x}}_M^2 + \frac{1}{2} \dot{\vec{\vartheta}}^T M(\vec{\vartheta}) \dot{\vec{\vartheta}}$

$\rightsquigarrow$
- Translation + Rotation entkoppelt
- Gesamtimpuls $\vec{P}$ erhalten
- Gesamtenergie E sowie E_{tr}, E_{rot} erhalten
- Drehimpulse $\vec{L}_{tr}$, $\vec{L}_{rot}$, $\vec{L}$ erhalten

a) 3 gleiche Trägheitsmomente: Kugelkreisel

$\bar{\bar{I}} \bar{\bar{\vec{\omega}}} = j \bar{\bar{\vec{\omega}}} \Rightarrow \dot{\bar{\bar{\vec{\omega}}}} = 0 \rightsquigarrow \vec{\omega} = \bar{\vec{\omega}} = \bar{\bar{\vec{\omega}}} = \frac{\vec{L}}{j}$ konstant

langweilig!

b) 2 gleiche Trägheitsmomente: $j_1 = j_2 \neq j_3$
„symmetrischer Kreisel"

$\rightsquigarrow$ Euler-Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= j_1 \dot{\bar{\bar{\omega}}}_1 + (j_3 - j_1) \bar{\bar{\omega}}_2 \bar{\bar{\omega}}_3 \\ 0 &= j_1 \dot{\bar{\bar{\omega}}}_2 - (j_3 - j_1) \bar{\bar{\omega}}_1 \bar{\bar{\omega}}_3 \\ 0 &= j_3 \dot{\bar{\bar{\omega}}}_3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \bar{\bar{\omega}}_3 \equiv \omega_{\parallel}$ konstant. Mit $\alpha \equiv \omega_{\parallel} \frac{j_3 - j_1}{j_1}$

gilt: $\quad \dot{\bar{\bar{\omega}}}_1 = -\alpha \bar{\bar{\omega}}_2 ; \quad \dot{\bar{\bar{\omega}}}_2 = \alpha \bar{\bar{\omega}}_1$

$\Rightarrow \quad \ddot{\bar{\bar{\omega}}}_{1/2} = -\alpha^2 \bar{\bar{\omega}}_{1/2}$

$$\boxed{\bar{\bar{\omega}}_1(t) = \omega_{\perp} \cos(\alpha t + \varphi_0); \quad \bar{\bar{\omega}}_2(t) = \omega_{\perp} \sin(\alpha t + \varphi_0)}$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\bar{\vec{\omega}}}(t)$ beschreibt also einen

Kreiskegel mit Öffnungswinkel $\beta = \arctan(\omega_\perp/\omega_\parallel)$ um die $\hat{e}_3$ - Achse: regaläre Präzession/Nutation.

(Skript: Anwendung auf reguläre Präzession der Erde mit $T_0 = \frac{2\pi}{\alpha} \approx 427$ Sterntage, etwa 40% größer als Rechnung für starren Körper ergibt).

(Skript: • $\omega_\parallel, \omega_\perp$ als Funktion von $\vec{L}_{rot}, E_{rot}$
• Zeitabhängigkeit der Euler-Winkel
$\rightsquigarrow$ Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und Figurenachse rotieren gemeinsam (in einer Ebene) im Inertialsystem um ortsfestes $\vec{L}$)

10.6 Anwendung der Lagrange'schen Bewegungsgleichung

10.6.1 Der (symmetrische) schwere Kreisel

Wir können die Trägheitsmomente bezüglich des Fixpunktes aus dem bezüglich $\vec{x}_M$ mit dem Steiner schen Satz gewinnen:

$$J_1' = J_2' = J_1 + Ml^2; \quad J_3' = J_3$$

$$\Rightarrow T = T_{rot} = \frac{1}{2} \bar{\bar{\bar{\omega}}}^T \bar{\bar{I}} \bar{\bar{\bar{\omega}}} = \frac{1}{2} J_1' (\bar{\bar{\omega}}_1^2 + \bar{\bar{\omega}}_2^2) + \frac{1}{2} J_3' \bar{\bar{\omega}}_3^2$$

$$= \frac{1}{2} J_1' \left[(c_1 \dot{\vartheta}_2 + s_1 s_2 \dot{\vartheta}_3)^2 + (-s_1 \dot{\vartheta}_2 + c_1 s_2 \dot{\vartheta}_3)^2 \right] + \frac{1}{2} J_3 (\dot{\vartheta}_1 + c_2 \dot{\vartheta}_3)^2$$

$$= \frac{1}{2} J_1' (\dot{\vartheta}_2^2 + s_2^2 \dot{\vartheta}_3^2) + \frac{1}{2} J_3 (\dot{\vartheta}_1 + c_2 \dot{\vartheta}_3)^2$$

$$\Rightarrow \quad L = T - V = T - Mgl\, c_2$$

Beachte: ϑ_1, ϑ_3 zyklisch

$$\rightsquigarrow \quad p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_1} = j_3 (\dot{\vartheta}_1 + c_2 \dot{\vartheta}_3) \quad \text{und}$$

$$p_3 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_3} = (j_1' s_2^2 + j_3 c_2^2) \dot{\vartheta}_3 + j_3 c_2 \dot{\vartheta}_1$$

sind beide erhalten, ebenso wie die Energie.

$\rightsquigarrow$ effektives 1-dimensionales Problem für Neigungswinkel ϑ_2 ... (s. Skript)

Anwendung: Levitron

$\rightsquigarrow$ Mechanik, E-Dynamik
Quantenmechanik, Vielteilchentheorie
Statistische Physik / Thermodynamik

// 11.02.09