Theorie II: Vorlesung 21

Kapitel 6 Spezielle Relativitätstheorie

(Fortsetzung von Theorie I)

Kurzwiederholung (bis 6.2)

Relativitätsprinzip $\leftrightarrow$ Inertialsysteme $\Big\}$ auch Newton
Deterministisches Prinzip

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (alle Inertialsysteme)

6.1 Erste Konsequenzen der Postulate

Bezugssysteme K, K' mit $\vec{v}_{rel}(K', K) = \vec{v}$

- Relativität der Gleichzeitigkeit

(Schon in Newton-Mechanik: Relativität von Position/Abstand)

- Längen senkrecht zu $\vec{v}$ unverändert
- Zeitdilatation $T' = \gamma T$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\beta = \frac{v}{c}$
- Längenkontraktion (in Bewegungsrichtung): $\ell' = \frac{\ell}{\gamma}$

6.2 Der Abstand und die Eigenzeit

$s^2 = 0 \Leftrightarrow (s')^2 = 0$

Für Lichtsignal: $s^2 \equiv c^2(\Delta t)^2 - |\Delta\vec{x}|^2 = 0 = c^2(\Delta t')^2 - |\Delta\vec{x}'|^2 \equiv s'^2$

Infinitesimaler Abstand $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2}$

Notation $\vec{u} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$; $\vec{\beta}_u = \frac{\vec{u}}{c}$

Lorentz-Transformation $\begin{pmatrix} c\,dt' \\ d\vec{x}' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} c\,dt \\ d\vec{x} \end{pmatrix}$

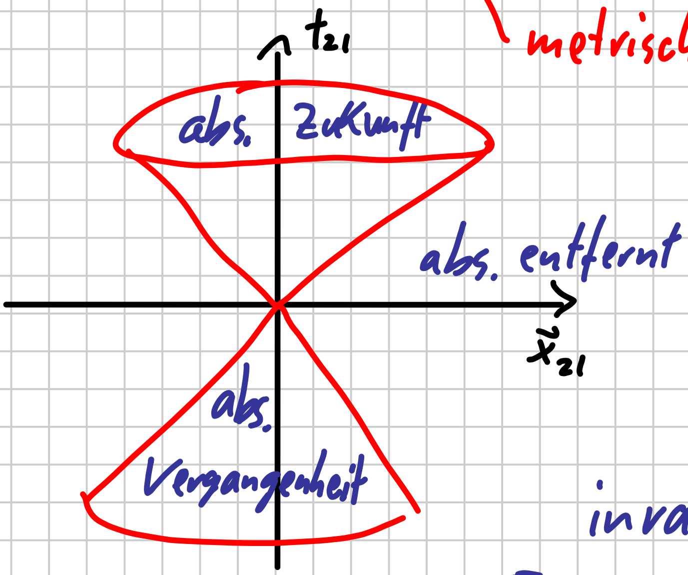
Homogenität, Isotropie etc. $\rightsquigarrow$ $(ds)^2 = (ds')^2 \quad \forall\, ds$

$\rightsquigarrow \quad s_{21}^2 = (s_{21}')^2 \quad \forall$ Paare von Ereignissen $(t_{1/2}, \vec{x}_{1/2})$

(Korrektur der Notation: gespiegelte Matrix $\tilde{\Lambda} \to \Lambda^T$)

$$\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \Lambda^T \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \Lambda$$

metrischer Tensor



$s_{21}^2 > 0$ zeitartig

$s_{21}^2 = 0$ lichtartig

$s_{21}^2 < 0$ raumartig

invariante inf. Zeit $\quad d\tau = \dfrac{ds}{c} = \dfrac{dt}{\gamma_u}$

Eigenzeit τ

6.3 4-Schreibweise und Lorentz-Transformationen

Wir sind es gewöhnt, Euklidische Längen/Abstände kompakt zu notieren: $|\vec{x}|^2 = \vec{x}\cdot\vec{x} = \vec{x}^T\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i \equiv x_i x_i$

Analoge Notation für $\quad s^2 = (ct)^2 - |\vec{x}|^2$?

Führe dazu den Kontravarianten 4-(Orts-)Vektor ein:

$$x^\mu \equiv (ct, \vec{x})^T \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

Index oben!

sowie den metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu=\nu=0 \\ -1 & \text{falls } \mu=\nu\neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}_{\mu\nu}$$

$g_{\mu\nu}$: beide Indizes unten; $g^{\mu\nu}$: beide oben

Wichtig: Die Stellung der Indizes (unten/oben) ist i.A. sehr relevant. Diese ändert sich insbesondere bei Anwendung des Metrischen Tensors:

Einstein-Konv. neg. Vorzeichen!

Kovarianter 4-Orts-Vektor: $x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{x})^T$

Damit gilt: $\underline{s^2} = c^2t^2 - |\vec{x}|^2 = (ct, \vec{x}) \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = \underline{x^\mu x_\mu}$

Modifizierte Einstein-Konvention: Summation über Indizes, die einmal unten, einmal oben auftreten (Kontraktion). Dabei ist die Differenz #(obere Indizes) - # untere Indizes konstant.

Formal kann man Indizes mithilfe des metrischen Tensors „herauf- und herunterziehen". Es gilt z.B.

$$g_{\mu r} g^{\nu\rho} = g_\mu{}^\nu \equiv \delta_\mu{}^\rho = (\mathbb{1})_{\mu\nu} = \delta^\mu{}_\rho = g^\mu{}_\rho = g^{\mu\nu} g_{r\rho}$$

Die Ableitung nach einem kontravarianten Vektor eliminiert einen oberen Index und wird daher kovariant notiert:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad (\rightsquigarrow \partial_\mu (a_\nu x^\nu) = a_\nu \;)$$

Analog: $\partial^\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} = g^{\mu\nu}\partial_\nu$

Auch der d'Alembert-Operator kann somit kompakt geschrieben werden: $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu$

Lorentz-Trafos $x'^{\mu}_i = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}_i$ ← linearer Ansatz lassen die relativistischen Abstände invariant: $x'_{\mu} x'^{\mu} = x_{\mu} x^{\mu}$

$$\overset{6.2}{\Longleftrightarrow} \quad g^{-1} g \Lambda^{-1} = g^{-1} \underline{\Lambda^T g \Lambda} \Lambda^{-1}$$

(*) metr. Tensor ist selbstinvers

$$\Lambda^{-1} = g^{-1} \Lambda^T g \overset{(*)}{=} g \Lambda^T g$$

Wir haben also einen expliziten Ausdruck für die inverse Transformation Λ^{-1} gefunden.

Muss das Transformationsgesetz zwischen Inertialsystemen linear sein? Ja, weil

(i) geradlinig gleichförmige Bewegungen in geradlinig gleichförmige Bewegungen zu überführen sind

(ii) $\partial_{\nu} \partial_{\mu} (x'^{\alpha}) = 0$ (siehe Skript)

($\rightsquigarrow$ Linearität, Λ x-unabhängig)

6.3.1 Poincaré und Lorentz-Transformationen

Allgemeinste relativistisch korrekte Transformation:

Poincaré-Transformation $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$

Die Inhomogenität a^{μ} entspricht einer Translation in Zeit und Raum: $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$; $t' = t + \frac{a^0}{c}$

Homogener Anteil: Lorentz-Transformation.

Die Lorentz-Trafos bilden eine Gruppe bezüglich Hintereinanderausführung (bzw. Matrixmultiplikation, da

(i) mit Λ_1, Λ_2 auch das Produkt $\Lambda_1 \Lambda_2$ die Bedingung

* erfüllt: $(\Lambda_2^T \Lambda_1^T) g (\Lambda_1 \Lambda_2) \overset{*}{=} \Lambda_2^T g \Lambda_2 \overset{*}{=} g$

(ii) das Produkt ist assoziativ (aber nicht kommutativ!)
(iii) es existiert das 1-Element: Identität $= \mathbb{1}_4$
(iv) zu jedem Λ ex. das inverse Element Λ^{-1} (s.o.)

Wegen $\det(\Lambda^T g \Lambda) = \det(\Lambda)\det(g)\det(\Lambda) \overset{!}{=} \det g$

gilt: $\det(\Lambda) = \pm 1$

Wichtigste Untermenge der Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}$: eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe

$$\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} = \{\Lambda \mid \det(\Lambda) = +1;\ \Lambda^0{}_0 \geq 1\}$$

Erhält Zeitrichtung und Parität, ist stetig mit der Identität verbunden.

Spezialfälle: (i) Drehungen $\Lambda_R(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R(\vec{\alpha}) \end{pmatrix}$

mit 3-dimensionaler orthogonaler Matrix $R(\vec{\alpha})$

(ii) Lorentz-Boosts: Geschwindigkeitstransformationen im Orts-Zeit-Raum (vgl. Übungsaufgabe 2):

$$\Lambda_B(\phi, \hat{\beta}) = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} \cosh(\phi) - 1 & -\sinh(\phi)\hat{\beta}^T \\ -\sinh(\phi)\hat{\beta} & [\cosh(\phi)-1]\underbrace{\hat{\beta}\hat{\beta}^T}_{\text{Dyade}} \end{pmatrix}$$

Hierbei hängt die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Ursprungs von K' in K mit der Rapidität ϕ wie folgt zusammen:

$$\vec{v} = c \tanh(\phi)\hat{\beta}$$

12.1.09

Theorie II: Vorlesung 22

Notiztitel 12.01.2009

(Fortsetzung 6.3.1)

Konkret erhält man für Ortsvektoren

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi)ct & -\sinh(\phi)(\vec{x}\cdot\hat{\beta}) \\ -\sinh(\phi)ct\hat{\beta} & +[\vec{x}-(\vec{x}\cdot\hat{\beta})\hat{\beta}]+\cosh(\phi)(\vec{x}\cdot\hat{\beta})\hat{\beta} \end{pmatrix}$$

bzw. mit $\cosh(\phi) = (1-\tanh^2(\phi))^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x}_\perp \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} ct - \beta x_\parallel \\ (x_\parallel - vt)\hat{\beta} \end{pmatrix},$$

wobei $x_\parallel = \vec{x}\cdot\hat{\beta}$; $\vec{x}_\perp = \vec{x} - x_\parallel \hat{\beta}$

Nichtrelativistischer Grenzfall: für $v \ll c$ gilt

$\beta \ll 1$, $\gamma \to 1$ $\leadsto$ $t' = t$, $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$

Noch zu zeigen: Drehungen und Lorentz-boosts erfüllen Metrik-Bedingung $g = \Lambda^T g \Lambda$:

(i) $$\Lambda^T g \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R^T(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R(\vec{\alpha}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R^T(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -R(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = g \quad \text{o.k.}$$

Inverse: $$\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -R^T(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R^T(\vec{\alpha}) \end{pmatrix}$$

$$= \Lambda^T = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R^T(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R(-\vec{\alpha}) \end{pmatrix}$$

(ii) Betrachte o.B.d.A Boost in x-Richtung (Geschw. β):

$$\Lambda^T g \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit $a = \gamma^2(1-\beta^2) = 1, \; b = -\beta\gamma^2 + \beta\gamma^2 = 0$

$= g$ o.K. Beachte: hier $\Lambda = \Lambda^T$ symmetrisch.

$\Lambda \xrightarrow{\beta \to -\beta} \Lambda^{-1}$ (Vorzeichenwechsel in $\Lambda^0{}_i, \Lambda^i{}_0$)

6.4 Physikalische Konsequenzen der Lorentz-Invarianz

Zentrales Postulat der Relativitätstheorie (universelle Lichtgeschwindigkeit)

$\Longleftrightarrow \; c^2(d\tau)^2 = (ds)^2 = dx^\mu dx_\mu$ ist invariant

Beachte: $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \Rightarrow dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

↑ Poincaré-Trafo ↑ Lorentz-Trafo

Rotationen im Wesentlichen trivial $\leadsto$ betrachte (weiter) Geschwindigkeitstransformationen (Lorentz-Boosts).

Da $\vec{x}'_\perp = \vec{x}_\perp$ unverändert $\leadsto$ nur 2 interessante Komponenten

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'_\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_\parallel \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g$$

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \tfrac{v}{c^2}x_\parallel\right) \\ x_\parallel' &= \gamma(x_\parallel - vt) \end{aligned} \quad (\Delta) \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} t &= \gamma\left(t' + \tfrac{v}{c^2}x_\parallel\right) \\ x_\parallel &= \gamma(x_\parallel' + vt') \end{aligned} \quad (\nabla)$$

Anwendung auf Stab (parallel zu $\vec{\beta}$), der in K' ruht:
(Achtung: in Skript $K \Leftrightarrow K'$ vertauscht)

$$x_\parallel^{\prime(2)} - x_\parallel^{\prime(1)} = \ell' \quad \text{(für alle Zeiten)}$$

Eine Messung in K zur Zeit t ergibt:

$$\ell = x_\parallel^{(2)} - x_\parallel^{(1)} \overset{\Delta}{=} \left(\frac{1}{\gamma}x_\parallel^{\prime(2)} + vt\right) - \left(\frac{1}{\gamma}x_\parallel^{\prime(1)} + vt\right) = \frac{\ell'}{\gamma}$$

$\rightsquigarrow$ Längenkontraktion: bewegte Objekte erscheinen in Bewegungsrichtung verkürzt.

$\rightsquigarrow$ Volumen um Faktor $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2} < 1$ kleiner.

Betrachte jetzt Uhr, die in K' ruht und anzeigt, dass zwischen 2 Ereignissen, die beide am Ort $(x_\parallel', \vec{x}_\perp')$ stattfanden, die Zeit $\Delta t' = t'^{(2)} - t'^{(1)}$ vergangen ist.
Der Beobachter in K findet dagegen:

$$\Delta t = t^{(2)} - t^{(1)} = \gamma\left(t'^{(2)} + \tfrac{v}{c^2}x_\parallel'\right) - \gamma\left(t'^{(1)} + \tfrac{v}{c^2}x_\parallel'\right) = \gamma\,\Delta t'$$

Bewegte Uhren laufen langsamer.

Frage: wieso ist das „Zwillingsparadoxon" paradox?
Antwort: Symmetrie – Beobachtung von Zeitdilatation und Lorentz-Kontraktion ist wechselseitig („retardierter Zwerg").
Aber: bei konstanter Relativgeschwindigkeit trifft man sich nur einmal!
Wiedertreffen $\rightsquigarrow$ Beschleunigung (siehe Aufg. 36).

Beachte: Lorentz-Trafos sind i.A. nicht-kommutativ (z.B. Drehungen um verschiedene Achsen, Lorentz-Boosts in verschiedene Richtungen).

Ausnahme: Boosts in gleiche Richtung (Skript, Aufg. 2)

$$\rightsquigarrow \beta_{1+2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$$

Jetzt Transformation beliebiger Geschwindigkeiten: für Inertialsysteme K, K' mit $\vec{v}_{rel}(K', K) = \vec{v}$ gilt (s.o.):

$$\begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x}_\perp' \end{pmatrix} + \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \vec{\beta} & \vec{\beta} \end{pmatrix}}_{\leftarrow 4\times 2 \text{ Matrix}} \begin{pmatrix} ct' \\ x_\parallel' \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Mit $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$, $\vec{u}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'}$ und $u_\parallel = \vec{u} \cdot \hat{\beta}$, $\vec{u}_\perp = \vec{u} - u_\parallel \hat{\beta}$

folgt:
$$t = \gamma \left(t' + \frac{\beta}{c} x_\parallel' \right) \qquad \text{(1. Zeile von } *)$$

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} \frac{dx_\parallel'}{dt'} \right) \Leftrightarrow \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{1}{c^2} v u_\parallel' \right)}$$

$$\vec{x} = \vec{x}_\perp' + \gamma \left(ct' \vec{\beta} + x_\parallel' \hat{\beta} \right)$$

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dt'}{dt} \left[\frac{d\vec{x}_\perp'}{dt'} + \gamma \left(\beta c + \frac{dx_\parallel'}{dt'} \right) \hat{\beta} \right]$$

$$= \frac{\vec{u}_\perp' + \gamma (v + u_\parallel') \hat{\beta}}{\gamma \left(1 + \frac{1}{c^2} v u_\parallel' \right)}$$

Komponentenweise erhält man also:

$$u_\parallel = \frac{u_\parallel' + v}{1 + v u_\parallel' / c^2}; \qquad \vec{u}_\perp = \frac{\vec{u}_\perp'}{\gamma (1 + v u_\parallel' / c^2)} \qquad (\Diamond)$$

Nicht-kommutativ in $\vec{u} \leftrightarrow \vec{v}$!

Zur Berechnung des Transformationsverhaltens von Winkeln setze

$$u_{\parallel} = u\cos(\vartheta')$$

(analog für $\vec{u}'$)

$$\vec{u}_{\perp} = u\sin(\vartheta')\,\hat{u}_{\perp}$$

$$\rightsquigarrow u\cos(\vartheta) = \frac{u'\cos(\vartheta') + v}{1 + vu'\cos(\vartheta')/c^2}; \quad u\sin(\vartheta) = \frac{u'\sin(\vartheta')}{\gamma[1 + vu'\cos(\vartheta')/c^2]}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\tan(\vartheta) = \frac{\sin(\vartheta')}{\gamma[u'\cos(\vartheta') + v]}}$$

Für $u' \to c$ (ultrarelativistischer Grenzfall oder Photonen, d.h. Lichtstrahl) erhält man:

$$\tan(\vartheta) = \frac{\sin(\vartheta')}{\gamma[\cos(\vartheta') + \beta]}$$

Diese Richtungsänderung des Lichts beim Übergang auf ein anderes Inertiasystem (Aberration) wurde schon 1725 von Bradley beobachtet (Umlaufgeschw. der Erde um die Sonne): $\Delta\vartheta \sim \beta\sin(\vartheta') + \mathcal{O}(\beta^2)$

14.1.2009

+ Evaluation