Theorie II: Vorlesung 21

Notiztitel 12.01.2009

Kapitel 6 Spezielle Relativitätstheorie

(Fortsetzung von Theorie I)

Kurzwiederholung (bis 6.2)

Relativitätsprinzip $\longleftrightarrow$ Inertialsysteme $\Big\}$ auch
Deterministisches Prinzip $\quad$ Newton

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (alle Inertialsysteme)

6.1 Erste Konsequenzen der Postulate

Bezugssysteme K, K' mit $\vec{v}_{rel}(K', K) = \vec{v}$

- Relativität der Gleichzeitigkeit

(Schon in Newton-Mechanik: Relativität von Position / Abstand)

- Längen senkrecht zu $\vec{v}$ unverändert
- Zeitdilatation $T' = \gamma T$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\beta = \frac{v}{c}$
- Längenkontraktion (in Bewegungsrichtung): $\ell' = \frac{\ell}{\gamma}$

6.2 Der Abstand und die Eigenzeit

$s^2 = 0 \Leftrightarrow (s')^2 = 0$

Für Lichtsignal: $s^2 \equiv c^2(\Delta t)^2 - |\Delta \vec{x}|^2 = 0 = c^2(\Delta t')^2 - |\Delta \vec{x}'|^2 \equiv s'^2$

Infinitesimaler Abstand $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2}$

Notation $\vec{u} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$; $\vec{\beta}_u = \frac{\vec{u}}{c}$

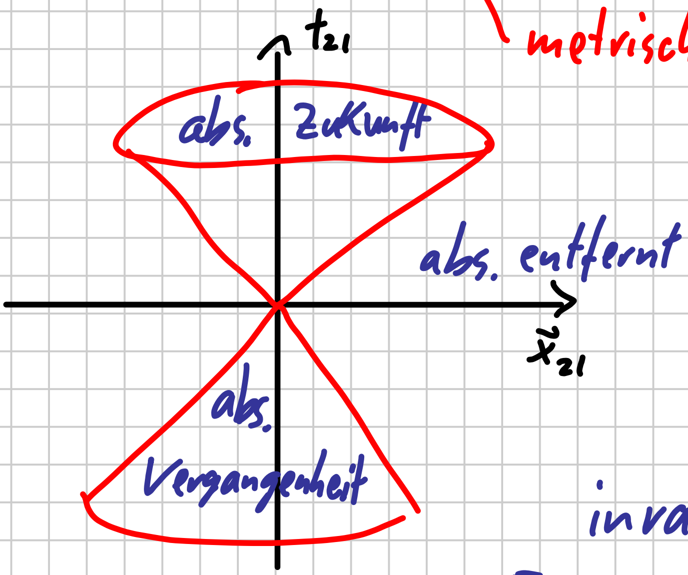
Lorentz-Transformation $\begin{pmatrix} c\,dt' \\ d\vec{x}' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} c\,dt \\ d\vec{x} \end{pmatrix}$

Homogenität, Isotropie etc. $\rightsquigarrow \quad (ds)^2 = (ds')^2 \quad \forall\, ds$

$\rightsquigarrow \quad s_{21}^2 = (s_{21}')^2 \quad \forall$ Paare von Ereignissen $(t_{1/2}, \vec{x}_{1/2})$

(Korrektur der Notation: gespiegelte Matrix $\tilde{\Lambda} \to \Lambda^T$)

$$\rightsquigarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}}_{\text{metrischer Tensor}} = \Lambda^T \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \Lambda$$



$s_{21}^2 > 0$ zeitartig

$s_{21}^2 = 0$ lichtartig

$s_{21}^2 < 0$ raumartig

invariante inf. Zeit $d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{dt}{\gamma_u}$

Eigenzeit τ

6.3 4-Schreibweise und Lorentz-Transformationen

Wir sind es gewöhnt, Euklidische Längen/Abstände kompakt zu notieren: $|\vec{x}|^2 = \vec{x}\cdot\vec{x} = \vec{x}^T\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i \equiv x_i x_i$

Analoge Notation für $s^2 = (ct)^2 - |\vec{x}|^2$?

Führe dazu den Kontravarianten 4-(Orts-)Vektor ein:

$$x^\mu \equiv (ct, \vec{x})^T \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

Index oben!

sowie den metrischen Tensor

$$\underset{\uparrow\ \text{beide Indizes unten}}{g_{\mu\nu}} = \underset{\uparrow\ \text{beide oben}}{g^{\mu\nu}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu=\nu=0 \\ -1 & \text{falls } \mu=\nu\neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}_{\mu\nu}$$

Wichtig: Die Stellung der Indizes (unten/oben) ist i.A. sehr relevant. Diese ändert sich insbesondere bei Anwendung des Metrischen Tensors.

Kovarianter 4-Orts-Vektor: $x_\mu \equiv \overset{\text{Einstein-Konv.}}{g_{\mu\nu} x^\nu} = (ct, \overset{\text{neg. Vorzeichen!}}{-\vec{x}})^T$

Damit gilt: $\underline{s^2} = c^2t^2 - |\vec{x}|^2 = (ct, \vec{x}) \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = \underline{x^\mu x_\mu}$

Modifizierte Einstein-Konvention: Summation über Indizes, die einmal unten, einmal oben auftreten (Kontraktion). Dabei ist die Differenz #(obere Indizes) - # untere Indizes konstant.

Formal kann man Indizes mithilfe des metrischen Tensors „herauf- und herunterziehen". Es gilt z.B.

$$g_{\mu r} g^{\nu\rho} = g_\mu{}^\nu \equiv \delta_\mu{}^\rho = (\mathbb{1})_{\mu\nu} = \delta^\mu{}_\rho = g^\mu{}_\rho = g^{\mu\nu} g_{r\rho}$$

Die Ableitung nach einem kontravarianten Vektor eliminiert einen oberen Index und wird daher kovariant notiert: $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ $\quad (\rightsquigarrow \partial_\mu (a_\nu x^\nu) = a_\nu \,)$

Analog: $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = g^{\mu\nu} \partial_\nu$

Auch der d'Alembert-Operator kann somit kompakt geschrieben werden: $\Box = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu$

Lorentz-Trafos $x_i'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x_i^{\nu}$ ← linearer Ansatz lassen die relativistischen Abstände invariant: $x'_{\mu} x'^{\mu} = x_{\mu} x^{\mu}$

$$\overset{6.2}{\Longleftrightarrow} \quad g^{-1} g \Lambda^{-1} = g^{-1} \underline{\Lambda^T g \Lambda} \Lambda^{-1}$$

(*) metr. Tensor ist selbstinvers

$$\Lambda^{-1} = g^{-1} \Lambda^T g = g \Lambda^T g$$

Wir haben also einen expliziten Ausdruck für die inverse Transformation Λ^{-1} gefunden.

Muss das Transformationsgesetz zwischen Inertialsystemen linear sein? Ja, weil

(i) geradlinig gleichförmige Bewegungen in geradlinig gleichförmige Bewegungen zu überführen sind

(ii) $\partial_{\nu} \partial_{\mu} (x'^{\alpha}) = 0$ (siehe Skript)

($\leadsto$ Linearität, Λ x-unabhängig)

6.3.1 Poincaré und Lorentz-Transformationen

Allgemeinste relativistisch korrekte Transformation:

Poincaré-Transformation $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$

Die Inhomogenität a^{μ} entspricht einer Translation in Zeit und Raum: $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$; $t' = t + \frac{a^0}{c}$

Homogener Anteil: Lorentz-Transformation.

Die Lorentz-Trafos bilden eine Gruppe bezüglich Hintereinanderausführung (bzw. Matrixmultiplikation, da

(i) mit Λ_1, Λ_2 auch das Produkt $\Lambda_1 \Lambda_2$ die Bedingung

* erfüllt: $(\Lambda_2^T \Lambda_1^T) g (\Lambda_1 \Lambda_2) \overset{*}{=} \Lambda_2^T g \Lambda_2 \overset{*}{=} g$

(ii) das Produkt ist assoziativ (aber nicht kommutativ!)
(iii) es existiert das 1-Element: Identität $\equiv \mathbb{1}_4$
(iv) zu jedem Λ ex. das inverse Element Λ^{-1} (s.o.)

Wegen $\det(\Lambda^T g \Lambda) = \det(\Lambda)\det(g)\det(\Lambda) \stackrel{!}{=} \det g$

gilt: $\det(\Lambda) = \pm 1$

Wichtigste Untermenge der Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}$:
eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \{\Lambda \mid \det(\Lambda) = +1;\ \Lambda^0{}_0 \geq 1\}$$

Erhält Zeitrichtung und Parität, ist stetig mit der Identität verbunden.

Spezialfälle: (i) Drehungen $\Lambda_R(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R(\vec{\alpha}) \end{pmatrix}$

mit 3-dimensionaler orthogonaler Matrix $R(\vec{\alpha})$

(ii) Lorentz-Boosts: Geschwindigkeitstransformationen im Orts-Zeit-Raum (vgl. Übungsaufgabe 2):

$$\Lambda_B(\phi, \hat{\beta}) = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} \cosh(\phi) - 1 & -\sinh(\phi)\hat{\beta}^T \\ -\sinh(\phi)\hat{\beta} & [\cosh(\phi) - 1]\underbrace{\hat{\beta}\hat{\beta}^T}_{\text{Dyade}} \end{pmatrix}$$

Hierbei hängt die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Ursprungs von K' in K mit der Rapidität ϕ wie folgt zusammen:

$$\vec{v} = c \tanh(\phi)\hat{\beta}$$

12.1.09

Theorie II: Vorlesung 22

Notiztitel 12.01.2009

(Fortsetzung 6.3.1)

Konkret erhält man für Ortsvektoren

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi)ct & -\sinh(\phi)(\vec{x}\cdot\hat{\beta}) \\ -\sinh(\phi)ct\hat{\beta} & +[\vec{x}-(\vec{x}\cdot\hat{\beta})\hat{\beta}]+\cosh(\phi)(\vec{x}\cdot\hat{\beta})\hat{\beta} \end{pmatrix}$$

bzw. mit $\cosh(\phi) = (1-\tanh^2(\phi))^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x}_\perp \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} ct - \beta x_\parallel \\ (x_\parallel - vt)\hat{\beta} \end{pmatrix},$$

wobei $x_\parallel = \vec{x}\cdot\hat{\beta}$; $\vec{x}_\perp = \vec{x} - x_\parallel \hat{\beta}$

Nichtrelativistischer Grenzfall: für $v \ll c$ gilt

$\beta \ll 1$, $\gamma \to 1$ $\rightsquigarrow$ $t' = t$, $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$

Noch zu zeigen: Drehungen und Lorentz-boosts erfüllen Metrik-Bedingung $g = \Lambda^T g \Lambda$:

(i) $$\Lambda^T g \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R^T(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R(\vec{\alpha}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R^T(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -R(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = g \quad \text{o.k.}$$

Inverse: $$\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -R^T(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R^T(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \Lambda^T = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R^T(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R(-\vec{\alpha}) \end{pmatrix}$$

(ii) Betrachte o.B.d.A Boost in x-Richtung (Geschw. β):

$$\Lambda^T g \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & 0 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit $a = \gamma^2(1-\beta^2) = 1$, $b = -\beta\gamma^2 + \beta\gamma^2 = 0$

$= g$ o.K. Beachte: hier $\Lambda = \Lambda^T$ symmetrisch.

$\Lambda \xrightarrow{\beta \to -\beta} \Lambda^{-1}$ (Vorzeichenwechsel in $\Lambda^0{}_i, \Lambda^i{}_0$)

6.4 Physikalische Konsequenzen der Lorentz-Invarianz

Zentrales Postulat der Relativitätstheorie (universelle Lichtgeschwindigkeit)

$\Longleftrightarrow$ $c^2(d\tau)^2 = (ds)^2 = dx^\mu dx_\mu$ ist invariant

Beachte: $\underset{\uparrow \text{ Poincaré-Trafo}}{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu} \Rightarrow \underset{\uparrow \text{ Lorentz-Trafo}}{dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu}$

Rotationen im Wesentlichen trivial $\rightsquigarrow$ betrachte (weiter) Geschwindigkeitstransformationen (Lorentz-Boosts).

Da $\vec{x}'_\perp = \vec{x}_\perp$ unverändert $\rightsquigarrow$ nur 2 interessante Komponenten

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'_\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_\parallel \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g$$

$\rightarrow$ $$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_\parallel\right) \quad (\Delta) \qquad \text{bzw.} \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x_\parallel\right) \quad (\nabla)$$
$$x_\parallel' = \gamma(x_\parallel - vt) \qquad\qquad x_\parallel = \gamma(x_\parallel' + vt')$$

Anwendung auf Stab (parallel zu $\vec{\beta}$), der in K' ruht:
(Achtung: in Skript $K \Leftrightarrow K'$ vertauscht!)

$$x_\parallel'^{(2)} - x_\parallel'^{(1)} = \ell' \quad \text{(für alle Zeiten)}$$

Eine Messung in K zur Zeit t ergibt:

$$\underline{\ell} = x_\parallel^{(2)} - x_\parallel^{(1)} \overset{\Delta}{=} \left(\frac{1}{\gamma}x_\parallel'^{(2)} + vt\right) - \left(\frac{1}{\gamma}x_\parallel'^{(1)} + vt\right) = \underline{\frac{\ell'}{\gamma}}$$

$\rightsquigarrow$ Längenkontraktion: bewegte Objekte erscheinen in Bewegungsrichtung verkürzt.

$\rightsquigarrow$ Volumen um Faktor $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2} < 1$ kleiner.

Betrachte jetzt Uhr, die in K' ruht und anzeigt, dass zwischen 2 Ereignissen, die beide am Ort $(x_\parallel', \vec{x}_\perp')$ stattfanden, die Zeit $\Delta t' = t'^{(2)} - t'^{(1)}$ vergangen ist.
Der Beobachter in K findet dagegen:

$$\Delta t = t^{(2)} - t^{(1)} = \gamma\left(t'^{(2)} + \frac{v}{c^2}x_\parallel'\right) - \gamma\left(t'^{(1)} + \frac{v}{c^2}x_\parallel'\right) = \underline{\gamma\,\Delta t'}$$

Bewegte Uhren laufen langsamer.

Frage: wieso ist das „Zwillingsparadoxon" paradox?
Antwort: Symmetrie – Beobachtung von Zeitdilatation und Lorentz-Kontraktion ist wechselseitig („retardierter Zwerg").
Aber: bei konstanter Relativgeschwindigkeit trifft man sich nur einmal!
Wiedertreffen $\rightsquigarrow$ Beschleunigung (siehe Aufg. 36).

Beachte: Lorentz-Trafos sind i.A. nicht-kommutativ (z.B. Drehungen um verschiedene Achsen, Lorentz-Boosts in verschiedene Richtungen).

Ausnahme: Boosts in gleiche Richtung (Skript, Aufg. 2)

$$\rightsquigarrow \beta_{1+2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$$

Jetzt Transformation beliebiger Geschwindigkeiten: für Inertialsysteme K, K' mit $\vec{v}_{rel}(K', K) = \vec{v}$ gilt (s.o.):

$$\begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x}'_\perp \end{pmatrix} + \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \vec{\beta} & \vec{\beta} \end{pmatrix}}_{\leftarrow 4\times 2 \text{ Matrix}} \begin{pmatrix} ct' \\ x'_\parallel \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Mit $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$, $\vec{u}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'}$ und $u_\parallel = \vec{u} \cdot \hat{\beta}$, $\vec{u}_\perp = \vec{u} - u_\parallel \hat{\beta}$

folgt: $$t = \gamma \left(t' + \frac{\beta}{c} x'_\parallel \right) \qquad \text{(1. Zeile von } *)$$

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} \frac{dx'_\parallel}{dt'} \right) \Leftrightarrow \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{1}{c^2} v u'_\parallel \right)}$$

$$\vec{x} = \vec{x}'_\perp + \gamma \left(ct' \vec{\beta} + x'_\parallel \hat{\beta} \right)$$

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dt'}{dt} \left[\frac{d\vec{x}'_\perp}{dt'} + \gamma \left(\beta c + \frac{dx'_\parallel}{dt'} \right) \hat{\beta} \right]$$

$$= \frac{\vec{u}'_\perp + \gamma (v + u'_\parallel) \hat{\beta}}{\gamma \left(1 + \frac{1}{c^2} v u'_\parallel \right)}$$

Komponentenweise erhält man also:

$$u_\parallel = \frac{u'_\parallel + v}{1 + v u'_\parallel / c^2}; \qquad \vec{u}_\perp = \frac{\vec{u}'_\perp}{\gamma (1 + v u'_\parallel / c^2)} \qquad (\diamond)$$

Nicht-kommutativ in $\vec{u} \leftrightarrow \vec{v}$!

Zur Berechnung des Transformationsverhaltens von Winkeln setze $u_{\parallel} = u\cos(\vartheta')$

(analog für $\vec{u}'$) $\vec{u}_{\perp} = u\sin(\vartheta')\,\hat{u}_{\perp}$

$$\rightsquigarrow u\cos(\vartheta) = \frac{u'\cos(\vartheta') + v}{1 + v u'\cos(\vartheta')/c^2}; \quad u\sin(\vartheta) = \frac{u'\sin(\vartheta')}{\gamma[1 + v u'\cos(\vartheta')/c^2]}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\tan(\vartheta) = \frac{\sin(\vartheta')}{\gamma[u'\cos(\vartheta') + v]}}$$

Für $u' \to c$ (ultrarelativistischer Grenzfall oder Photonen, d.h. Lichtstrahl) erhält man:

$$\tan(\vartheta) = \frac{\sin(\vartheta')}{\gamma[\cos(\vartheta') + \beta]}$$

Diese Richtungsänderung des Lichts beim Übergang auf ein anderes Inertiasystem (Aberration) wurde schon 1725 von Bradley beobachtet (Umlaufgeschw. der Erde um die Sonne): $\Delta\vartheta \sim \beta\sin(\vartheta') + \mathcal{O}(\beta^2)$

14.1.2009

+ Evaluation

Theorie II: Vorlesung 23

Notiztitel 15.01.2009

6.5 4-Vektoren

Jede (4-komponentige) Größe $a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)$, die genau so wie der 4-Ortsvektor x^μ transformiert wird

$$(a')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$$

heisst kontravarianter 4-Vektor; jede Größe a_μ, die gemäß $(a')_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu a_\nu$; $\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma g^{\sigma\nu}$ transformiert wird, heisst kovarianter 4-Vektor.

Umwandlung mit metrischem Tensor: $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$; $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$.

Das Quadrat eines 4-Vektors $a^2 \equiv a_\mu a^\mu$ ist ein Lorentz-Skalar, d.h. invariant unter Lorentz-Transformationen, ebenso wie das allgemeine Skalarprodukt (hier nicht positiv definit!) $a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu$

Falls $\varphi(x)$ ein Skalar ist, dann ist der 4-Gradient

$$\partial_\mu \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \vec{\nabla}\varphi\right)$$ ein kovarianter 4-Vektor.

Dagegen ist die 4-Divergenz $\partial \cdot a \equiv \partial^\mu a_\mu = \partial_\mu a^\mu = \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\mu}$ ein Lorentz-Skalar.

Wir definieren die 4-Geschwindigkeit dimensionslos als

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds} \;; \quad ds = \frac{c\,dt}{\gamma} = c\,d\tau$$

4-Vektor (dx^μ), Skalar (ds)

Offensichtlich ist u^μ 4-Vektor, z.B. im Gegensatz zu $\frac{dx^\mu}{dt}$.

Achtung: in Literatur auch $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ gebräuchlich.

Explizite Form: $u^\mu = \frac{\gamma}{c}\frac{d}{dt}(ct, \vec{x}) = \gamma_u(1, \vec{\beta}_u)$

Beachte: $u^2 = \gamma_u^2(1-\beta_u^2) = 1$

Auch 4-Vektor: 4-Beschleunigung $\frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}$; steht senkrecht auf 4-Geschwindigkeit

Beispiele/Anwendungen: a) Ladung/Strom

Experimentelles Faktum: elektrische Ladung ist L-Skalar.

Längen/Volumenkontraktion $\Rightarrow$ Ladungsdichte wird für $\vec{v}_{rel}(K', K) = \vec{u}$ als $\rho = \gamma_u \rho_0$ transformiert, falls die Ladung in K' ruht. Zusätzlich misst man in K auch eine Stromdichte $\vec{j} = \rho\vec{u} = \gamma_u\rho_0\vec{u}$. Zusammen $\rightsquigarrow$ 4-Stromdichte $j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j}) = \rho_0 c\gamma_u(1, \vec{\beta}_u) = \rho_0 c u^\mu$, die als 4-Vektor transformiert wird.

Kontinuitätsgleichung: $0 = \frac{\partial\rho}{dt} + \nabla\cdot\vec{j} = \partial_\mu j^\mu$ (L-Skalar)

b) Elektromagnetische Potentiale

Aus den Maxwell-Gleichungen lässt sich ableiten (siehe Skript): $\frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\mu = \Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu)$ mit 4-Potential $A^\mu = (\phi, c\vec{A})$, welches folglich als 4-Vektor transformiert wird. Lorentz-Eichung $\partial_\nu A^\nu = 0 \rightsquigarrow \boxed{\Box A^\mu = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\mu}$ (inhomogene Wellengleichung).

Homogene Lösung: Ebene Wellen $A^\mu(x) = A_0^\mu e^{-ik_\nu x^\nu}$ mit

4-Wellenvektor $k^\nu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$; $\omega = \frac{|\vec{k}|}{c}$ $(\Rightarrow k^2 = 0)$

Beachte: die Phase $\varphi(x) = k_\nu x^\nu$ ist Lorentz-Skalar.

Explizit lautet die Transformation für den 4-Wellenvektor $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$ mit $k_\parallel = \vec{k}\cdot\hat{\beta} = k\cos(\vartheta)$; $\vec{k}_\perp = \vec{k} - k_\parallel \hat{\beta} = k\,\hat{k}_\perp \sin(\vartheta)$:

$$\begin{pmatrix} \omega'/c \\ \vec{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{k}_\perp \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & \hat{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_\parallel \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\omega' = \gamma(\omega - \beta c k_\parallel) = \gamma\omega[1 - \beta\cos(\vartheta)]}$$

Relativistischer Doppler-Effekt

Spezialfälle: (i) longitudinaler Doppler-Effekt

$$\omega' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\omega \quad (\vartheta = 0); \qquad \omega' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega \quad (\vartheta = \pi)$$

(ii) transversaler Doppler-Effekt $\omega = \frac{\omega'}{\gamma} < \omega'$ $(\vartheta = \frac{\pi}{2})$

z. B. K' Ruhesystems eines Sterns

$\rightsquigarrow$ Rotverschiebung

Beobachter-System

Transformationsgesetz für Winkel:

$$\tan(\vartheta') = \frac{|\vec{k}_\perp'|}{k_\parallel'} = \frac{|\vec{k}_\perp|}{\gamma(k_\parallel - \beta\frac{\omega}{c})} = \frac{\sin(\vartheta)}{\gamma[\cos(\vartheta) - \beta]}$$

wie aus Kap 6.4 bekannt.

6.6 Masse und Energie

Betrachten wir ein Teilchen mit Ruhemasse m_0 und 4-Geschwindigkeit u^μ. Offensichtlich ist $p^\mu \equiv m_0 c u^\mu$ ein 4-Vektor. Für die Ortskomponenten gilt:

$$p^i = m_0 c \gamma \beta^i = m_0 \gamma \frac{dx^i}{dt} \xrightarrow{|\vec{u}| \to 0} m_0 \frac{dx^i}{dt}$$

$\rightsquigarrow$ relativistischer Impuls $\vec{p} = m_u \vec{u}$ mit $m_u = \gamma_u m_0$

Bedeutung der Zeitkomponente p^0?

$$p_\mu p^\mu = m_0^2 c^2 \underbrace{u_\mu u^\mu}_{=1} = m_0^2 c^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2$$

$$\Rightarrow \quad p^0 = \sqrt{m_0^2 c^2 + |\vec{p}|^2} = m_0 c \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{p}}{m_0 c}\right)^2}$$

$$= m_0 c \left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{2(m_0 c)^2} + \mathcal{O}(c^{-4})\right)$$

$$\Rightarrow \quad c p^0 = m_0 c^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2 m_0} + \mathcal{O}(c^{-2})$$

nichtrel. kinetische Energie

Daher ist $\mathcal{E} \equiv c p^0$ die Energie des Teilchens; die Ruheenergie $m_0 c^2$ kann prinzipiell durch Zerstrahlung freigesetzt werden (siehe Skript).

Also: 4-Impuls $p^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, m \vec{u}\right)$; $m \equiv m_u = m_0 \gamma_u$

Quantenmechanik: Licht wird in Form von Photonen ausgesendet mit Energie $\mathcal{E} = \hbar \omega$. Es gilt dann:

$$p^\mu = \hbar k^\mu \qquad (\text{für } m_0 = 0).$$

6.7 Die Lorentz-Kraft und elektromagnetische Felder

Das Dyadische Produkt $D^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu$ von kontravarianten 4-Vektoren a^μ, b^μ wird wie folgt transformiert:

$$(D')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma a^\rho b^\sigma = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma D^{\rho\sigma}$$
$$\left(= (a')^\mu (b')^\nu\right)$$

Die Dyaden $\left\{\begin{matrix} D^{\mu\nu} (= a^\mu b^\nu) \\ D_{\mu\nu} (= a_\mu b_\nu) \\ D_\mu{}^\nu (= a_\mu b^\nu) \\ D^\mu{}_\nu (= a^\mu b_\nu) \end{matrix}\right\}$ heissen $\left\{\begin{matrix} \text{kontravariant} \\ \text{kovariant} \\ \text{gemischt} \\ \text{"} \end{matrix}\right\}$

Sie können mit dem metrischen Tensor ineinander überführt werden: $D_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} D^{\rho\sigma}$ etc.

Jede Größe $T^{\mu\nu}$ $(\mu, \nu \in \{0,1,2,3\})$, die wie $D^{\mu\nu}$ transformiert wird, heisst kontravarianter Tensor 2. Stufe.

Analog:
- kovariante und gemischte Tensoren
- Tensoren anderer Stufen.

Beachte:
- 4-Vektoren sind Tensoren 1. Stufe,
- 4-Skalare sind Tensoren 0. Stufe

Die Bildung von Skalarprodukten führt zur Verjüngung der Tensoren. So sind z.B.

$$d^\mu = D^{\mu\nu} c_\nu = a^\mu b^\nu c_\nu \quad \text{und} \quad t^\mu = T^{\mu\nu} c_\nu$$

jeweils (kontravariante) 4-Vektoren.

Folglich ist der elektromagnetische Feldtensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

ein antisymmetrischer kovarianter Tensor 2. Stufe mit

$$(F')^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} F^{\rho\sigma}$$

Mit $F^{\mu\mu} = 0$, $F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = [-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}]_i = E_i$

und $F^{ij} = \varepsilon_{ijk}(-c B_k)$ (wegen $B_k = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i A^j / c$)

folgt komponentenweise:

$$\boxed{F^{\mu\nu} (= \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial_{\nu} A^{\mu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Damit kann man direkt das Verhalten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unter Raumspiegelungen ableiten:

$$F^{\mu\nu} \xrightarrow{\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}} (F')^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ -E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ -E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix} (= F_{\mu\nu})$$

d.h. $\vec{B} \to \vec{B}$ (Pseudovektor), $\vec{E} \to -\vec{E}$ (echter Vektor)

19.1.2009

Theorie II: Vorlesung 24

Notiztitel 16.01.2009

(Fortsetzung 6.7)

Aus der Transformationsvorschrift für den Feldtensor folgt die für $\vec{E}$ und $\vec{B}$. So erhält man für einen Lorentz-Boost (siehe Skript/Übung):

$$\vec{E}\,' = \gamma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) - (\gamma-1)(\hat{\beta}\cdot\vec{E})\hat{\beta}$$

$$\vec{B}\,' = \gamma(\vec{B} - \tfrac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}) - (\gamma-1)(\hat{\beta}\cdot\vec{B})\hat{\beta}$$

bzw. komponentenweise (siehe Übung):

$$\boxed{\begin{array}{ll} E_{\parallel}' = E_{\parallel} & B_{\parallel}' = B_{\parallel} \\ \vec{E}_{\perp}' = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v}\times\vec{B}_{\perp}) & \vec{B}_{\perp}' = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \tfrac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}_{\perp}) \end{array}}$$

Für ein Teilchen mit Ladung q stellt der 4-Vektor $K^{\mu} \equiv q F^{\mu\nu} u_{\nu}$ die relativistische Verallgemeinerung der Lorentz-Kraft $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ dar:

$$K^{\mu} = q(F^{\mu 0}u_0 + F^{\mu i}u_i) = q\gamma_u [F^{\mu 0} - \underbrace{F^{\mu j}\beta_j}_{(-\varepsilon_{ijk}cB_k)(-\beta_j) \text{ für } \mu=i}]$$

$$= q\gamma_u (\vec{E}\cdot\vec{\beta}, \vec{E} + \vec{u}\times\vec{B})$$

Die Bewegungsgleichung $\boxed{m_0 \frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = K^{\mu}}$ ist sicher korrekt im momentanen Ruhesystem: $(0, m_0\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2}) = (0, q\vec{E})$.

$\rightsquigarrow$ (kovariante Formulierung) gilt in jedem Inertialsystem.

Check: $u^2 = 0 \Rightarrow 0 \overset{!}{=} u_{\mu}\frac{du^{\mu}}{d\tau} = \frac{1}{m_0 c} u_{\mu}K^{\mu} = \frac{q}{m_0 c} u_{\mu} \overset{\text{antisymm}}{F^{\mu\nu}} u_{\nu} = 0$ ✓

Kapitel 9: Relativistische Dynamik

Theorie I: $\vec{F} = m\vec{a}$

Kapitel 6: relativistische Verallgemeinerung

Kapitel 7+8: Analytische Mechanik:
Hamilton'sches Prinzip
Lagrange-Gleichungen
Hamilton-Gleichungen
Hamilton-Jacobi-Formalismus
...

Frage: Relativistische Verallgemeinerung der Methoden von Kap. 7+8 möglich?

Antwort: Im Prinzip ja: sogar relativ einfach für einzelne Teilchen

Aber: Fernwirkungen verboten $\rightsquigarrow$ Zwangsbedingungen problematisch, (Gravitation $\rightsquigarrow$ allgemeine Relativitätstheorie)

(Skript 9.1 + 9.2: Wiederholung)

9.3 Kräftefreie Teilchen

Der gesuchte Formalismus muss folgendes reproduzieren:

(i) die freie Bewegungsgleichung $m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$

(mit Lösung: u^μ = konstant, d.h. geradlinig gleichförmige Bewegung)

(ii) die „Einstein-Formel" $\mathcal{E} = mc^2 = \gamma m_0 c^2$

(iii) den nichtrelativistischen Grenzfall.

Ansatz für Lorentz-invariantes Wirkungsfunktional (Max Planck, 1906):

$$\underset{\text{Materie}}{S_M} = S_1^2[x] = -m_0 c \int_1^2 ds = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma_u(t)}$$

Lorentz-Skalare

Hierbei sind den Ereignissen „1" und „2" die Koordinaten $x_1^\mu = (ct_1, \vec{x}_1)$ bzw. $x_2^\mu = (ct_2, \vec{x}_2)$ zugeordnet (in einem beliebig, aber fest, gewählten Inertialsystem). Diese sind bei Variation von S festzuhalten.

(i) Zur Bestimmung des stationären Punkts $\vec{0} = \frac{\delta S}{\delta \vec{x}(t)}$

schreiben wir $S_M = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$

mit $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; t) = -\frac{m_0 c^2}{\gamma_u(t)} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{c^2}}$

(Kontrolle: im nichtrelativistischen Limes erhält man:

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; t) = -m_0 c^2 \left[1 - \frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{2c^2} + \mathcal{O}(c^{-4})\right] \qquad \Lambda = -m_0 c^2 t$$

$$= -m_0 c^2 + \frac{1}{2} m |\dot{\vec{x}}|^2 + \mathcal{O}(c^{-2}) \xrightarrow{c\to\infty} \frac{1}{2} m_0 |\dot{\vec{x}}|^2 + \frac{d}{dt}\Lambda$$

o.K.)

$$\leadsto \vec{0} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = -\frac{d}{dt}\left[-m_0 c^2 \frac{-\dot{\vec{x}}/c^2}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2}}\right]$$

$$= -m_0 \frac{d}{dt}(\gamma_u \vec{u})$$

Lösung: $\vec{u}$ konstant $\Rightarrow m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$ $\square$

(ii) Hier: S_M ist für physikalische Bahn minimal:

Abstand $\| x_1^\mu - x_2^\mu \|$ zeitartig (sonst keine Bahn $1 \to 2$)

$\rightsquigarrow$ es existiert ein Inertialsystem K' mit $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$

$\rightsquigarrow$ Gesamtabstand $\displaystyle\int_1^2 ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\frac{1}{\gamma_u(t)}}_{\leq 1}$

wird durch ruhendes Teilchen maximiert

$\rightsquigarrow$ ruhendes Teilchen (in K') minimiert S_M

$\rightsquigarrow$ Bewegung in jedem IS geradlinig gleichförmig. $\square$

Verallgemeinerter Impuls (wie üblich):

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m_0 \dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2}} = \gamma m_0 \vec{u}$$

$$\rightsquigarrow \quad p_i = m_0 c u^i$$

Lagrange-Funktion nicht explizit zeitabhängig

(iii) $\rightsquigarrow$ Energie ist durch das Jacobi-Integral gegeben:

$$\varepsilon(\dot{\vec{x}}) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L = \frac{m_0 |\dot{\vec{x}}|^2}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2}} - \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{c^2}}\right)$$

$$= \gamma_u m_0 c^2 (\beta^2 + (1 - \beta^2))$$

$$= \gamma_u m_0 c^2 = m_0 c u^0$$

$$\Rightarrow \quad p^\mu = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right) = m_0 c u^\mu$$

$$\varepsilon(\vec{p}) = H(\vec{x}, \vec{p}; t) = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

(nichtrelativistischer Limes: $\varepsilon(\vec{p}) = m_0 c^2 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + \dots$
ultrarelativistischer Limes: $\varepsilon(\vec{p}) = |\vec{p}|c \qquad (m_0 = 0)$)

Hamilton-Gleichungen:

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = 0, \qquad \dot{\vec{x}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}c}{\sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m_0^2 c^4}}$$

$\rightsquigarrow$ $\vec{u} = \dot{\vec{x}}$ konstant $\rightsquigarrow$ geradlinig gleichf. Bewegung. $\square$

(iv) Manifest kovariante Formulierung:

$$\delta S_M = -m_0 c \int_1^2 \delta(ds) = -m_0 c \int_1^2 \delta\sqrt{dx_\mu\, dx^\mu}$$

$$= -m_0 c \int_1^2 \frac{dx^\mu}{ds}\delta(dx_\mu) = -m_0 c \int_1^2 u^\mu d(\delta x_\mu)$$

$$\delta\sqrt{f} = \frac{\delta f}{2\sqrt{f}}$$

$$= -m_0 c\, u^\mu \delta x_\mu \Big|_1^2 + m_0 c \int_1^2 \delta x_\mu \frac{du^\mu}{ds} ds \overset{!}{=} 0$$

Dies kann für beliebige δx^μ nur gelten, falls

$\frac{du^\mu}{ds} = 0 \quad \rightsquigarrow$ geradlinig gleichf. Bewegung. $\square$

Relativistische Verallgemeinerung des Drehimpulses

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} = \begin{pmatrix} x_2 p_3 - x_3 p_2 \\ x_3 p_1 - x_1 p_3 \\ x_1 p_2 - x_2 p_1 \end{pmatrix}; \qquad L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k$$

(als Erhaltungsgröße im Zentralpotential)?

$\vec{L}$ ist Pseudovektor ⇝ müsste räumlich-räumlichen Komponenten eines Tensors entsprechen.

Ansatz: $L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$ (da kräftefrei)

Check: $$\frac{dL^{\mu\nu}}{ds} = \frac{dx^\mu}{ds} p^\nu + x^\mu \overbrace{\frac{dp^\nu}{ds}}^{=0} - \frac{dx^\nu}{ds} p^\mu - x^\nu \overbrace{\frac{dp^\mu}{ds}}^{=0}$$
$$= u^\mu p^\nu - u^\nu p^\mu$$
$$= m_0 c\,(u^\mu u^\nu - u^\nu u^\mu) = 0$$

Der Tensor ist also (für freies Teilchen) tatsächlich erhalten. Explizit in Komponenten:

$$L^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & \vec{\ell}^{\,T} & \\ \hline & 0 & L_3 & -L_2 \\ \vec{\ell} & -L_3 & 0 & L_1 \\ & L_2 & -L_1 & 0 \end{array}\right); \quad \vec{\ell} = \frac{\varepsilon}{c}\vec{x} - \vec{p}\,ct$$

Neben dem (Pseudovektor) Drehimpuls finden wir also eine weitere Erhaltungsgröße, den echten Vektor $\vec{\ell}$, der die geradlinig gleichförmige Bewegung beschreibt:

$$\vec{x} = \frac{c}{\varepsilon}\vec{\ell} + \vec{u}\,t, \quad \vec{u} = \frac{c^2}{\varepsilon}\vec{p} = \frac{\vec{p}}{\gamma_u m_0}$$

Wie zuvor entsprechen die Erhaltungsgrößen Invarianzen der Wirkung: Translation ⇔ Impuls (Ort) bzw. Energie (Zeit), Lorentzinvarianz ⇔ Drehimpuls

Insgesamt: Invarianz unter Poincaré-Trafos. 21.1.09

Theorie II: Vorlesung 25

Notiztitel 21.01.2009

9.4 Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld

Ausgangspunkt: (i) Relativistische Wirkung $S_m = -m_0 c \int_1^2 ds$ des freien Teilchens (9.3).

(ii) Nichtrelativistische Wirkung / Lagrange-Funktion geladener Teilchen im elektromagnetischen Feld (7.2):

$$\tilde{L} = \tilde{L}_m + \tilde{L}_{ww} \qquad \text{(hier: Tilde} \sim \text{nichtrelativistisch)}$$

mit $\tilde{L}_m = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$, $\tilde{L}_{ww} = q[\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} - \phi]$

$$\rightsquigarrow \quad \tilde{S}_{ww} = q \int_{t_1}^{t_2} dt \, [\vec{u} \cdot \vec{A}(\vec{x},t) - \phi(\vec{x},t)]$$

$$= q \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\frac{dt}{\gamma_u}}_{= d\tau = \frac{ds}{c}} [\gamma_u \vec{\beta} \cdot (c\vec{A}) - \gamma_u \phi]$$

$u_\mu = \gamma_u (1, -\vec{\beta})$

$A^\mu = (\phi, c\vec{A})$

$$= -\frac{q}{c} \int_1^2 ds \; u_\nu A^\nu$$

Überraschung: der „nichtrelativistische Ausdruck" $\tilde{S}_{ww}$ ist manifest Lorentz-invariant und stellt somit auch den korrekten relativistischen Ausdruck dar: $S_{ww} = \tilde{S}_{ww}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} S = S_m + S_{ww} &= \int_1^2 ds \left(-m_0 c - \frac{q}{c} u_\nu A^\nu\right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{|\vec{u}|^2}{c^2}} + q \vec{u} \cdot \vec{A} - q\phi\right) \end{aligned}}$$

Der Integrand ist natürlich die relativistisch korrekte

Lagrange-Funktion $L = L_m + L_{ww} = L_m + \tilde{L}_{ww}$

Hieraus leiten wir den kanonischen Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{u}} = \gamma m_0 \vec{u} + q\vec{A} \equiv \vec{\pi} + q\vec{A}$$

ab, wobei $\vec{\pi} \equiv \vec{p} - q\vec{A} = \gamma_u m_0 \vec{u}$ den kinetischen Impuls bezeichnet.

Faktor $\frac{1}{c}$ wegen $A^\mu = (\phi, c\vec{A})$

In 4-Vektoren: $p^\mu = m_0 c u^\mu + \frac{q}{c} A^\mu \equiv \pi^\mu + \frac{q}{c} A^\mu$

Die Hamilton-Funktion folgt durch Legendre-Trafo:

$$\begin{aligned} H &= \vec{u} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{u}} - L \\ &= \vec{u} \cdot (\gamma_u m_0 \vec{u} + q\vec{A}) - \left(\frac{-m_0 c^2}{\gamma_u} + q\vec{u} \cdot \vec{A} - q\phi\right) \\ &= \gamma_u m_0 c^2 \left(\frac{\vec{u}^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) + q\phi = \gamma_u m_0 c^2 + q\phi(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(\vec{x}, \vec{p}, t) &= \sqrt{\vec{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4} + q\phi \\ &= \sqrt{(\vec{p} - q\vec{A})^2 c^2 + m_0^2 c^4} + q\phi \end{aligned}$$

Für die Zeitkomponente des 4-Impulses gilt:

$$p^0 = m_0 c \gamma_u + \frac{q}{c}\phi = \frac{H}{c} \Rightarrow p^\mu = \left(\frac{H}{c}, \vec{p}\right)$$

Beachte: H darf nur als Energie interpretiert werden, falls ϕ nicht explizit zeitabhängig ist: $\phi = \phi(\vec{x})$. Dies legt die Eichung von ϕ bis auf eine Konstante fest.
In jedem Fall ist die intrinsische Energie

$$\mathcal{E}(\vec{u}) = \gamma_u m_0 c^2 = \sqrt{\vec{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

(kinetische E. + Ruheenergie) wohldefiniert.

Ableitung der Bewegungsgleichung aus Hamilton'schem Prinzip in kovarianter Form:

$$0 = \delta S = \delta \int_1^2 \left(-m_0 c \sqrt{dx_\mu dx^\mu} - \frac{q}{c} A^\nu dx_\nu\right)$$

$\delta(dx^\mu) = d(\delta x^\mu)$ $(\nu \to \mu)$

$$= \int_1^2 \left[-m_0 c \frac{dx^\mu}{ds} d(\delta x_\mu) - \frac{q}{c} A^\mu d(\delta x_\mu) - \frac{q}{c}(\partial^\mu A^\nu)(\delta x_\mu) dx_\nu\right.$$

$$= \underbrace{-\left(m_0 c\, u^\mu + \frac{q}{c} A^\mu\right) \delta x_\mu \Big|_1^2}_{=0}$$

$$+ \int_1^2 \delta x_\mu \, ds \left[m_0 c \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{q}{c} \partial^\nu A^\mu \frac{dx_\nu}{ds} - \frac{q}{c} \partial^\mu A^\nu \frac{dx_\nu}{ds}\right]$$

Variationsprinzip: $[\ldots] = 0$

$$\leadsto \boxed{m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = m_0 c^2 \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = q u_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = q u_\nu F^{\mu\nu} = K^\mu} \; *$$

Alt. Ableitung über Lagrange-/Hamilton-Gleichungen: kompliziert

Wir haben also die postulierte Bewegungsgleichung (6.7/9.2) reproduziert. Zur Interpretation schreiben wir um:

$$m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = m_0 \gamma_u \frac{d}{dt}(c\, u^\mu) = \gamma_u \frac{d\pi^\mu}{dt}$$

$$\overset{*}{=} K^\mu = q \gamma_u (\vec{E} \cdot \vec{\beta}_u , \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

Mit $\pi^\mu = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{\pi}\right)$ folgt daraus

$$\frac{d}{dt} \vec{\pi} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}); \qquad (\vec{\pi} = \gamma_u m_0 \vec{u})$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = q\,\vec{E}\cdot\vec{u}$$

Die Ausdrücke für die zeitliche Änderung des kinetischen Impulses und für die zugeführte Leistung haben also die gleiche Form wie im nichtrelativistischen Fall.

Invarianzen: Zeitumkehr ($t \to -t$), Parität ($\vec{x} \to -\vec{x}$), allg. Poincaré-Transformation $x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ und Eichung $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ ← L-Skalar (siehe Skript).

9.5 Das Coulomb-Problem für ein einzelnes Teilchen

Wir betrachten die Dynamik eines geladenen relativistischen Teilchens (Ladung q, Ruhemasse m_0) in einem Zentralpotential der Form $\phi(\vec{x}) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 x}$ (mit $x = |\vec{x}|$), das Vektorpotential sei $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{0}$. Interpretation: immobiles Teilchen (mit Masse $M_0 \gg m_0$) im Ursprung.

Aus der Wirkung $S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} - q\,\phi(\vec{x})\right]$

folgen die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = q\vec{E}; \qquad \vec{\pi} = \gamma_u m_0 \vec{u}; \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{q\hat{e}_x}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

Neben der Gesamtenergie $\mathcal{E}_{ges} = \sqrt{\pi^2 c^2 + m_0^2 c^4} - \frac{a}{x}$; $a = \frac{-qq_0}{4\pi\varepsilon_0}$

ist der Drehimpuls des Teilchens erhalten:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{x}\times\vec{\pi}) = \vec{u}\times\vec{\pi} + \vec{x}\times\frac{d\vec{\pi}}{dt} = \vec{x}\times q\vec{E} = \vec{0}$$

Erinnerung: im nichtrelativistischen Grenzfall ist zusätzlich der Runge-Lenz-Vektor $\vec{a} = \vec{u} \times \vec{L} - a\hat{e}_x$ erhalten, der für $E_{ges}^{NR} < 0$ vom Brennpunkt der Bahnellipse zum Perihel zeigt.

Wir wählen nun $\hat{e}_3 = \hat{L}$ und beschreiben die Umlaufbahn in der (x_1, x_2)-Ebene in Polarkoordinaten (x, φ).

$$\rightsquigarrow \quad L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2)} + \frac{a}{x}$$

Daraus ergeben sich die zu x bzw. φ konjugierten Impulse

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \gamma m_0 \dot{x} \equiv \pi_x \,; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \gamma m_0 x^2 \dot{\varphi} \equiv \pi_\varphi$$

und die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d\pi_x}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} = \gamma m_0 x \dot{\varphi}^2 - \frac{a}{x^2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d\pi_\varphi}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

φ zyklisch $\rightsquigarrow$ π_φ erhalten mit $\pi_\varphi = |\vec{L}|$:

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{\pi} = \gamma m_0 \vec{x} \times \vec{u} = \gamma m_0 \vec{x} \times (\dot{x}\hat{e}_x + x\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi)$$

$$= \gamma m_0 x^2 \dot{\varphi} (\hat{e}_x \times \hat{e}_\varphi) = \pi_\varphi \hat{e}_3$$

Wir werden sehen, dass sich die Form der Bahnen im relativistischen Fall teils fundamental von den Kepler-Bahnen unterscheidet. Zunächst betrachten wir jedoch den einfachsten Fall: Kreisbahnen.

Bei Kreisbahnen gilt: x konstant $\rightsquigarrow \dot{x} = 0 \rightsquigarrow \pi_x = 0$

$$\rightsquigarrow \quad \gamma m_0 x \dot{\varphi}^2 = \frac{a}{x^2} \qquad *$$

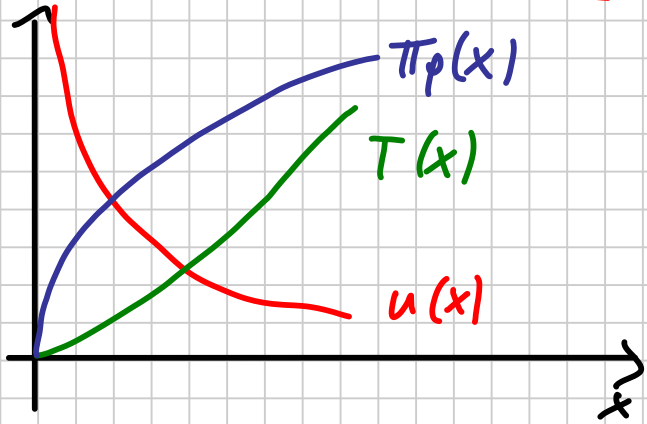
Frage: sind beliebige Radien, Geschwindigkeiten, Drehimpulse, Umlaufzeiten möglich?

Zunächst nichtrelativistisch:

$$m_0 x \dot{\varphi}^2 = \frac{a}{x^2} \iff m_0 u^2 = \frac{a}{x} \iff \underline{u(x) = \sqrt{\frac{a}{m_0 x}}}$$

$$\underline{\pi_\varphi} = |\vec{L}| = m_0 u x = \underline{\sqrt{m_0 a x}}$$

$$\underline{T} = \frac{2\pi x}{u} = \underline{2\pi \sqrt{\frac{m_0}{a}}\, x^{3/2}}$$



Antwort 1: Im nichtrelativistischen Grenzfall ja!

Eine Einschränkung bei der relativistischen Betrachtung ist klar: $u(x) < c$ Konsequenzen für $x_{min/max}, \pi_\varphi$?

$$\rightsquigarrow \quad a \overset{*}{=} \gamma m_0 x^3 \dot{\varphi}^2 = \pi_\varphi x \dot{\varphi} = \pi_\varphi u < \pi_\varphi c$$

$$\Rightarrow \quad \bar{a} \equiv \frac{a}{\pi_\varphi c} = \beta < 1$$

$$\iff \quad \pi_\varphi > \frac{a}{c}$$

26.1.09