5 Spezielle Relativitätstheorie

Zur Erinnerung: Postulate der (nichtrelativistischen) Newtonschen Mechanik

1) Relativitätsprinzip: die physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen gleich; ein KS, das geradlinig gleichförmig gegenüber einem IS bewegt wird, ist auch IS.

2) Absolute Abstände: Zeitintervalle und räumliche Abstände gleichzeitiger Ereignisse sind beobachterunabhängig, d.h. in allen IS gleich.

3) Deterministisches Prinzip: Kräfte hängen nur von Koordinaten und Geschwindigkeiten sowie ggf. der Zeit ab.

(96) 1+2 ⇝ 2 IS sind jeweils durch eine Galilei-

Transformation verbunden.

1+2 sind kompatibel mit einer unendlich großen Lichtgeschwindigkeit: (i) $\infty\hat{e} + \hat{v} = \infty\hat{e}$; (ii) instantane Lichtblitze + Fernwirkung garantieren absolute Zeit(abstände).

Problem: Widerspruch zu Maxwell-Gleichungen ($\rightsquigarrow$ endlicher Wert von c) und Experiment (Konstanz von c auf Skala kleiner z.B. Bahngeschwindigkeit der Erde).

Modifiziertes zweites Postulat der relativistischen Mechanik (Einstein, 1905), gültig neben 1) und 3):

2') Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hat in allen IS denselben Wert $c = 2{,}997925 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

Einsteins Leistung war es, etliche bekannte Ergebnisse [wie Lorentz-Transformationen (Lorentz, Larmor, Poincaré)] auf die Postulate 1+2' zurückzuführen und zusätzliche Voraussagen zu machen (z.B. transversaler

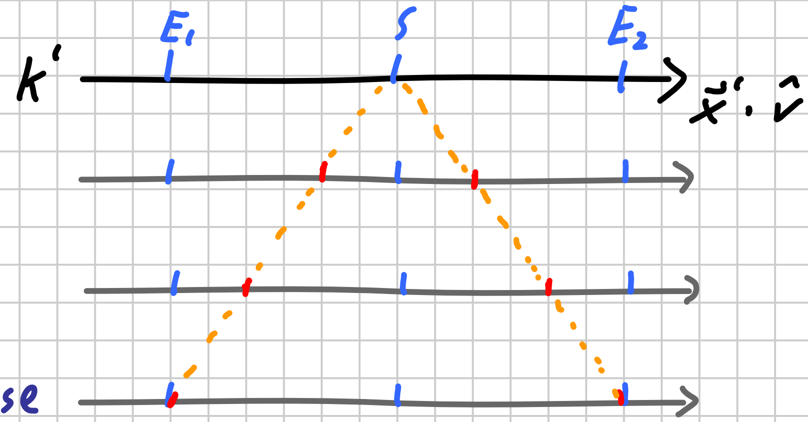
Doppler-Effekt und „Zwillings-Paradoxon").

Beachte: Die Gravitation ist nicht im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) beschreibbar; folglich verbleiben als Anwendungsbereich nur elektromagnetische Wechselwirkungen.

5.1 Erste Konsequenzen der Postulate

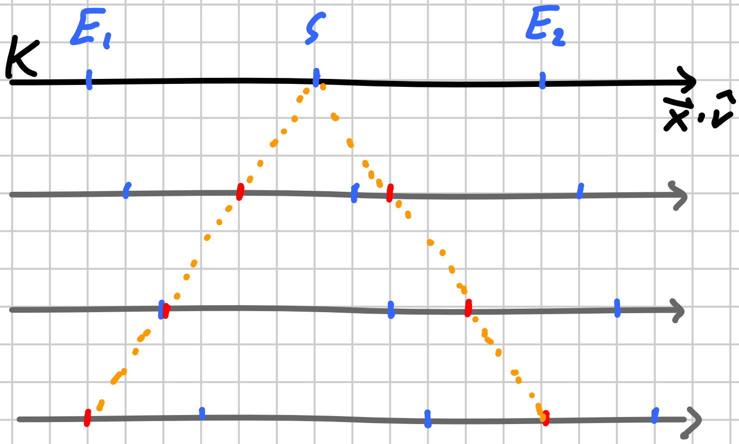
Im Folgenden führen wir eine Reihe von Gedankenexperimenten durch, um Konsequenzen der Postulate herzuleiten: (i) Relativität der Gleichzeitigkeit, (ii) Invarianz von Abständen senkrecht zur Geschwindigkeit $\vec{v}$ zwischen 2 IS, (iii) Zeitdilatation, (iv) Längenkontraktion parallel zu $\vec{v}$.

(i) Wir betrachten zwei Bezugssysteme K' und K, wobei der Ursprung von K' in K die Geschwindigkeit $\vec{v}_{rel}(K', K) = \vec{v}$ hat und nehmen an, dass in K' entlang der $\vec{x}' \cdot \hat{v}$-Achse ein Sender S und (in gleichem Abstand von S) zwei Empfänger E_1 und E_2 ruhen:

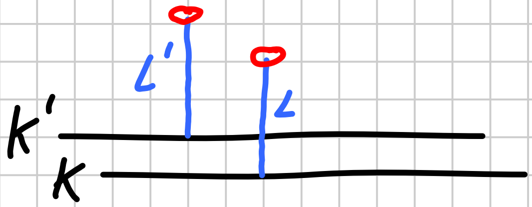


Zur Zeit $t=0$ sendet S Lichtsignale zu E_1 und E_2 aus, die diese wegen der Isotropie des Raums gleichzeitig erreichen.

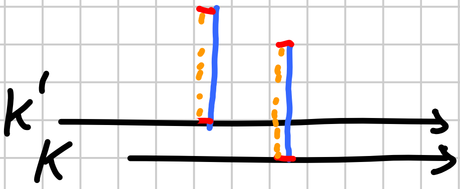
Für einen Beobachter in K sieht die Situation anders aus: jetzt wird Empfänger E_1, der sich auf die Quelle zubewegt, das Signal zuerst erhalten. Gleichzeitigkeit von Ereignissen ist folglich relativ, d.h. vom Bezugssystem abhängig.



(ii) Jetzt betrachten wir Längen senkrecht zu $\vec{v}$ und verwenden dazu eine symmetrische Anordnung: im Ursprung $\vec{O}$ von K und im Ursprung $\vec{O}'$ von K' (mit $\vec{O} = \vec{O}'$ für $t=t'=0$) steht jeweils eine Latte mit der Länge ℓ im Ruhesystem senkrecht zu $\vec{v}$; an den Enden sei jeweils eine Kreissäge angebracht. Nun kann die Länge L' der mit K' bewegten Latte, die der Beobachter in K misst, nicht kürzer als $L=\ell$ sein, da sonst (im Widerspruch zum Relativitätsprinzip) L durchgesägt würde, während L' heil bleibt. Umgekehrt kann L' auch nicht länger sein. Es folgt: Invarianz von Längen senkrecht zu $\vec{v}$.



(iii) Jetzt verwenden wir wieder 2 Latten, bringen an den Enden jedoch Spiegel an, zwischen denen Lichtpulse hin- und herlaufen; somit haben wir identische Uhren mit Periode $T=\frac{2\ell}{c}$ im jeweiligen Ruhesystem konstruiert. Aus Sicht des Beobachters in K legt der Lichtstrahl der in K' ruhenden Uhr jedoch einen verlängerten Weg zurück,

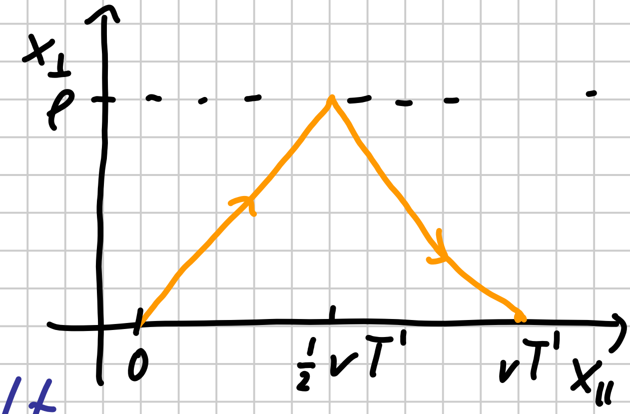


nämlich die Strecke

$2\sqrt{\ell^2+(\frac{1}{2}vT')^2}$, wofür

das Licht die Zeit

$T' = \frac{2}{c}\sqrt{\ell^2+(\frac{1}{2}vT')^2}$ braucht.



$$\rightsquigarrow \quad \left(\frac{T'c}{2}\right)^2 = \ell^2 + \left(\frac{T'v}{2}\right)^2$$

$$T'^2 = \left(\frac{2\ell}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 T'^2$$

$$T'^2\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = \left(\frac{2\ell}{c}\right)^2$$

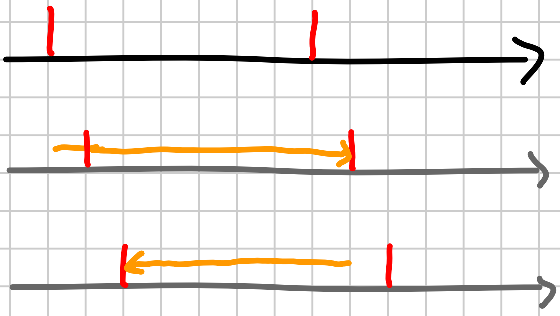
$$T' = \frac{2\ell/c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma T$$

Aus Sicht des Beobachters in K ist die Periode der bewegten Uhr also länger: bewegte Uhren laufen langsamer – Zeitdilatation.

Wegen der Isotropie des Raums kann es dabei nicht auf die Orientierung der Lichtlaufstrecke ankommen.

✓ 4.7.11

(iv) Jetzt kippen wir die Uhr in K', so dass die Lichtlaufstrecke in Bewegungsrichtung verläuft. Im Ruhesystem K' der Uhr sind Länge und Periode weiterhin ℓ bzw. T. Jetzt bestimmen wir die Länge ℓ' der Uhr, die ein Beobachter in K misst: dort bewegen sich die Spiegel mit $\vec{v}$ nach rechts ⇝ Laufzeiten



$$t'_{LR} = \frac{\ell' + v t'_{LR}}{c} \; ; \quad t'_{RL} = \frac{\ell' - v t'_{RL}}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad t'_{LR} = \frac{\ell'/c}{1-\beta} \; ; \quad t'_{RL} = \frac{\ell'/c}{1+\beta}$$

Da die Zeitdilatation der bewegten Uhr unabhängig von ihrer Orientierung sein sollte, muss $T' = \gamma T$ gelten

$$\rightsquigarrow \quad \gamma T \overset{!}{=} T' = t'_{LR} + t'_{RL} = \frac{\ell'}{c}\left(\frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1+\beta}\right)$$

$$= \frac{2\ell'/c}{1-\beta^2} = \frac{2\gamma^2 \ell'}{c}$$

Somit folgt für die Länge: $\boxed{\ell' = \frac{Tc}{2\gamma} = \frac{\ell}{\gamma}}$

Die Länge eines bewegten Körpers erscheint in Geschwindigkeitsrichtung also verkürzt; dies wird als Lorentz-Kontraktion bezeichnet.

Achtung: eigentlich muss die Länge bewegter Körper aus einer gleichzeitigen Messung der Koordinaten der Endpunkte bestimmt werden. Dies führt hier jedoch zum gleichen Ergebnis.

5.2 Der Abstand und die Eigenzeit

Wir werden jetzt aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit beobachterunabhängige Größen („infinitesimaler Abstand", „invarianter Abstand") ableiten, die die nichtrelativistischen Begriffe „Zeitintervall" und „räumlicher Abstand" ersetzen.

Dazu betrachten wir die Emission eines Licht-

signals in K am Ort $\vec{x}_1$ zur Zeit t_1 und seine Absorption zu einer späteren Zeit t_2 am Ort $\vec{x}_2$. Laut Postulat gilt: $c^2(t_2-t_1)^2-|\vec{x}_2-\vec{x}_1|^2=0$

Auch im Inertialsystem K' mit $v_{rel}(K',K)=\vec{v}$ gilt für die analogen Koordinaten: $c^2(t_2'-t_1')^2-|\vec{x}_2{}'-\vec{x}_1{}'|^2=0$.

Wir bezeichnen nun die Größe

$$s \equiv s_{21} \equiv \left[c^2(t_2-t_1)^2-|\vec{x}_2-\vec{x}_1|^2\right]^{1/2}$$

als invarianten Abstand zwischen den Ereignissen bei $(\vec{x}_1,t_1)$ bzw. $(\vec{x}_2,t_2)$. Bisher haben wir gezeigt, dass aus $s=0$ in einem IS folgt, dass $s=0$ in jedem IS gelten muss.

Jetzt betrachten wir den Abstand infinitesimal benachbarter Ereignisse $(\vec{x},t)$ und $(\vec{x}+d\vec{x},t+dt)$:

$$ds=\sqrt{c^2dt^2-|d\vec{x}|^2} \qquad (\text{in } K)$$

Analog gilt in K': $ds'=\sqrt{c^2(dt')^2-|d\vec{x}'|^2}$

Wieder gilt: $ds=0 \Leftrightarrow ds'=0 \quad \forall\, K,K'$

Bezeichnungen für ds: infinitesimaler Abstand, Linienelement, differentielles (Raum-Zeit) Intervall.

Beachte: • s und ds sind i.A. nicht reell

• ds ist (wie $|d\vec{x}|$) kein exaktes Differential

Jetzt geometrische Interpretation: mit der Notation $\frac{d\vec{x}}{dt} \equiv \vec{u}$ und $\frac{\vec{u}}{c} = \vec{\beta}_u$ gilt in K:

$$\underline{0} = (ds)^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2 = c^2(dt)^2\left(1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2}\right) = c^2(dt)^2\underline{\left(1 - \vec{\beta}_u^2\right)}$$

Also bedeutet $ds = 0$ in K, dass der Geschwindigkeitsvektor $\vec{\beta}_u$ für Licht auf einer Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $\vec{0}$ liegt, d.h. $|\vec{u}| = c$.

8.7.11

Jetzt nehmen wir für die Transformation nach K'

$$\vec{x}' = \vec{x}'(\vec{x}, t; \vec{v}); \quad t' = t'(\vec{x}, t; \vec{v})$$

eine lineare Beziehung an (Beweis später):

$$\begin{pmatrix} c\,dt' \\ d\vec{x}' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} c\,dt \\ d\vec{x} \end{pmatrix}; \quad \Lambda(\vec{x}, t; \vec{v}) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial t'}{\partial t} & c\left(\frac{\partial t'}{\partial \vec{x}}\right)^T \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{x}'}{\partial t} & \frac{\partial \vec{x}'}{\partial \vec{x}} \end{pmatrix}$$

wobei die Matrix Λ reell ist und für die Trafo von differentiellen Größen $(dt, d\vec{x})$ kein absolutes Glied auftauchen kann.

Die Gleichung $0 = (ds')^2 = c^2(dt')^2 - |d\vec{x}'|^2$ (für Licht) in K' kann daher wie folgt geschrieben werden:

$$0 = \begin{pmatrix} c\,dt' \\ d\vec{x}' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,dt' \\ d\vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,dt \\ d\vec{x} \end{pmatrix}^T B \begin{pmatrix} c\,dt \\ d\vec{x} \end{pmatrix}$$

$$= c^2(dt)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta}_{\vec{u}} \end{pmatrix}^T B \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta}_{\vec{u}} \end{pmatrix} \quad \text{mit } B(\vec{x},t;\vec{v}) \equiv \Lambda^T \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \Lambda \qquad (*)$$

Hierbei ist die Matrix B reell und symmetrisch.

Diese Gleichung für $\vec{\beta}_{\vec{u}}$ in K' stellt nur dann eine Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $\vec{0}$ dar (wie für Lichtstrahlen gefordert), wenn B folgende Form hat:

$$B = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}; \quad \varepsilon \equiv \varepsilon(\vec{x},t;\vec{v}) \in \mathbb{R};\ \varepsilon \neq 0 \qquad (\Delta)$$

Jetzt betrachten wir allgemeine Bahnen, z.B. von Teilchen, die sich also mit Geschwindigkeit $|\vec{u}| < c$ bewegen. Es folgt aus $(*)$ mit (Δ): $(ds')^2 = \frac{1}{\varepsilon} c^2 dt^2 (1 - \vec{\beta}_{\vec{u}}^2) = \frac{1}{\varepsilon} (ds)^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{ds}{ds'}\right)^2 = \varepsilon(\vec{x},t;\vec{v})$$

Diese Beziehung zwischen skalaren Größen (ds, ds')

kann jedoch wegen der Homogenität von Raum und Zeit nicht von $\vec{x}$ und t und wegen der Isotropie des Raums nicht von $\vec{v}$ abhängen

$$\rightsquigarrow \varepsilon \equiv \varepsilon(v); \quad (ds)^2 = \varepsilon(v)(ds')^2$$

Betrachten wir nun die Umkehrtransformation vom IS K' zum IS K mit $v_{rel}(K, K') = -\vec{v}$

$$\rightsquigarrow (ds')^2 = \varepsilon(v)(ds)^2$$

Die Verkettung liefert: $(ds)^2 = \varepsilon(v)(ds')^2 = \varepsilon^2(v)(ds)^2$ bzw. $\varepsilon^2(v) = 1$. Wegen $\varepsilon(0) = 1$ und der zu fordernden Stetigkeit von $\varepsilon(v)$ kommt als Lösung nur $\varepsilon(v) = 1$ in Betracht. Somit haben wir gezeigt, dass allgemein gelten muss: $\boxed{(ds)^2 = (ds')^2} \overset{\text{Integration}}{\rightsquigarrow} \boxed{s = s'}$

Der Abstand s_{21} ist also stets (nicht nur für Licht) invariant unter Koordinatentrafos zwischen IS:

$$\boxed{(s_{21})^2 = c^2(t_{21})^2 - |\vec{x}_{21}|^2 = c^2(t_{21}')^2 - |\vec{x}_{21}'|^2 = (s_{21}')^2} \qquad (\square)$$

(mit $t_{21} = t_2 - t_1$ etc.). Für Λ in (*) muss folglich die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \Lambda^T \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \Lambda$$

gelten.

Klassifikation von invarianten Abständen, Eigenzeit

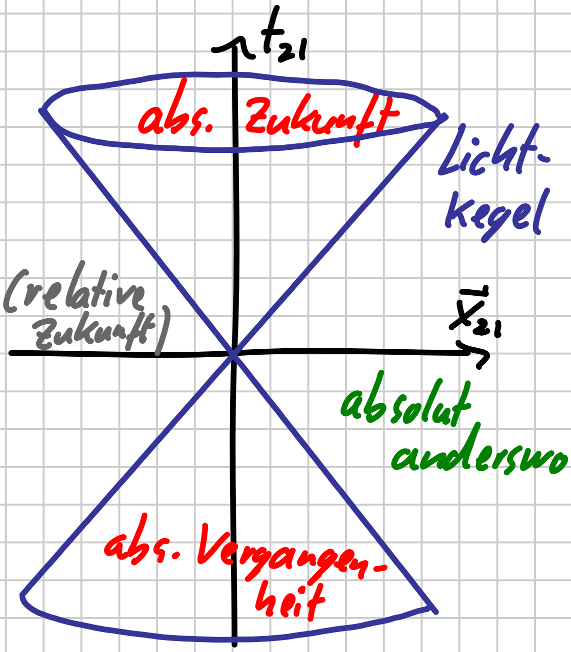
Aus (□) folgt, dass man zu 2 Ereignissen in K nur dann ein Bezugssystem K' finden kann, in dem diese

(i) am selben Ort stattfinden $(\vec{x}_{21}' = \vec{0})$, falls für deren invarianten Abstand gilt: $s_{21}^2 = c^2 (t_{21}')^2 > 0$ zeitartig

(ii) zur selben Zeit stattfinden $(t_{21}' = 0)$, falls für den inv. Abstand gilt: $s_{21}^2 = -|\vec{x}_{21}'|^2 < 0$ raumartig

Nullabstände $s_{21}^2 = 0$ heissen lichtartig.

Zeitartige Abstände $(s_{21}^2 > 0)$ mit $t_{21} > 0$ werden als absolute Zukunft bezeichnet: in jedem IS K' gilt $(t_{21}')^2 \geq \frac{1}{c^2} s_{21}^2 > 0$ und wegen Stetigkeit somit $t_{21}' > 0$, d.h. Ereignis 2 liegt für alle Beobachter in der Zukunft von Ereignis 1. Analog: absolute Vergangenheit $(s_{21}^2 > 0$ mit $t_{21} < 0)$.



Minkowski-Diagramm

Eine kausale Beziehung zwischen 2 Ereignissen ist nur möglich, wenn ihr Abstand zeit- oder lichtartig ist: $s_{21}^2 \geq 0$.

Mit dem invarianten infinitesimalen Abstand ds ist eine inv. infinitesimale Zeit $d\tau$ verknüpft:

$$\boxed{d\tau \equiv \frac{ds}{c} = \sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{1-\vec{\beta}_{\vec{u}}^{\,2}}\,dt = \frac{dt}{\gamma_{\vec{u}}}} \quad (**)$$

Interpretation: im bewegten System (z.B. für ein Teilchen, das sich mit Geschwindigkeit $\vec{u}$ relativ zu K bewegt, vergeht die Zeit $d\tau = \frac{dt}{\gamma_{\vec{u}}} \leq dt$, während eine unbewegte Uhr in K die Zeitdauer dt anzeigt.

Die Integration von $(**)$ liefert:

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1-\vec{\beta}_{\vec{u}}^{\,2}(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma_{\vec{u}}(t)}$$

Dabei wird τ als Eigenzeit des Teilchen bzw. bewegten Bezugssystems bezeichnet.

Beachte: wenn 2 Uhren U_1 und U_2 anfangs in K übereinstimmen (gleiche Zeit und Ort) und U_1 in K ruhend verbleibt während U_2 entlang einer Schleife bewegt wird, bis beide Uhren wieder zusammen sind, dann ist U_2 gegenüber U_1 zurückgeblieben. Analog gilt dies auch für biologische Vorgänge, weshalb das Phänomen als Zwillingsparadoxon bekannt ist.

5.3 4-Schreibweise und Lorentz-Transformation

Wir führen nun 4-dimensionale Vektoren für die Raumzeit ein, und zwar zum einen den sogenannten kontravarianten 4-Vektor $x^\mu \equiv (ct, \vec{x})$

(d.h. $x^0 = ct$; $x^1 = x_1$; $x^2 = x_2$; $x^3 = x_3$ für $\mu = 0,1,2,3$)

sowie den kovarianten 4-Vektor $x_\mu \equiv (ct, -\vec{x})$.

In der (modifizierten) Einsteinschen Summenkonvention wird über Paare von gleichen Indizes (ein oberer und ein unterer) summiert. Somit können wir schreiben:

$$s^2 = x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu \; (= c^2 t^2 - |\vec{x}|^2); \quad (ds)^2 = dx_\mu dx^\mu$$

↑ Skalarprodukt

Ko- und kontravariante Vektoren können mittels des metrischen Tensors $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$ ineinander überführt werden: $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \, ; \; x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$.

Wir führen noch die ko- bzw. kontravarianten Ableitungen ein: $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \, ; \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = g^{\mu\nu} \partial_\nu$

Somit kann auch der d'Alembert-Operator als Skalarprodukt geschrieben werden:

$$\Box = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \partial_\mu \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$$

Die linearen Transformationen des 4-Vektors x^μ, die den differentiellen Abstand ds bzw. das Eigenzeit-Intervall $d\tau = \frac{ds}{c}$ invariant lassen, werden als Poincaré-Transformationen oder als inhomogene Lorentz-Transformationen bezeichnet:

$$\boxed{x^\mu \to (x')^\mu = \underset{\uparrow \, 4 \times 4 \text{ Koeff.}}{\Lambda^\mu{}_\nu} x^\nu + \underset{\uparrow \, 4 \text{ Koeff.}}{a^\mu}}$$

Diese stellen die relativistische Verallgemeinerung der Galilei-Transformationen dar. Der Spezialfall ohne Verschiebung des Zeit/Ortsursprungs $(a^\mu = 0)$ heisst Lorentz-Transformation. Die zugehörige Matrix muss die Gleichung $\boxed{g = \Lambda^T g \Lambda}$ (*) erfüllen, damit die Eigenzeit invariant bleibt:

$$c^2 (d\tau)^2 = \underset{\rho\sigma}{g_{\mu\nu}}\, dx^{\overset{\rho}{\mu}} dx^{\overset{\sigma}{\nu}} \overset{!}{=} g_{\mu\nu} (dx')^\mu (dx')^\nu$$

$$= g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \, dx^\rho dx^\sigma$$

d.h. $$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma$$

$$= (\Lambda^T)_\rho{}^\mu g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma$$

11.7.11

Beispiel: eine einfache Drehung der Raumkoordinaten hat die Form $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R(\alpha) \end{pmatrix}$;

sie erfüllt offensichtlich die Bedingung (*):

$$\begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R^T(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R(\vec{\alpha}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R^T(\vec{\alpha}) R(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{o.k.}$$

Bisher gezeigt: die Invarianz von $ds^2 = dx_\mu dx^\mu$ unter linearen Transformationen impliziert, dass diese die Form von Poincaré-Trafos haben müssen.

Frage: nichtlineare Trafos möglich? Nein

- nur lineare Trafos überführen alle geradlinig gleichförmige Bewegungen in g.g. Bewegungen (1. Newton)
- mathematisches Argument (Eigenzeit), siehe PrD-Skript

5.3.1 Poincaré und Lorentz-Transformationen

Poincaré-Trafos $x^\mu \to (x')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ mit verschwindendem Translationsanteil $(a^\mu = 0)$, also die Lorentz-Trafos $(x')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ bilden eine Gruppe (als Untergruppe aller Poincaré-Trafos).

Diese Gruppenstruktur folgt aus der Matrixgleichung $\Lambda^T g \Lambda = g^{(*)}$: wenn Λ_1 und Λ_2 diese Bedingung erfüllen, dann auch das Produkt $\Lambda_1 \Lambda_2$, da

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T g \, \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T \underbrace{\Lambda_1^T g \Lambda_1}_{= g \text{ n.V.}} \Lambda_2 = g$$

Außerdem impliziert $\Lambda^T g \Lambda = g$ für die Determinanten $\det(\Lambda^T)\det(g)\det(\Lambda) = \det(g)$

$$\det^2(\Lambda) = 1$$

also $\det(\Lambda) = \pm 1$, somit existiert das inverse Element Λ^{-1}, welches ebenfalls (*) erfüllt.

Def: $\mathcal{L}$ Gruppe aller Lorentz-Trafos

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} ; \det(\Lambda) = +1 ; \Lambda^0{}_0 \geq 1\}$$

eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe (keine Raumspiegelungen, keine Umkehr der Zeitrichtung).

Zu $\mathcal{L}_+^\uparrow$ gehören die gewöhnlichen Drehungen

$$\Lambda_R(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R(\vec{\alpha}) \end{pmatrix}$$

mit $R(\vec{\alpha})\vec{x} = \hat{\alpha}(\hat{\alpha} \cdot \vec{x}) - \hat{\alpha} \times (\hat{\alpha} \times \vec{x}) \cos(\alpha) + (\hat{\alpha} \times \vec{x}) \sin(\alpha)$

und die Geschwindigkeitstransformationen $\Lambda_B(\phi,\hat{\beta})$ im Orts-Zeit-Raum (Lorentz-Boosts):

$$\Lambda_B(\phi,\hat{\beta}) = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} \cosh(\phi)-1 & -\sinh(\phi)\hat{\beta}^T \\ -\sinh(\phi)\hat{\beta} & [\cosh(\phi)-1]\hat{\beta}\hat{\beta}^T \end{pmatrix} \quad (\square)$$

Hierbei wird ϕ als Rapidität bezeichnet; es gilt:

$$\vec{v} = c\,\tanh(\phi)\,\hat{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \phi = \operatorname{artanh}(\beta)$$

Bei dem Produkt $\hat{\beta}\hat{\beta}^T$ handelt es sich um eine Dyade, also ein Matrixprodukt: $(\vec{x}\,\vec{y}^T)_{ij} = x_i\,y_j$

Explizit liefert die Anwendung von $(\square)$ also:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi)ct - \sinh(\phi)(\vec{x}\cdot\hat{\beta}) \\ -\sinh(\phi)ct\hat{\beta} + [\vec{x}-(\vec{x}\cdot\hat{\beta})\hat{\beta}] + \cosh(\phi)(\vec{x}\cdot\hat{\beta})\hat{\beta} \end{pmatrix}$$

Mit $\cosh(\phi) = (1-\tanh^2(\phi))^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$

und $\sinh(\phi) = \tanh(\phi)\cosh(\phi) = \beta\gamma$ folgt:

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x}_\perp \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} ct - \beta x_\parallel \\ (x_\parallel - vt)\hat{\beta} \end{pmatrix}, \qquad (\Delta)}$$

wobei $x_\parallel = \vec{x}\cdot\hat{\beta}$ die Projektion von $\vec{x}$ in Geschwindigkeitsrichtung $\hat{\beta}$ und $\vec{x}_\perp = \vec{x} - x_\parallel\hat{\beta}$ den senkrechten Anteil darstellt.

Beachte: bei festem v erhält man aus (Δ) für $c \to \infty$ (d.h. für $\beta \to 0$, $\gamma \to 1$) die Galilei-Trafo zurück: $t' = t$; $\vec{x}\,' = \vec{x} - \vec{v}t$.

15.7.11

$S_+^\uparrow$ hat die Struktur einer (nicht-kompakten) Lie-Gruppe (kontinuierliche Gruppe). Dabei lassen sich sowohl die Drehungen als auch die Boosts aus infinitesimalen Transformationen aufbauen:

$$\Lambda_R(\vec{\alpha}) = \left[\Lambda_R\left(\frac{\vec{\alpha}}{n}\right)\right]^n \; ; \; \Lambda_B(\phi,\hat{\beta}) = \left[\Lambda_B\left(\frac{\phi}{n},\hat{\beta}\right)\right]^n$$

$\rightsquigarrow \Lambda = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{L} - \vec{\phi}\cdot\vec{M}}$ mit $\vec{\phi} = \phi\hat{\beta}$ und den Erzeugern

$$L_k = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \ell_k \end{pmatrix} ; \quad M_k = \begin{pmatrix} 0 & \hat{e}_k^T \\ \hat{e}_k & \emptyset_3 \end{pmatrix},$$

wobei $\emptyset_3$ die 3×3-Nullmatrix ist, $\hat{e}_k$ die Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^3$ und ℓ_k die Drehmatrizen sind:

$$\ell_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \ell_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \ell_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gelten die Vertauschungsrelationen

(116) $[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k$; $[M_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k$; $[L_i, M_j] = i\varepsilon_{ijk} M_k$

Explizite Konstruktion der inversen Lorentz-Trafo:

$$g = \Lambda^T g \Lambda \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{g^{-1} g}\,\Lambda^{-1} = g^{-1}\underline{\Lambda^T g \Lambda}\,\Lambda^{-1}$$

metr. Tensor ist selbstinvers

$$\Lambda^{-1} = g^{-1}\Lambda^T g = g\Lambda^T g$$

Schon gezeigt: Drehungen erfüllen Matrix-Gleichung (*). Jetzt: Nachweis auch für Lorentz-Boosts:

$$\Lambda^T g \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{mit } a = \gamma^2(1-\beta^2) = 1, \; b = -\beta\gamma^2 + \beta\gamma^2 = 0\right)$$

$$= g$$ o.k.

Beachte: hier $\Lambda = \Lambda^T$ symmetrisch.

$$\Lambda \xrightarrow{\beta \to -\beta} \Lambda^{-1}$$ (Vorzeichenwechsel in $\Lambda^0{}_i, \Lambda^i{}_0$)

5.4 Physikalische Konsequenzen der Lorentz-Invarianz

Bisher gesehen: Zentrales Postulat der Relativitätstheorie (Lichtgeschwindigkeit c konstant)

$\Leftrightarrow \quad c^2(d\tau)^2 = (ds)^2 = dx^\mu dx_\mu$ ist invariant

Beachte: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Poincaré-Trafo}}}{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu} \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lorentz-Trafo}}}{dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu}$

Rotationen sind im Wesentlichen trivial ⇝ betrachte (weiter) Geschwindigkeitstransformationen (Boosts)

Da $\vec{x}'_\perp = \vec{x}_\perp$ unverändert ⇝ nur 2 interessante Komponenten:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'_\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_\parallel \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \tfrac{v}{c^2} x_\parallel\right) \\ x'_\parallel &= \gamma\left(x_\parallel - vt\right) \end{aligned} \quad (\Delta) \quad \overset{\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g}{\text{bzw.}} \quad \begin{aligned} t &= \gamma\left(t' + \tfrac{v}{c^2} x'_\parallel\right) \\ x_\parallel &= \gamma\left(x'_\parallel + vt'\right) \end{aligned} \quad (\nabla)$$

Jetzt Anwendungen

(i) Stab senkrecht zu $\vec{\beta}$, der in K' ruht ⇝ unverändert.

(ii) Stab parallel zu $\hat{\beta}$, der in K' ruht (Achtung: in Skript $K \leftrightarrow K'$ vertauscht!); die Enden haben die Positionen $x_\parallel'^{(1)}$ bzw. $x_\parallel'^{(2)}$.

Länge in K': $\ell' = x_\parallel'^{(2)} - x_\parallel'^{(1)}$ (für alle Zeiten)

In K muss die Position der Enden gleichzeitig bestimmt werden; die Messung zur Zeit t ergibt:

$$\ell = x_\parallel^{(2)} - x_\parallel^{(1)} \overset{\Delta}{=} \left(\frac{1}{\gamma} x_\parallel'^{(2)} + vt\right) - \left(\frac{1}{\gamma} x_\parallel'^{(1)} + vt\right) = \frac{\ell'}{\gamma} \leq \ell'$$

Längenkontraktion: bewegte Objekte erscheinen in Bewegungsrichtung verkürzt.

(i)+(ii) ⇝ das Volumen eines bewegten Objekts verringert sich um den Faktor $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}$

(iii) Betrachte jetzt Uhr, die in K' ruht und anzeigt, dass zwischen 2 Ereignissen, die beide am Ort $(x_\parallel', \vec{x}_\perp')$ stattfanden, die Zeit $\Delta t' = t'^{(2)} - t'^{(1)}$ vergangen ist. Der Beobachter in K findet:

$$\Delta t = t^{(2)} - t^{(1)} \overset{\nabla}{=} \gamma\left(t'^{(2)} + \frac{v}{c^2} x_\parallel'\right) - \gamma\left(t'^{(1)} + \frac{v}{c^2} x_\parallel'\right) = \gamma \Delta t'$$

Zeitdilatation: bewegte Uhren laufen langsamer.

Beachte: Lorentz-Trafos sind i.A. nicht-kommutativ (z.B. Drehungen um verschiedene Achsen, Boosts in verschiedene Richtungen, Drehung + Boost)

Ausnahme: Boosts in gleiche Richtung, dann gilt Additionsgesetz: $\beta_{1+2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$

Wir untersuchen jetzt die Transformation beliebiger Geschwindigkeiten: für IS K, K' mit $\vec{v}_{rel}(K', K) = \vec{v}$ gilt (s.o.):

$$\begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x}'_\perp \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \vec{\beta} & \hat{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x'_\parallel \end{pmatrix} \quad (*)$$

← 4x2 Matrix

Mit $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$, $\vec{u}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'}$ und $u_\parallel = \vec{u} \cdot \hat{\beta}$, $\vec{u}_\perp = \vec{u} - u_\parallel \hat{\beta}$

folgt: $t = \gamma \left(t' + \frac{\beta}{c} x'_\parallel \right)$ (1. Zeile von *)

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma \left(1 + \frac{\beta}{c} \frac{dx'_\parallel}{dt'} \right) \Leftrightarrow \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{1}{c^2} v u'_\parallel \right)}$$

$$\vec{x} = \vec{x}'_\perp + \gamma \left(ct' \vec{\beta} + x'_\parallel \hat{\beta} \right)$$

$$\vec u = \frac{d\vec x}{dt} = \frac{dt'}{dt}\left[\frac{d\vec x_\perp'}{dt'} + \gamma\left(\beta c + \frac{dx_\parallel'}{dt'}\right)\hat\beta\right]$$

$$\boxed{\vec u = \frac{\vec u_\perp' + \gamma(v+u_\parallel')\hat\beta}{\gamma\left(1+\frac{1}{c^2}v u_\parallel'\right)}}$$

Komponentenweise erhält man also:

$$\boxed{u_\parallel = \frac{u_\parallel'+v}{1+v u_\parallel'/c^2}; \qquad \vec u_\perp = \frac{\vec u_\perp'}{\gamma(1+v u_\parallel'/c^2)}} \qquad (\Diamond)$$

Nicht-kommutativ in $\vec u \leftrightarrow \vec v$!

Zur Berechnung des Transformationsverhaltens von Winkeln setze $u_\parallel = u\cos(\vartheta)$, $\vec u_\perp = u\sin(\vartheta)\hat u_\perp$

(analog für $\vec u'$)

$$\overset{\Diamond}{\rightsquigarrow} \quad u\cos(\vartheta) = \frac{u'\cos(\vartheta')+v}{1+v u'\cos(\vartheta')/c^2};$$

$$u\sin(\vartheta) = \frac{u'\sin(\vartheta')}{\gamma[1+v u'\cos(\vartheta')/c^2]}$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\tan(\vartheta) = \frac{u'\sin(\vartheta')}{\gamma[u'\cos(\vartheta')+v]}}$$

Für $u' \to c$ (ultrarelativistischer Grenzfall oder Photonen, d.h. Lichtstrahl) erhält man:

$$\tan(\vartheta) = \frac{\sin(\vartheta')}{\gamma[\cos(\vartheta')+\beta]}$$

Aberration

(~ Bradley, 1725)

// 18.7.11

5.5 4-Vektoren

Jede (4-komponentige) Größe $a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)$, die genau so wie der 4-Ortsvektor x^μ transformiert wird: $(a')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, a^\nu$ heisst **kontravarianter 4-Vektor**, jede Größe a_μ, die gemäß $(a')_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu a_\nu$; $\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma g^{\sigma\nu}$ transformiert wird, heisst **kovarianter 4-Vektor**.

Umwandlung mit metrischem Tensor: $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$; $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$.

Das **Skalarprodukt** (nicht positiv definit!) beliebiger 4-Vektoren ist ein **Lorentz-Skalar**, d.h. invariant unter Lorentz-Transformationen:

$$(a')_\mu \cdot (b')^\mu = g_{\mu\nu} (a')^\nu (b')^\mu = \Lambda^\mu{}_\sigma \, g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho \, b^\sigma a^\rho$$

$$= (\Lambda^T g \Lambda)_{\sigma\rho} \, b^\sigma a^\rho = g_{\sigma\rho} \, b^\sigma a^\rho = a_\sigma b^\sigma$$

(122) $$\Leftrightarrow \quad a' \cdot b' = a \cdot b$$

Dies gilt insbesondere für das Quadrat eines 4-Vektors: $(a')^2 \equiv (a')^\mu (a')_\mu = a^\mu a_\mu \equiv a^2$.

4-Vektoren mit $\left\{\begin{matrix} a^2 > 0 \\ a^2 = 0 \\ a^2 < 0 \end{matrix}\right\}$ heissen $\left\{\begin{matrix} \text{zeit-} \\ \text{licht-} \\ \text{raum} \end{matrix}\right\}$ artig.

Falls $\varphi(x)$ ein Skalar ist, dann ist der 4-Gradient

$$\partial_\mu \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \vec{\nabla}\varphi\right)$$

ein kovarianter 4-Vektor. Dies folgt aus der Form der Poincaré-Transformation:

$$(x')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \Leftrightarrow x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \left[(x')^\nu - a^\nu\right]$$

$$\rightsquigarrow \partial'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial (x')^\nu} \partial_\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \partial_\mu = \Lambda_\nu{}^\mu \partial_\mu$$

Analog ist $\partial^\mu \varphi \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi$ ein kontravarianter Vektor.

Das Skalarprodukt $\frac{\partial a^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu a^\mu = \partial^\mu a_\mu = \partial \cdot a$ wird als 4-Divergenz bezeichnet und ist als Lorentz-Skalar invariant unter Lorentz-Trafos.

Anwendungen, d.h. konkrete Beispiele von 4-Vektoren:

(i) Einem Teilchen, das sich in K mit der

3-Geschwindigkeit $\vec{u}(t)$ bewegt, ist die **4-Geschwindigkeit** $u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}$; $ds = c\,dt\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}$ (*) zugeordnet. Da ds Lorentz-invariant ist, wird u^μ als 4-Vektor transformiert. Dagegen ist $\frac{dx^\mu}{dt}$ **kein** 4-Vektor!

Beachte: da x^μ und s beide die Dimension einer Länge besitzen, ist u^μ nach Definition (*) dimensionslos (Landau-Lifschitz-Konvention). In der Literatur ist auch üblich: $\tilde{u}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$.

Explizite Form: $u^\mu = \frac{\frac{d}{dt}(ct,\vec{x})}{c\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \equiv \gamma_u(1,\vec{\beta})$

Das (Lorentz-invariante) Quadrat von u^μ hat den Wert 1: $u^2 = \gamma_u^2(1-\beta_u^2) = 1$

(ii) Die **4-Beschleunigung** $\frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}$ ist wieder 4-Vektor und steht senkrecht auf u^μ:

$$0 = \frac{d}{ds}u_\mu u^\mu = 2\,u_\mu \frac{du^\mu}{ds}$$

(iii) Wie in Theorie 2 genauer besprochen wird, lassen sich Ladungsdichte und Strom zur 4-Stromdichte $j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j})$ zusammenfassen ($\rightsquigarrow j^\mu = \rho_0 c u^\mu$ für homogen bewegte Ladungsdichte), die Kontinuitätsgleichung

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \partial_\mu j^\mu$$

ist dann offensichtlich Lorentz-invariant.

22.7.11