

Kapitel 10: Der starre Körper

Wir kehren nun wieder zur nichtrelativistischen Physik zurück und wenden uns **starrten Körpern**, d.h. ausgedehnten Körpern, die (näherungsweise) nicht deformiert werden, zu.

Beispiele: Kinderkreisel, Tennisschläger, Bumerang, Frisbee, Flugzeug
Himmelskörper: Erde, Mond, Raumstation, ...

Vernachlässigung: innere Freiheitsgrade, insbesondere Schwingungen (auch Gezeiten auf Erde)

10.1 Anzahl der Freiheitsgrade

Offensichtlich kann die Lage eines starren Körpers durch die Position eines beliebigen körperfesten Punktes sowie die Orientierung des Körpers angegeben werden, wobei letztere durch eine Drehmatrix relativ zu einer Ausgangsorientierung zu parametrisieren ist.

Insgesamt ergeben sich $3 + 3 = 6$ **Freiheitsgrade**

Im Folgenden verwenden wir eine **diskrete Notation**, d.h. denken uns den starren Körper aus N Teilchen mit Massen m_i (und ggf. Ladungen q_i) zusammengesetzt.

Bemerkungen: (i) Zur realistischen Beschreibung müsste man Grenzübergänge wie $\sum_i \vec{x}_i m_i \rightarrow \int d^3r \vec{x} \rho(\vec{x})$ durchführen.

(ii) Für $N > 2$ müssen $3N - 6$ unabhängige innere Zwangsbedingungen der Form $|\vec{x}_i - \vec{x}_j| = l_{ij}$ vorliegen.

Standard-Parametrisierung:

$$\vec{x}_i(t) = \vec{x}_M(t) + D(\vec{\mathcal{J}}(t)) [\vec{x}_i(0) - \vec{x}_M(0)]$$

mit dem Schwerpunkt $\vec{x}_M(t) \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i(t)$; $M \equiv \sum_{i=1}^N m_i$

und der Drehmatrix D , die durch die 3 „Winkel“ $\vec{\mathcal{J}} = (\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3)$ festgelegt wird.

(\leadsto 6 verallgemeinerte Koordinaten $\vec{q} \equiv (\vec{x}_M, \vec{\mathcal{J}})$)

Beachte: die Definition der Drehmatrix kann zwar, wie in Theorie I eingeführt als

(i) $\vec{\mathcal{J}} = (\alpha, \vartheta, \varphi)$; $D(\vec{\mathcal{J}}) = R(\vec{u}) = R(\alpha \hat{\alpha})$; $\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$
erfolgen. Alternativ hat sich jedoch

(ii) die Parametrisierung

$$D(\vec{\mathcal{J}}) \mathcal{O} \equiv R(\vartheta_3 \hat{e}_3) R(\vartheta_2 \hat{e}_1) R(\vartheta_1 \hat{e}_3) \equiv R_3 R_2 R_1$$

(mit zeitunabhängiger orthogonaler Transformation \mathcal{O}) bewährt. $\vec{\mathcal{J}} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ heißen Euler-Winkel.

Die nachfolgenden Überlegungen sind weitgehend unabhängig von der Parametrisierung der Drehmatrix.

Durch externe Zwangsbedingungen kann die Zahl der Freiheitsgrade weiter (auf $f < 6$) reduziert werden:

bei dem starren Rotator wird ein Punkt \vec{x}_0 des Körpers festgehalten $\rightarrow \vec{x}_i(t) = \vec{x}_0 + D/U(t)[\dot{x}_i(0) - \dot{x}_0]$
 $\rightarrow f = 3$ Freiheitsgrade; unter Einwirkung der Schwerkraft heisst dieser (hier) **Kreisel**.

$f = 2$ Freiheitsgrade sind möglich, wenn z.B. bei dem starren Rotator zusätzlich die Rotation um eine körperfeste Achse unterbunden ist.

Falls der starre Rotator / Kreisel nur um eine Achse (durch \vec{x}_0) drehbar ist, erhält man das **physikalische Pendel**.

10.2 Kinetische Energie und Drehimpuls

Um die volle Lagrange-Funktion $L(\dot{q}, \ddot{q}, t)$ zu konstruieren, betrachten wir zunächst die kinetische

Energie. Wir definieren $\vec{\xi}_i(t) \equiv \vec{x}_i(t) - \vec{x}_m(t)$ (für Massenschwerpunkt \vec{x}_m), sowie $\vec{\xi}_i \equiv \vec{\xi}_i(0)$

$$\rightarrow \vec{x}_i(t) = \vec{x}_m(t) + \vec{\xi}_i(t) = \vec{x}_m(t) + D(U(t)) \vec{\xi}_i$$

(Nach Definition gilt: $\sum_i m_i \vec{\xi}_i = \sum_i m_i \vec{\xi}_i(0) = 0$)

Für die **kinetische Energie** finden wir mit $\dot{x}_i = \dot{x}_m + D \dot{\xi}_i$

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{x}_i|^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_m + D \dot{\xi}_i)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} M \dot{\vec{x}}_M^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{\xi}}_i|^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_M \cdot \dot{\vec{\xi}}_i}_{= \dot{\vec{x}}_M \cdot \dot{D} \sum_{i=1}^N m_i \vec{\xi}_i = 0} \\
&\equiv T_{tr}(\dot{\vec{x}}_M) + T_{rot}(\vec{V}, \vec{J})
\end{aligned}$$

Die Translations- und Rotationsanteile von T entkoppeln also (nur!), falls als Bezugspunkt der Schwerpunkt \vec{x}_M gewählt wird.

Wegen $DD^T = \mathbb{1} = D^T D$ können wir umschreiben:

$$\dot{D} \vec{\xi}_i = (\dot{D} D^T) D \vec{\xi}_i = \dot{D} D^T \vec{\xi}_i$$

$$T_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{D} \vec{\xi}_i|^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\underline{\dot{D} D^T} \vec{\xi}_i|^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\underline{\dot{D} D^T} \vec{\xi}_i|^2$$

Die Produkte $D^T \dot{D}$ und $\dot{D} D^T$ sind antisymmetrisch:

$$\mathbb{1} = D^T D \Rightarrow \dot{D}^T D + D^T \dot{D} = (\dot{D}^T D)^T + D^T \dot{D} = 0$$

$$\mathbb{1} = D D^T \Rightarrow \dot{D} D^T + D \dot{D}^T = \dot{D} D^T + (\dot{D} D^T)^T = 0$$

Mit den Bezeichnungen $\Omega \equiv -\dot{D} D^T$, $\bar{\Omega} \equiv -D^T \dot{D}$ können wir also schreiben: $\Omega_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega_\gamma$ bzw.

$\bar{\Omega}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{\omega}_\gamma$, wobei die Vektoren $\vec{\omega}$, $\vec{\bar{\omega}}$ durch

$$\omega_\alpha \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Omega_{\beta\gamma}; \quad \bar{\omega}_\alpha \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{\Omega}_{\beta\gamma}$$

definiert sind (bei $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}$).

Es folgen die Eigenschaften

$$(\Omega \vec{\xi})_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \xi_\beta \omega_\gamma = (\vec{\xi} \times \vec{\omega})_\alpha$$

$$\Rightarrow \Omega \vec{\xi} = -\vec{\omega} \times \vec{\xi} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\Omega} \vec{\xi} = -\vec{\bar{\omega}} \times \vec{\xi}$$

für beliebige Vektoren $\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j$.

(Insbesondere gilt: $\Omega \vec{w} = \vec{0} = \bar{\Omega} \vec{w}$).

Aus der Identität $\dot{\vec{\xi}}_i(t) = \dot{D} D^T \vec{\xi}_i = -\Omega \vec{\xi}_i = \vec{w} \times \vec{\xi}_i$ schliessen wir, dass \vec{w} die (momentane) Winkelgeschwindigkeit der Rotation darstellt.

Achtung: i.A. ist $\vec{w} \neq \dot{\vec{J}}$!

Beachte: die ungestrichenen Größen $\vec{\xi}_i, \vec{w}, \Omega$ beziehen sich auf das „raumfeste“ Koordinatensystem, ein Inertialsystem. Die gestrichenen Größen $\vec{\xi}_i, \vec{w}, \bar{\Omega}$ beziehen sich dagegen auf das „körperfeste“ Koordinatensystem, das i.A. beschleunigt ist.

Die Drehmatrix D transformiert zwischen beiden Koordinatensystemen: Ähnlichkeitsrafo

$$\vec{w} = D \vec{w}; \quad \Omega = -\dot{D} D^T = D(-D^T \dot{D}) D^T = \overbrace{D \bar{\Omega} D^T}^{22.09}$$

Allgemein werden Vektoren wie $\vec{v} = D \vec{v}$ und Matrizen (Tensoren 2. Stufe) wie $M = D \bar{M} D^T$ transformiert.

Spezialfall: Ω zeitunabhängig $\leadsto \vec{w} = \vec{w}, \Omega = \bar{\Omega}$
und $D = e^{-\Omega t} = R(\vec{w}t)$ (s. Skript)