

- Organisation:
- (Vorstellung Dozenten/Assistenten-Team)
N. Blümer, F. Saueressig, E. Gorelik
 - Anmeldung zu Übungen
 - Ausgabe 1. Übungsblatt (TP1 + URN2)
 - Ausgabe Merkblatt
 - Vorstellung Web-Seite

Vorbemerkungen

Vorlesungsstil: (farbige) Kreide an Tafel, incl. Skizzen
selten auch Beamer

- + konkret, flexibel, richtiges Tempo
- umständlich, fehleranfällig, uncool

- Empfehlung:
- Mitschreiben
 - Fragen stellen! Korrigieren!
 - Nacharbeiten ggf. mit Skript

Wichtig: Übung macht den Meister!

① \leadsto Aufgaben **selbst** bearbeiten + vorrechnen!

Inhaltsüberblick

- 1 Einführung
- 2 Postulate und Gesetze der Klassischen Mechanik
- 3 Abgeschlossene mechanische Systeme
- 4 Teilsysteme
- 5 Spezielle Relativitätstheorie (Kinematik)

Latex-Skript: Prof. van Dongen (SS 2009)

1 Einführung

Frage: Was ist Klassische Mechanik?

- „Lehre von der Bewegung (makroskopischer) physikalischer Körper“
- Fundament der Theoretischen Physik

Wurzeln: Himmelsmechanik, Astronomie

- Wer/wo bin ich? Muster am Himmel
- Vorhersage von Sonnen- + Mondfinsternissen
- Kalender: Regenzeiten, Frost, Ernte, ...

25. Jh. v. Chr.: astronomische Beobachtungen in
China, Ägypten, Indien, Chaldäa

bis zu 3000 v. Chr.: Stonehenge

ca. 2000 v. Chr.: 365-Tages-Kalender (Ägypten)

2. Jh. v. Chr.: Hipparchos, Griechenland

ab 45 v. Chr. Julianischer Kalender (mit ^{Monaten +} Schalttagen)

Frage: angenommen, Sie waren jahrelang in Mainz
im dunklen Verlies eingekerkert. Wie stellen Sie
heute das Datum fest? (min. Schattenschwurf ca. 45°)

16. Jh. Tycho Brahe

1571-1630 Johannes Kepler Kepler-Fernrohr, -Ellipsen

1564-1642 Galileo Galilei Galilei-Transformationen

Theorien zum Aufbau des Weltalls

6. Jh. v. Chr. Pythagoras: Erde kugelförmig

5. Jh. v. Chr. Phylolaos: Rotation der Erde (Spin + Bahn)

4. Jh. v. Chr. Aristoteles: Erklärung Sonnen/Mondfinst.

3. Jh. v. Chr. Eratosthenes: Erddurchmesser

③

Theoretische Erklärung u.a. für beobachtete Planetenbahnen: *Newton's Gravitationsgesetz (1666)*

$$\underline{m_i} \ddot{\underline{x}_i} = \sum_{j \neq i} G \underline{m_i} \underline{m_j} \frac{\underline{x}_{ij}}{|\underline{x}_{ij}|^3} \quad (*)$$

m_i : Masse Teilchen i
 \underline{x}_i : Koordinaten „ „

$\underline{x}_{ij} = \underline{x}_j - \underline{x}_i$ Relativvektor, G : Gravitationskonstante

Einfaches Gesetz: Differentialgleichung für $\{\underline{x}_i\}$,

aber:

- nichttriviale Konsequenzen
- exakte Lösung schwierig / unmöglich

Konsequenzen für Sonnensystem? Stabil?

Euler, Clairaut, d'Alembert, Lagrange, Laplace,
Legendre, Gauß, Bessel, Poisson, Poincaré, ...

20. Jh.: Theorie dynamischer Systeme,
Chaos Theorie (\rightarrow innere Bahnen chaotisch)

Numerik: Molekulardynamik-Simulation

Beachte: die Masse tritt in $*$ in 2 unterschiedlichen Rollen auf:

- träge Masse (links)

⑤

- schwere Masse (rechts)

Deren Gleichheit (Proportionalität) für beliebige Körper ist in der Newtonschen Mechanik nicht erklärbar \rightarrow Allgemeine Relativitätstheorie

Weitere Kräfte: • elektromagnetische ^{Wechselwirkung} WW

- schwache Kraft (β -Zerfall)

- starke Kraft (Atomkerne)

18.4.11

Einfachste Form der elm. WW: Coulomb-Gesetz (1785)

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{j \neq i} - \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{x}_{ji}}{|\vec{x}_{ji}|^3} \quad (\Delta)$$

q_i : Ladung Teilchen i (positiv oder negativ)

$\epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$ Dielektrizitätskonstante (Vakuum)

Analog zu Gravitationsgesetz (aber nur träge Masse).

Achtung: Δ und $*$ implizieren eine instantane Fernwirkung (\Downarrow zu „Tempolimit Lichtgeschwindigkeit“) \rightarrow gelten höchstens für $|\vec{v}_i| \ll c$.

⑥

Erweiterungen der klassischen Mechanik:

- große Geschwindigkeiten \rightarrow spezielle Relativitätstheorie
- kleine Teilchen, tiefe Temperaturen
 \rightarrow Quantenmechanik
- große Teilchenzahlen \rightarrow Statistische Physik

Objekte unserer Betrachtungen:

- punktförmige klassische Teilchen: Ort \vec{x}_i
- Masse m_i , Ladung q_i
- Gravitations + Coulomb-Gesetz
- Lorentz-Kraft

Verallgemeinerung: Starrer Körper

Kap. 2: Postulate und Gesetze der klassischen Mechanik

2.1 Der Massenpunkt als Baustein der Mechanik

Zur Vereinfachung des Formalismus verwenden wir in der Regel die Abstraktion des **Massenpunktes**, d.h. wir betrachten massebehaftete Körper, deren Abmessungen im Verhältnis zu allen anderen Längenskalen vernachlässigbar sind.

z.B. können die Planeten und Monde im Sonnensystem für viele Zwecke ausreichend genau als Massenpunkte betrachtet werden.

Dies gilt jedoch z.B. **nicht** für Billiardkugeln, bei deren Stößen die Eigenrotation die Bahnen wesentlich beeinflussen kann.

Im Allgemeinen lassen sich Körper zu Systemen miteinander wechselwirkender (oder approximativ: starr verbundener) Massenpunkte diskretisieren.

Für alle diese Fälle werden wir in **Abschnitt 2.6** die **Newtonsche Bewegungsgleichung** formulieren:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

wobei \vec{F}_i die **Kraft** auf das i -te Teilchen und $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{x}}_i$ dessen **Impuls** ist.

2.2 Raum und Zeit

In der nichtrelativistischen Mechanik betrachten wir die Physik durch die Augen eines Beobachters, der über einen Zollstock und eine Uhr verfügt, um ggf. Längen- und Zeitmessungen durchzuführen.

(i) **Zeit**: 1-dimensionale Größe

Zeitdifferenz $\Delta t = t_2 - t_1$ für Zeitpunkte t_1, t_2

falls $\begin{cases} \Delta t > 0 : t_2 \text{ in Zukunft von } t_1 \\ \Delta t < 0 : \text{ " " Vergangenheit " "} \end{cases}$

⑨

(ii) Ortsraum: euklidischer Vektorraum mit kartesischem Koordinatensystem $(\vec{x} = (x_1, x_2, x_3))$ und

$$\text{Abstand } |\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}$$

Oftensichtlich gilt: $|\vec{x} - \vec{x}'| \geq 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{x}'$

Im Rahmen der Relativitätstheorie (Kapitel 5) werden beide Größen zur 4-dimensionalen Raumzeit vereint.

Einige weitere Begriffe: aus der physikalischen Bahn $\vec{x}(t)$ eines Teilchens folgt seine Geschwindigkeit als

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t};$$

die Beschleunigung und der Impuls sind als

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}(t) \quad \text{bzw.} \quad \vec{p}(t) = m \dot{\vec{x}}(t)$$

definiert.

(Skript: Vektorraum-Axiome der Linearen Algebra)

Postulat der Newtonschen Mechanik: folgende Größen sind absolut, d.h. beobachterunabhängig:

(i) die Länge Δt des Zeitintervalls zwischen 2 beliebigen Ereignissen

(ii) der räumliche Abstand $|\vec{x} - \vec{x}'|$ von 2 **gleichzeitigen** Ereignissen

Teil (i) des Postulats bedeutet anschaulich, dass die Uhren aller Beobachter gleich schnell laufen, auch wenn sie möglicherweise zu unterschiedlichen Zeitpunkten gestartet wurden: $t' = t + \tau$

⇒ absolute Gleichzeitigkeit: falls Beobachter B die Ereignisse $\{E_\alpha\}$ gleichzeitig zur Zeit t sieht, gibt es eine Zeit t' zu der Beobachter B' die äquivalenten Ereignisse $\{E'_\beta\}$ sehen kann.

Beispiele für Ereignisse: • Supernova im Sternbild Stier

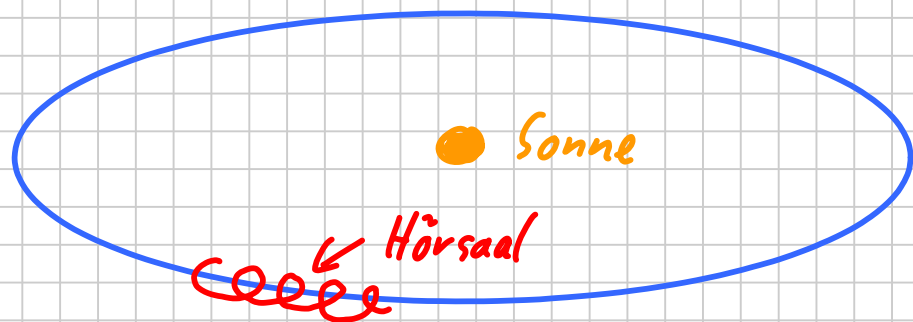
① • Tod von König Ludwig 14. • Klausur TP I

Aus (i) folgt auch, dass die Bedingung von (ii) (gleichzeitige Ereignisse) wohldefiniert ist.

Achtung: der räumliche Abstand von nicht-gleichzeitigen Ereignissen ist beobachterabhängig

Bsp: letzte Vorlesung am gleichen Ort?

- ja: gleicher Hörsaal
- nein: andere Position der Erdbahn



2.3 Abgeschlossene mechanische Systeme und Teilsysteme

Generelle Einteilung:

(i) abgeschlossene Systeme: keine Ankopplung nach außen (keine Referenzpunkte) \rightarrow universelle physikalische Gesetze (beobachterunabhängig)

(ii) **Teilsysteme**: äußere Felder (z.B. Schwerkraft, elektrisch und/oder magnetisch), müssen bei zwischen Koordinatensystemen **mittransformiert** werden (in der Regel höchst nichttrivial)

Beachte: (i) ist stets eine approximative Abstraktion

Beispiele: \square Das Sonnensystem ist in guter Näherung abgeschlossen; Newtons Gravitationsgesetz ist beobachter unabhängig:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j \vec{x}_{ji}}{|\vec{x}_{ji}|^3} \quad (*) \text{ im KS } K$$

Zu zeigen: im KS K' hat das Gesetz die gleiche Form, d.h. ist **forminvariant** \equiv kovariant.

(i) Translation: $\vec{x}'_i(t) = \vec{x}_i(t) - \vec{\xi} \quad \forall t$

$$\Rightarrow \vec{x}'_{ji} \equiv \vec{x}'_j - \vec{x}'_i = (\vec{x}_j - \vec{\xi}) - (\vec{x}_i - \vec{\xi}) = \vec{x}_j - \vec{x}_i \equiv \vec{x}_{ji}$$

$$\dot{\vec{x}}'_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}'_i(t+\Delta t) - \vec{x}'_i(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}_i(t+\Delta t) - \vec{x}_i(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{x}}_i(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{x}}'_i(t) = \ddot{\vec{x}}_i(t)$$

$$\Rightarrow \underline{m_i \ddot{x}_i'} = m_i \ddot{x}_i = \sum_{j \neq i} \frac{G_{m_i m_j} \vec{x}_{ji}}{|\vec{x}_{ji}|^3} = \sum_{j \neq i} \frac{G_{m_i m_j} \vec{x}_{ji}'}{|\vec{x}_{ji}'|^3}$$

In diesem Fall sind sogar beide Seiten invariant.

Analog: Geschwindigkeitstransformation. Einheitsvektoren
 \downarrow

(ii) Drehung: $K \rightarrow K'$ definiert durch $\hat{e}_\alpha' = R \hat{e}_\alpha$
 für $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ mit orthogonaler Matrix R (siehe 2.5)

\rightarrow Transformationsregel für Koordinaten

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \sum_\alpha x_\alpha \hat{e}_\alpha \stackrel{!}{=} \sum_\beta x'_\beta \hat{e}'_\beta = \sum_\beta x'_\beta R \hat{e}_\beta \\ &= \sum_\beta \sum_\alpha x'_\beta \hat{e}_\alpha \underbrace{\hat{e}_\alpha^T R \hat{e}_\beta}_{R_{\alpha\beta}} \quad \mathbb{1} = \sum_\alpha \hat{e}_\alpha \hat{e}_\alpha^T \\ &= \sum_\alpha \left(\sum_\beta R_{\alpha\beta} x'_\beta \right) \hat{e}_\alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_\alpha = \sum_\beta R_{\alpha\beta} x'_\beta \Leftrightarrow \vec{x} = R \vec{x}' \Leftrightarrow \boxed{\vec{x}' = R^{-1} \vec{x}}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}' = R^{-1} \dot{\vec{x}}; \quad \ddot{\vec{x}}' = R^{-1} \ddot{\vec{x}} \text{ etc. (da } R \text{ zeitunabh.)}$$

$$\Rightarrow \underline{m_i \ddot{x}_i'} = R^{-1} m_i \ddot{x}_i = R^{-1} \sum_{j \neq i} \frac{G_{m_i m_j} \vec{x}_{ji}}{|\vec{x}_{ji}|^3} = \sum_{j \neq i} \frac{G_{m_i m_j} \vec{x}_{ji}'}{|\vec{x}_{ji}'|^3}$$

Damit haben wir die Forminvarianz von $(*)$

⑭ bewiesen.

② Alternativ kann man Teilchen 1 auch als Teilsystem im Schwerkraftfeld der übrigen $N-1$ Teilchen betrachten:

$$m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = m_1 \vec{g}(\vec{x}_1, t); \quad \vec{g} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{G m_j \vec{x}_{j1}}{|\vec{x}_{j1}|^3}$$

Für $N \gg 1$ kann der Kontinuums-Limes sinnvoll

sein:
$$g(\vec{x}_1, t) = G \int d\vec{x}' \rho(\vec{x}', t) \frac{\vec{x}' - \vec{x}_1}{|\vec{x}' - \vec{x}_1|^3},$$

wobei wir die Massendichte $\rho(\vec{x}, t)$ eingeführt haben.

Bsp: Teilchen im Schwerkraftfeld der Erde

Vereinfachung: • Ursprung des KS in Erdmittelpunkt

• Annahme sphärischer Gestalt

$$\Rightarrow \rho(\vec{x}, t) = \rho(|\vec{x}|)$$

$$g(\vec{x}_1) = G \int d\vec{x}' \rho(|\vec{x}'|) \frac{\vec{x}' - \vec{x}_1}{|\vec{x}' - \vec{x}_1|^3} = -G M_E \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|^3} \quad (\Delta)$$

Die letzte Gleichung gilt nur für $|\vec{x}_1| > R_E$ (für Erdradius R_E und Erdmasse M_E): das Schwerfeld einer Kugel gleicht (außerhalb) dem einer Punktmasse.

⑮ Offensichtlich ist (Δ) nicht translationsinvariant.

Nah dem Punkt $\vec{x} = R_E \hat{e}$ an der Erdoberfläche können wir weiter vereinfachen:

$$g(\vec{x}_i) = - \frac{Q M_E}{|\vec{x}_i|^2} \frac{\vec{x}_i}{|\vec{x}_i|} \approx - \frac{Q M_E}{R_E^2} \hat{e} = -g \hat{e}$$

(Fallbeschleunigung $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$)

Mit der Definition $\vec{x}_i \cdot \hat{e} = R_E + z$ findet man die Bewegungsgleichung $m_i \ddot{z} = -m_i g$

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = 0$$

In diesem Fall gilt Translationsinvarianz nur in x - und y -Richtung; z.B. ist die Inversionsymmetrie $\vec{x}_i \rightarrow -\vec{x}_i$ gebrochen.

Das Coulomb-Gesetz kann ganz analog behandelt werden, wobei für das Teilsystem ein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{x}_i, t)$ sowie ggf. die Ladungsdichte $\rho(\vec{x}_i, t)$ auftreten.

Als relativistischer Effekt kommen bei bewegten Ladungen jedoch Magnetfelder \vec{B}_i hinzu sowie die

⑩ Lorentz-Kraft $\vec{F}_{Lor}(\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i, t) = q (\vec{E}(\vec{x}_i, t) + \dot{\vec{x}}_i \times \vec{B}(\vec{x}_i, t)).$

2.4 Galileos Relativitätsprinzip

Wir betrachten nun abgeschlossene Systeme. Für diese sind gewisse Koordinatensysteme durch das **Relativitätsprinzip** ausgezeichnet und werden als **Inertialsysteme** bezeichnet:

- (R1) Alle physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen (IS) zu allen Zeiten gleich.
- (R2) Alle KS, die sich relativ zu einem IS in geradlinig gleichförmiger Bewegung befinden, sind selbst IS.

Die Existenz von IS ist wieder ein Postulat, das die Beobachterunabhängigkeit von Gesetzen ausdrückt. Aus R2 folgt, dass es überabzählbar unendlich viele IS gibt.

Beachte: Ein KS, das relativ zu einem IS beschleunigt wird (z.B. rotierende Erde), ist

selbst kein IS (kann aber manchmal als IS approximiert werden).

2.5 Galilei-Transformationen

Wir wollen jetzt alle Transformationen aufzählen und parametrisieren, die mit R1 und R2 verträglich sind, also IS in IS überführen.

Newton'sche Mechanik

R1 \leadsto Raum-Zeit-Struktur bleibt invariant:

(i) Länge Δt von Zeitintervallen

(ii) r. Abstand von gleichzeitigen Ereignissen

d.h. für Trafo $K \rightarrow K'$: $(\vec{x}, t) \mapsto (\vec{x}', t')$ und

beliebige Ereignisse $(\vec{x}_1, t_1), (\vec{x}_2, t_2)$ gilt:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = t_2 - t_1 = \Delta t \quad (*)$$

sowie für gleichzeitige Ereignisse $(\vec{x}_1, t), (\vec{x}_2, t)$:

$$|\vec{x}_2' - \vec{x}_1'| = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1| \quad (\Delta)$$

2.5.1 Zeittranslationen

$$(*) \Rightarrow \frac{dt'}{dt}(t, |) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{t'(t, +\Delta t) - t'(t, |)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\textcircled{17} \Rightarrow t' = t - \tau$$

2.5.2 Transformationen der Ortskoordinaten

Wir betrachten zunächst die Einschränkungen, die sich aus Δ in 2.4 ergeben und danach erst die aus R^2 .

Eine Trafo $K \rightarrow K'$ mit $\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}'(t)$ erfüllt Δ , falls

(i) alle Abstandsvektoren invariant bleiben
oder (ii) die Skalarprodukte zwischen allen Paaren von Vektoren gleich bleiben

$$\text{(da } |\vec{x}'_2 - \vec{x}'_1|^2 = \vec{x}'_2 \cdot \vec{x}'_2 + \vec{x}'_1 \cdot \vec{x}'_1 - 2\vec{x}'_1 \cdot \vec{x}'_2 \text{)}$$

(i) wird erfüllt (nur) von globalen Translationen:

$$\vec{x}'(t) = \vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t) \quad \forall \vec{x}$$

(ii) wird erfüllt nur von Drehungen und

Spiegelungen: $\vec{x}'(t) = \sigma(t) R^{-1}(t) \vec{x}(t)$ ($\sigma \in \{1, -1\}$)
(zeit-

Insgesamt erlaubt die lokale Metrikforderung Δ also Drehungen, Spiegelungen und Translationen, die für jeden Zeitpunkt beliebig gewählt

werden könnten.

Sinnvoll sind allerdings nur Trafos, die glatte Teilchenbahnen in glatte Bahnen in K' überführen, also stetig + differenzierbar sind

$\leadsto \sigma$ zeitunabhängig

$\vec{\varphi}(t), R(t)$ differenzierbar

R2 fordert außerdem, dass die Relativbewegung unbeschleunigt ist

$\leadsto R$ zeitunabhängig

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi} + \vec{v}t$$

2.5.3 Implikationen der Translationsinvarianz

Die Translationsinvarianzen der physikalischen Gesetze implizieren eine **Homogenität** der Zeit und des Raums

2.5.4 Parametrisierung von Drehungen

Die Galilei-Invarianz unter Drehungen ist mit

(20) der **Isotropie** des Ortsraums assoziiert.

Exkurs zu Drehungen

Eine **Drehung** $R(\vec{\alpha})$ ist eine lineare homogene orthogonale Transformation mit Determinante 1:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = R(\vec{\alpha})\vec{x}, \quad R^T R = R R^T = \mathbb{1}, \quad \det(R) = +1$$

Sie wird durch einen **Drehwinkel** $\alpha = |\vec{\alpha}|$ und eine **Drehrichtung** $\hat{\alpha} = \frac{\vec{\alpha}}{\alpha}$ definiert.

Dabei gilt: $R(\vec{\alpha})\vec{x} = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \parallel \vec{\alpha}$ (d.h. $\vec{x} \cdot \vec{\alpha} = \pm |\vec{x}| \alpha$)

$$R(s\hat{\alpha}) = \mathbb{1} \quad (\Leftrightarrow) \quad s = n(2\pi); \quad n \in \mathbb{N}$$

Da die Drehrichtung $\hat{\alpha}$ durch 2 Winkel festgelegt

werden kann: $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$ (*)

ist $\vec{\alpha} = \alpha \hat{\alpha}$ mit $-\pi < \alpha \leq \pi$ also insgesamt durch

3 Winkel $(\alpha, \vartheta, \varphi)$ bestimmt.

Die Drehungen bilden eine **Gruppe**, da

(i) das Produkt zweier Drehungen wieder eine

(2)

Drehung ist: $(R_1, R_2)^T R_1, R_2 = R_2^T \underbrace{R_1^T R_1}_{\mathbb{1}} R_2 = \mathbb{1}$

$$\det(R_1, R_2) = \det(R_1) \det(R_2) = 1$$

(ii) die Matrixmultiplikation assoziativ ist

(iii) auch die Identität $\mathbb{1}$ eine Drehung ist

(iv) auch die Inverse $R^{-1}(\vec{\alpha}) = R^T(\vec{\alpha}) = R(-\vec{\alpha})$ eine Drehung ist.

Achtung: die Hintereinanderausführung von Drehungen bzw. die Multiplikation der entsprechenden Matrizen ist nicht kommutativ:

$$R(\vec{\alpha}_1) R(\vec{\alpha}_2) \stackrel{i. A.}{\neq} R(\vec{\alpha}_2) R(\vec{\alpha}_1)$$

Bsp: $R(\frac{\pi}{2} \hat{e}_1) R(\frac{\pi}{2} \hat{e}_3) \hat{e}_1 = \hat{e}_3 \neq \hat{e}_2 = R(\frac{\pi}{2} \hat{e}_3) R(\frac{\pi}{2} \hat{e}_1) \hat{e}_1$

Explizite Matrixdarstellung für Drehung um \hat{e}_3 -Achse:

$$R(\alpha \hat{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrixdarstellung für den allgemeinen Fall

folgt aus der Zerlegung $\vec{x} = \underbrace{\hat{\alpha} (\hat{\alpha} \cdot \vec{x})}_{\vec{x}_{\parallel}} - \underbrace{\vec{\alpha} + (\hat{\alpha} \times \vec{x})}_{\vec{x}_{\perp}}$

via $R(\vec{\alpha})\vec{x} = \hat{\alpha}(\vec{\alpha} \cdot \vec{x}) - \vec{\alpha} + (\vec{\alpha} \times \vec{x}) \cos(\alpha) + (\hat{\alpha} \times \vec{x}) \sin(\alpha)$
 durch Einsetzen von *.

2.5.6 Allgemeine Galilei-Transformationen

Die allgemeine Galilei-Transformation zwischen 2 IS hat die Form: $\vec{x}'(\vec{x}, t) = \sigma R^{-1}(\vec{\alpha})\vec{x} - \vec{v}t - \vec{\xi}, \quad t'(t) = t - \tau$
 (Nachweis der Vollständigkeit: siehe oben) (Δ)

2.5.7 Die Galilei-Gruppe

Die Transformationen Δ bilden eine Gruppe mit den 10 kontinuierlichen Parametern $(\tau, \vec{\xi}, \vec{v}, \vec{\alpha})$ sowie dem binären Parameter $\sigma = \pm$

Beweis: Führt man die beiden Galilei-Transfos

$$\mathcal{G}_1(\vec{x}, t) \equiv (G_1(\vec{x}, t), t - \tau_1) \equiv (\sigma_1 R_1^{-1} \vec{x} - \vec{v}_1 t - \vec{\xi}_1, t - \tau_1)$$

$$\mathcal{G}_2(\vec{x}, t) \equiv (G_2(\vec{x}, t), t - \tau_2) \equiv (\sigma_2 R_2^{-1} \vec{x} - \vec{v}_2 t - \vec{\xi}_2, t - \tau_2)$$

hintereinander aus, so erhält man wieder eine G-T:

$$(\vec{x}', t') = (\mathcal{G}_2 \circ \mathcal{G}_1)(\vec{x}, t) = (G_2(G_1(\vec{x}, t), t - \tau_1), t - (\tau_1 + \tau_2))$$

mit $t' = t - (\tau_1 + \tau_2)$ und

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \sigma_2 R_2^{-1} (\sigma_1 R_1^{-1} \vec{x} - \vec{v}_1 t - \vec{\xi}_1) - \vec{v}_2 (t - \tau_1) - \vec{\xi}_2 \\ &= \underbrace{(\sigma_1 \sigma_2)}_{\sigma_{\text{ges}}} \underbrace{(R_1 R_2)^{-1}}_{R_{\text{ges}}} \vec{x} - \underbrace{(\vec{v}_2 + \sigma_2 R_2^{-1} \vec{v}_1)}_{\vec{v}_{\text{ges}}} t - \underbrace{(\vec{\xi}_2 + \sigma_2 R_2^{-1} \vec{\xi}_1 - \vec{v}_2 \tau_1)}_{\vec{\xi}_{\text{ges}}} \end{aligned}$$

Außerdem sind die G-Ts assoziativ und gibt es eine Identität $(\tau, \vec{\xi}, \vec{\alpha}, \vec{v}, \sigma) = (0, \vec{0}, \vec{0}, \vec{0}, 1)$ sowie zu jeder Trafo $(\tau, \vec{\xi}, \vec{\alpha}, \vec{v}, \sigma)$ die Inverse

$$(-\tau, -\sigma R(\vec{\alpha})(\vec{\xi} + \vec{v}\tau), -\vec{\alpha}, -\sigma R(\vec{\alpha})\vec{v}, \sigma)$$

Die Asymmetrie in den Abhängigkeiten $\vec{x}' = \vec{x}'(\vec{x}, t)$
 $t' = t'(t)$ wird in der speziellen Relativitätstheorie aufgehoben (dort: $t' = t'(\vec{x}, t)$).

2.6 Das deterministische Prinzip der klassischen Mechanik

Bisher haben wir uns hauptsächlich mit der **Kinematik** beschäftigt (z.B. Bahnkurve in $K \rightarrow$ Bahnkurve in K' , Geschwindigkeitsrafo etc.), die auf Galilei zurück geht.

„Wie?“

Newton begründete die Dynamik, d.h. er formulierte wichtige Kraftgesetze und löste die entsprechenden Bewegungsgleichungen. „Warum!“

Newton's deterministisches Prinzip: die physikalische Bahn $\vec{X}(t)$ eines Systems von Teilchen ist für alle Zeiten $t > 0$ (und $t < 0$) vollständig festgelegt, wenn die Anfangswerte $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$ der Positionen und $\dot{\vec{X}}(0) = \dot{\vec{X}}_0$ der Geschwindigkeiten bekannt bzw. vorgegeben sind.

Daher ist die Klassische Mechanik eine rein deterministische Theorie.

Das det. Prinzip konkretisiert sich im

2. Newtonschen Gesetz $\dot{\vec{p}} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t); \vec{p} = m \dot{\vec{x}}$

für 1 einzelnes Teilchen bzw. für N Teilchen:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t); \vec{p}_i = m_i \dot{\vec{x}}_i \quad (\square)$$

mit $\vec{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N); \dot{\vec{X}} = (\dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, \dots, \dot{\vec{x}}_N)$

Natürlich gelten diese allgemeinen Gesetze nur in IS; ansonsten treten i.A. Scheinkräfte auf.

Wir überprüfen nun, dass aus \square das det.

Prinzip folgt; der Einfachheit halber für

1 Teilchen: $m \ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t); \vec{x}(0) = \vec{x}_0; \dot{\vec{x}}(0) = \dot{\vec{x}}_0$

Integration liefert:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{x}}_0 + \frac{1}{m} \int_0^t dt' \vec{F}(\vec{x}(t'), \dot{\vec{x}}(t'), t')$$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \dot{\vec{x}}_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \vec{F}(\vec{x}(t''), \dot{\vec{x}}(t''), t'')$$

Dies ist die integrale Form der Newtonschen Bewegungsgleichung. Sie kann iterativ gelöst werden: Mit $\vec{F}_0 \equiv \vec{F}(\vec{x}_0, \dot{\vec{x}}_0, 0)$ gilt

$$\text{für } t \rightarrow 0: \dot{\vec{x}}(t) \sim \dot{\vec{x}}_0 + \frac{1}{m} \int_0^t dt' \vec{F}_0 = \dot{\vec{x}}_0 + \frac{t}{m} \vec{F}_0$$

$$\vec{x}(t) \sim \vec{x}_0 + \dot{\vec{x}}_0 t + \frac{t^2}{2m} \vec{F}_0$$

Die nächste Ordnung erhalten wir mit

$$\vec{F}_1 \equiv \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0, \dot{\vec{x}}_0, 0) \vec{x}_0 + \frac{1}{m} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{\vec{x}}}(\vec{x}_0, \dot{\vec{x}}_0, 0) \vec{F}_0 + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}(\vec{x}_0, \dot{\vec{x}}_0, 0)$$

$$\dot{\vec{x}}(t) \sim \dot{\vec{x}}_0 + \frac{t}{m} \vec{F}_0 + \frac{t^2}{2m} \vec{F}_1 + \dots$$

$$\vec{x}(t) \sim \vec{x}_0 + \dot{\vec{x}}_0 t + \frac{t^2}{2m} \vec{F}_0 + \frac{t^3}{6m} \vec{F}_1 + \dots$$

Diese Entwicklung lässt sich zu beliebiger Ordnung treiben; stets treten als Parameter nur \vec{x}_0 und $\dot{\vec{x}}_0$ auf. Für Systeme mit N Teilchen folgt das det. Prinzip ganz analog.

Umgekehrt ist klar, dass das det. Prinzip eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung in den Bahnkoordinaten $\vec{x}(t)$ impliziert, d.h. im Wesentlichen die Form des 2. Newtonschen Gesetzes.

2.7 Konsequenzen der Galilei-Invarianz für die Bewegungsgleichung

Jetzt soll untersucht werden, welche Einschränkungen sich aus der Galilei-Invarianz für die funktionale Abhängigkeit der Kräfte \vec{F}_i

ergeben. Dabei betrachten wir zunächst ein einzelnes Teilchen mit physikalischer Bahn $\vec{x}_\phi(t)$, die eine Lösung der Bewegungsgleichung für spezielle Anfangsbedingungen darstellt.

$$\leadsto \text{Impuls } \vec{p}_\phi(t) = m \dot{\vec{x}}_\phi(t)$$

(i) Zeittranslationen $\vec{x}'(\vec{x}, t) = \vec{x}; t' = t - \tau$

Falls $\vec{x}_\phi(t)$ Lösung in K ist, stellt

$$\vec{x}'_i(t') = \vec{x}'(\vec{x}_\phi(t), t) = \vec{x}_\phi(t) = \vec{x}_\phi(t' + \tau)$$

$$\text{mit } \dot{\vec{x}}'_i(t') \equiv \frac{d}{dt'} \vec{x}'_i(t') = \frac{d\vec{x}_\phi(t)}{dt} = \dot{\vec{x}}_\phi(t' + \tau)$$

$$\vec{p}'_i(t') = m \dot{\vec{x}}'_i(t') = m \dot{\vec{x}}_\phi(t' + \tau) = \vec{p}_\phi(t' + \tau)$$

Forminvarianz der Bewegungsgleichungen bedeutet:

$$\vec{F}(\vec{x}_\phi(t), \dot{\vec{x}}_\phi(t), \underline{t-\tau}) = \frac{d\vec{p}'_i(t')}{dt'} \stackrel{!}{=} \frac{d\vec{p}_\phi(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{x}_\phi(t), \dot{\vec{x}}_\phi(t), \underline{t})$$

Dies kann nur dann für alle τ gelten, falls die Kraft keine explizite Zeitabhängigkeit hat:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$$

(28) $\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \neq \vec{0} \leadsto \text{Zeit nicht homogen und/oder isotrop} \right)$

(ii) Translationen im Ortsraum: $\vec{x}'(\vec{x}, t) = \vec{x} - \vec{\xi}; t' = t$

$\vec{x}_\phi(t)$ Lösung in $K \rightsquigarrow$

$$\vec{x}'_\phi(t') = \vec{x}'(\vec{x}_\phi(t), t) = \vec{x}_\phi(t) - \vec{\xi} = \vec{x}_\phi(t') - \vec{\xi}$$

ist Lösung in K' . Forminvarianz impliziert:

$$\vec{F}(\vec{x}_\phi(t) - \vec{\xi}, \dot{\vec{x}}_\phi(t)) = \frac{d\vec{p}'_\phi}{dt'}(t') = \frac{d\vec{p}_\phi}{dt}(t) = \vec{F}(\vec{x}_\phi(t), \dot{\vec{x}}_\phi(t))$$

Dies kann nur für alle $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^3$ gelten, falls \vec{F} orts-unabhängig ist: $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} = 0; \vec{F} = \vec{F}(\dot{\vec{x}})$

(iii) Geschwindigkeits Transformationen:

$$\vec{x}'(\vec{x}, t) = \vec{x} - \vec{v}t; t' = t$$

$$\rightsquigarrow \vec{F}(\vec{x}_\phi(t) - \vec{v}t) = \dots = \vec{F}(\dot{\vec{x}}_\phi(t))$$

$$\stackrel{\text{FI}}{\rightsquigarrow} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} = 0 \rightsquigarrow \vec{F} \text{ muss konstant sein.}$$

(iv) Inversion: $\vec{x}'(\vec{x}, t) = -\vec{x}; t' = t$

$$\rightsquigarrow \vec{x}'_\phi(t') = -\vec{x}_\phi(t) = -\vec{x}_\phi(t')$$

$$\stackrel{\text{FI}}{\rightsquigarrow} \vec{F} = \frac{d\vec{p}'_\phi}{dt'}(t') = -\frac{d\vec{p}_\phi}{dt}(t) = -\vec{F}$$

$$\textcircled{29} \rightsquigarrow \vec{F} = 0$$

Für ein abgeschlossenes System folgt also aus der Galilei-Invarianz, dass sich ein einzelnes Teilchen kräftefrei und daher geradlinig-gleichförmig bewegt (2. Newtonsches Gesetz).

Jetzt: Systeme mit mehreren Teilchen

(i) Zeittranslationen $\leadsto \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = \vec{0}$

$$\leadsto \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i(\{\vec{x}_j\}, \{\dot{\vec{x}}_j\}) \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

(ii) Translationen im Ortsraum

$$\leadsto \vec{F}_i(\{\vec{x}_j - \vec{Q}\}, \{\dot{\vec{x}}_j\}) = \vec{F}_i(\{\vec{x}_j\}, \{\dot{\vec{x}}_j\}) \quad \forall \vec{Q} \in \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i(\{\vec{x}_{ji}\}, \{\dot{\vec{x}}_j\})$$

(iii) Geschwindigkeitsrafo

$$\leadsto \vec{F}_i(\{\vec{x}_{ji}\}, \{\dot{\vec{x}}_j - \vec{v}\}) = \vec{F}_i(\{\vec{x}_{ji}\}, \{\dot{\vec{x}}_j\}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i(\{\vec{x}_{ji}\}, \{\dot{\vec{x}}_j\})$$

Die Kräfte können also nur von Relativkoordinaten und -Geschwindigkeiten abhängen.

(iv) Drehungen und Inversion: $\vec{x}'(\vec{x}, t) = \sigma R^{-1} \vec{x}$

$$\leadsto \vec{x}'_{\phi_i}(t) = \sigma R^{-1} \vec{x}_{\phi_i}(t); \quad \dot{\vec{x}}'_{\phi_i}(t) = \sigma R^{-1} \dot{\vec{x}}_{\phi_i}(t)$$

$$\begin{aligned} \leadsto \vec{F}(\{\sigma R^{-1} \vec{x}_{ji}\}, \{\sigma R^{-1} \dot{\vec{x}}_{ji}\}) &= \frac{d\vec{p}'_i}{dt} = \sigma R^{-1} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ &= \sigma R^{-1} \vec{F}_i(\{\vec{x}_{ji}\}, \{\dot{\vec{x}}_{ji}\}) \end{aligned}$$

oder kurz: $\vec{F}'_i = \sigma R^{-1} \vec{F}_i$

Kräfte werden unter Drehungen und Inversionen also wie Ortsvektoren und Impulse transformiert: es handelt sich um **echte Vektoren** (diese Tatsache heisst auch **4. Newtonsches Gesetz**).

3. Newtonsches Gesetz: die Kräfte, die 2 Teilchen aufeinander ausüben, sind entgegengesetzt gleich („**actio = -reactio**“) und wirken entlang ihrer Verbindungslinie:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = f(|\vec{x}_{21}|) \vec{x}_{21}; \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = f(|\vec{x}_{12}|) \vec{x}_{12}, \quad \frac{d}{dt} |\vec{p}_1 + \vec{p}_2| = \vec{0}$$

Achtung: Dieses „Gesetz“ gilt für die Gravitations- und Coulomb-Kraft, jedoch i.A. nicht für

(31) geschwindigkeitsabhängige (z.B. elm.) Kräfte!

2.8 Beispiele

Wir wollen jetzt allgemeine Aussagen über die mögliche Dynamik aus Symmetrien ableiten.

1) 2 Teilchen, in Ruhe in einem IS bei $t=0$:

$$m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = \vec{F}_1(\vec{x}_{12}, \dot{\vec{x}}_{12}); \quad m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = \vec{F}_2(\vec{x}_{12}, \dot{\vec{x}}_{12}); \quad \dot{\vec{x}}_1(0) = \dot{\vec{x}}_2(0) = \vec{0}$$

The diagram shows a horizontal blue line representing a 1D coordinate system. On the left side, there is a green 'x' with $\vec{x}_1(0)$ written above it. On the right side, there is a red 'x' with $\vec{x}_2(0)$ written above it. Below the line, between the two 'x' marks, is the expression $\vec{x}_1(0) + \lambda \vec{x}_2(0)$.

Anfangswerte sind invariant unter Drehungen um die Achse $\vec{x}_2(0) + \lambda \vec{x}_1(0) = \vec{x}_1(0) + \lambda' \vec{x}_2(0)$ sowie unter Spiegelungen an allen Ebenen hierdurch.

(z.B. Achse in \hat{e}_1 -Richtung \rightarrow Inv. unter $\hat{e}_2 \leftrightarrow -\hat{e}_2, \hat{e}_3 \leftrightarrow -\hat{e}_3$)

Diese Symmetrie kann durch die Lösung nicht gebrochen werden $\rightarrow \vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$ bleiben auf Verbindungslinie.

2) 2 Teilchen mit beliebigen Anfangsbedingungen:

Man kann zeigen, dass es ein IS gibt, in dem die Bewegung in einer Ebene abläuft, nämlich das **Schwerpunktsystem** $K^{(s)}$: wir führen ggf. eine Galilei-Trafo mit $\vec{\xi}$, \vec{v} durch, so dass gilt:

$$\frac{m_1 \vec{x}_1(0) + m_2 \vec{x}_2(0)}{m_1 + m_2} = \vec{0}; \quad \frac{m_1 \dot{\vec{x}}_1(0) + m_2 \dot{\vec{x}}_2(0)}{m_1 + m_2} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_1(0) \parallel \vec{x}_2(0); \quad \dot{\vec{x}}_1(0) \parallel \dot{\vec{x}}_2(0)$$

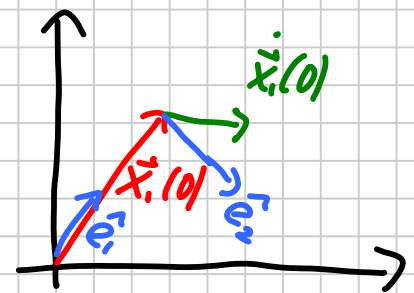
Falls $\vec{x}_1(0) \parallel \dot{\vec{x}}_1(0) \rightarrow$ nur eine Richtung ausgezeichnet
wie 1)
 \rightarrow Dynamik ist auf Gerade $\vec{x}_1(0) + \lambda \vec{x}_2(0)$ beschränkt.

Sonst: $\vec{x}_1(0)$, $\dot{\vec{x}}_1(0)$ definieren Ebene

mit orthogonaler Basis $\hat{e}_1 = \frac{\vec{x}_1(0)}{|\vec{x}_1(0)|}$,

$$\hat{e}_2 = \frac{\vec{x}_1(0) + (\vec{x}_1(0) \times \dot{\vec{x}}_1(0))}{|\vec{x}_1(0) + (\vec{x}_1(0) \times \dot{\vec{x}}_1(0))|}$$

$$(\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2)$$



Invarianz unter Spiegelung an \hat{e}_1 - \hat{e}_2 -Ebene \rightarrow

Bahnen der Teilchen bleiben in Ebene.

③ 3) Analog: 3 Teilchen in Ruhe bleiben in Ebene.

3 Abgeschlossene mechanische Systeme

1-Teilchen-System: $\vec{p} = \vec{0}$, $\vec{p} = m \dot{\vec{x}}$

geradlinig-gleichförmige Bewegung (1. Newton)

Mehrteilchen-Systeme: $\vec{p}_i = \vec{F}_i(\{\vec{x}_{ji}\}, \{\dot{\vec{x}}_{ji}\})$; $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{x}}_i$
(2. Newton), Transformation der \vec{F}_i als echte Vektoren

(4. Newton): $\vec{F}_i' = \sigma R^{-1} \vec{F}_i$

Oft (z. B. für Gravitations- und Coulomb-Gesetz)

gilt 3. Newton-Gesetz $\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ji}$; $\vec{f}_{ji} = f_{ji}(\|\vec{x}_{ji}\|) \vec{x}_{ji}$; $f_{ji} = f_{ij}$

3.1 Allgemeine Eigenschaften abgeschlossener Systeme

Zunächst einige Definitionen:

Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^n m_i$

Massenschwerpunkt $\vec{x}_m = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i$

Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{x}}_i = M \dot{\vec{x}}_m$

* $\Rightarrow \dot{\vec{P}} = \sum_i \vec{F}_i(\{\vec{x}_{ji}\}, \{\dot{\vec{x}}_{ji}\})$

Falls 3. Newton $\Rightarrow \left[\dot{\vec{P}} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{f}_{ji} = \sum_{i < j} (\vec{f}_{ji} + \vec{f}_{ij}) = \vec{0} \right] (\square)$

(34)

Aus 3. Newton folgt also die **Erhaltung des Gesamtimpulses**. Dies gilt jedoch i.A. nicht bei elm. Kräften (bei denen Impuls mit den Feldern ausgetauscht werden kann)!

Die Lösung von \square lässt sich sofort hinschreiben:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0; \quad \vec{x}_m(t) = \vec{x}_m(0) + \frac{1}{m} \vec{p}_0 t$$

↖ Integrationskonstanten ↗

2 Erhaltungsgrößen: $\vec{p}(t)$ und $\vec{x}_m(t) - \frac{1}{m} \vec{p}_0 t$

Wir führen noch den **Gesamtdrehimpuls** $\vec{L} = \sum_i \vec{x}_i \times \vec{p}_i$ und das **Gesamtdrehmoment** $\vec{N} = \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i$ ein.

Achtung: beide Größen hängen i.A. von der Wahl des Ursprungs ab (siehe 3.2)!

Für \vec{L} gilt die Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i (\underbrace{\dot{\vec{x}}_i \times \vec{p}_i}_{= m_i (\dot{\vec{x}}_i \times \vec{x}_i) = 0} + \vec{x}_i \times \dot{\vec{p}}_i) = \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i = \vec{N}$$

Falls das 3. Newtonsche Gesetz gilt, erhalten wir:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{x}_i \times \vec{f}_{ij} = \sum_{i < j} (\vec{x}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{x}_j \times \vec{f}_{ji})$$

$$= \sum_{i < j} (\vec{x}_i - \vec{x}_j) \times \vec{f}_{ji} = \sum_{i < j} \underbrace{\vec{x}_{ij} + \vec{x}_{ji}}_{=0} f_{ji} (\vec{K}_{ji}) = \vec{0}$$

3. Newton impliziert also die Erhaltung von Gesamtimpuls und -drehimpuls: $\vec{L}(t) = \vec{L}(0) = \vec{L}_0$

Nun wenden wir uns der Energie zu und setzen dabei 3. Newton voraus. Wir definieren

$$V_{ji}(x) \equiv V_{ji}(0) + \int_{x_0}^x dx' f_{ji}(x')$$

↑ hängt n. V. nur vom Abstand ab

als Potential (oder potentielle Energie) der Zweiteilchenkraft \vec{f}_{ji} . Beachte: das Potential ist nur bis auf eine Konstante festgelegt, die im Prinzip beliebig ist; oft bieten sich jedoch praktische Konventionen an, z. B. $V_{ji}(\infty) = 0$ (Gravitation, Coulomb) oder $V_{ji}(0) = 0$ [harmonische (Feder-) Kraft].

Def: $W_{1 \rightarrow 2}$ ist die von den Kräften $\{\vec{F}_i\}$ verrichtete Arbeit, wenn sich die Teilchen von den Positionen $\{\vec{x}_i^{(1)}\}$ zur Zeit t_1 zu den neuen Positionen $\{\vec{x}_i^{(2)}\}$ zur Zeit t_2 (kurz: von 1 nach

2) bewegen: $W_{1 \rightarrow 2} \equiv \sum_i \int_1^2 d\vec{x}_i \cdot \vec{F}_i$

3. Newton

$$W_{1 \rightarrow 2} \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 d\vec{x}_i \cdot \vec{f}_{ji} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{f}_{ji}$$

$$= \sum_{i < j} \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{f}_{ji} + \dot{\vec{x}}_j \cdot \vec{f}_{ij}) = \sum_{i < j} \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{x}}_{ij} \cdot \vec{f}_{ji}$$

$$= - \sum_{i < j} \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{x}}_{ji} \cdot \hat{\vec{x}}_{ji} f_{ji} (|\vec{x}_{ji}|) \stackrel{\Delta}{=} - \sum_{i < j} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} V_{ji} (|\vec{x}_{ji}|)$$

$$= - \sum_{i < j} V_{ji} (|\vec{x}_{ji}(t)|) \Big|_{t_1}^{t_2} = V^{(1)} - V^{(2)}$$

mit dem Gesamtpotential $V(\vec{x}) \equiv \sum_{i < j} V_{ji} (|\vec{x}_{ji}|)$

und $V^{(1)} \equiv V(\vec{x}^{(1)})$, $V^{(2)} \equiv V(\vec{x}^{(2)})$.

Zwischenschritt:

$$g(\vec{x}) = |\vec{x}|$$

$$\frac{d}{dt} V_{ji} (|\vec{x}|) = \frac{d}{dt} V_{ji} (g(\vec{x})) = V_{ji}' (g(\vec{x})) \frac{d}{dt} g(\vec{x})$$

$$V_{ji}(x) = V_{ji}(0) + \int_{x_0}^x dx' f_{ji}(x') \Rightarrow \frac{d}{dx} V_{ji}(x) = f_{ji}(x)$$

$$\frac{d}{dt} g(\vec{x}) = \frac{d}{dt} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_\alpha} \dot{x}_\alpha$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{x_\alpha}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \dot{x}_\alpha = \hat{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}$$

(36) Insgesamt: $\frac{d}{dt} V_{ji} (|\vec{x}_{ji}|) = f_{ji} (|\vec{x}_{ji}|) \hat{\vec{x}}_{ji} \cdot \dot{\vec{x}}_{ji}$

Insbesondere ist die Arbeit, die verrichtet wird, wenn sich alle Teilchen entlang von geschlossenen Bahnen bewegen (bzw. allgemeiner: zwischen Konfigurationen mit gleichem Gesamtpotential) gleich Null (mit $\{\vec{x}_i^{(1)}\} = \{\vec{x}_i^{(2)}\}$ bzw. $V^{(1)} = V^{(2)}$):

$$W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 1} = [V^{(1)} - V^{(2)}] + [V^{(2)} - V^{(1)}] = 0 \quad (**)$$

Aus dem Gesamtpotential folgen auch die Kräfte:

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla}_k V &= -\vec{\nabla}_k \sum_{i \neq k} V_{ki}(|\vec{x}_{ki}|) = \sum_{i \neq k} f_{ik}(|\vec{x}_{ki}|) \hat{x}_{ki} \\ &= \sum_{i \neq k} \vec{f}_{ik} = \underline{\vec{F}_k} \end{aligned}$$

Kräfte, die sich derart aus einem Potential ableiten lassen (\Rightarrow keine Abhängigkeit von Geschwindigkeiten) und für die **(**)** gilt, heißen konservativ.

In **(**)** verschwinden mit $\vec{f}_{ji}(\vec{x}) = f_{ji}(|\vec{x}|) \hat{x} = -\vec{\nabla}_{ji} V_{ji}(\vec{x})$ auch die Einzelbeiträge (bei geschlossenen Pfaden):

$$W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 1} = \sum_{i < j} \int_{t_i}^{t_i'} dt \dot{\vec{x}}_{ij} \cdot \vec{f}_{ji} = - \sum_{i < j} \oint_{(ij)} d\vec{x} \cdot \vec{f}_{ji}$$

$$= - \sum_{i < j} \oint_{(ij)} d\vec{x} \cdot (\vec{\nabla} V_{ji}) = \sum_{i < j} [V_{ji}(\vec{x}_j^{(1)}) - V_{ji}(\vec{x}_i^{(1)})] = 0$$

Allgemeines Kriterium dafür, dass die Zweiteilchenkraft $F(\vec{x})$ konservativ ist:

$$\oint d\vec{x} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = 0 \quad \text{für alle Schleifen } \vec{x}^{(1)} \rightarrow \vec{x}^{(2)} \rightarrow \vec{x}^{(1)}$$

Mit dem Satz von Stokes $\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot F(\vec{x}) = \int_F d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F})$

(wobei ∂F der Rand einer glatten Fläche F ist)

lässt sich für topologisch einfach zusammenhängende Gebiete (jede Schleife lässt sich stetig auf einen Punkt zusammenziehen) ein äquivalentes Kriterium angeben:

$$\vec{F} \text{ konservativ} \Leftrightarrow \vec{F} \text{ diffbar mit } \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

Dann gilt Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} V^{(1)} - V^{(2)} &= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} d\vec{x}_i \cdot \vec{F}_i = \sum_i m_i \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{x}}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i \\ &= \sum_i m_i \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\dot{\vec{x}}_i|^2 \right) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= E_{\text{kin}}^{(2)} - E_{\text{kin}}^{(1)} \end{aligned}$$

mit der kinetischen Energie $E_{kin}(t) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2(t)$

Für die Gesamtenergie $E = E_{kin} + V$ gilt

also (bei 3. Newton): $E^{(2)} = E^{(1)}$

bzw. $\frac{d}{dt} E = 0$

Wir haben also eine 3. Erhaltungsgröße gefunden (neben \vec{P} und \vec{L}).

3.1.1 Das Virialtheorem

In diesem Abschnitt werden wir Beziehungen zwischen Zeitmittelwerten der kinetischen Energie und des Virials $\sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{F}_i$ herleiten; letzteres kann für homogene Potentiale im Wesentlichen mit der potentiellen Energie identifiziert werden.

Mathematischer Hintergrund:

Für eine (integrierbare) Funktion $g(t)$ ist der Zeitmittelwert definiert durch

$$\overline{g(t)} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt g(t)$$

Wir betrachten nun eine differenzierbare Funktion $G(t)$, deren Wertebereich beschränkt sei:

$$|G(t)| \leq |G_{\max}| < \infty \quad \forall t$$

sowie ihre zeitliche Ableitung $g(t) = \frac{d}{dt} G(t)$

Behauptung: $\overline{g(t)} = \overline{\frac{d}{dt} G(t)} = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Beweis: } |\overline{g(t)}| &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} G(t) dt \right| \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [|G(T) - G(0)|] \\
 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [|G(T)| + |G(0)|] \\
 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2|G|_{\max}}{T} = 0
 \end{aligned}$$

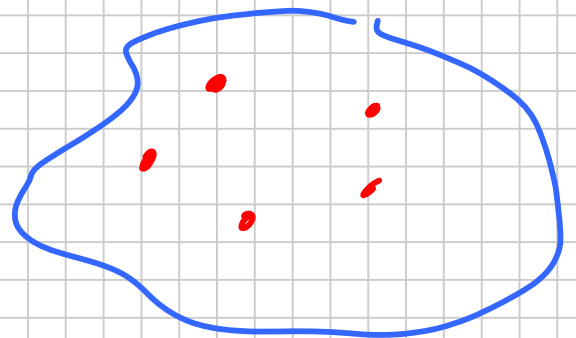
Jetzt Anwendung: $G(t) \equiv \sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{p}_i$

Annahme, gültig höchstens im Schwerpunktsystem:

Aufenthaltbereich aller Teilchen beschränkt

und Impulse beschränkt

$\rightarrow G(t)$ beschränkt



$$\frac{d}{dt} G(t) = \sum_i (\dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{p}_i + \vec{x}_i \cdot \dot{\vec{p}}_i)$$

$$= \sum_i (m_i \dot{\vec{x}}_i^2 + \vec{x}_i \cdot \vec{F}_i) = 2E_{\text{kin}} + \sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{F}_i$$

$$0 = \overline{\frac{d}{dt} G(t)} = 2 \overline{E_{\text{kin}}} + \sum_i \overline{\vec{x}_i \cdot \vec{F}_i}$$

$$\Rightarrow \overline{E_{\text{kin}}} = -\frac{1}{2} \sum_i \overline{\vec{x}_i \cdot \vec{F}_i}$$

Clausius-Virial

(41)

Diese Aussage heißt Virial-Theorem.

Wir betrachten nun Kräfte, die das 3. Newton-Gesetz erfüllen und deren ww-Potential eine **homogene** Funktion des Abstands ist:

$$V_{ji}(x) = v_{ji} x^\alpha \quad (x = |\vec{x}|, \alpha \in \mathbb{R}, v_{ji} \text{ konstant})$$

$$\leadsto \vec{x} \cdot (\vec{\nabla} V_{ji})(\vec{x}) = x \frac{d}{dx} V_{ji}(x) = x v_{ji} \alpha x^{\alpha-1} = \alpha V_{ji}(x)$$

Dann können wir das Virial umschreiben:

$$\sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{F}_i = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{x}_i \cdot \vec{f}_{ji} = \sum_{i < j} (\vec{x}_i - \vec{x}_j) \cdot \vec{f}_{ji}$$

$$= \sum_{i < j} -\vec{x}_{ji} \cdot (\vec{\nabla} V_{ji})(\vec{x}_{ji})$$

$$= -\alpha \sum_{i < j} V_{ji}(|\vec{x}_{ji}|) = -\alpha V(\vec{X})$$

und erhalten als Spezialfall des Virial-Theorems für homogene Potentiale (bei 3. Newton):

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2} \alpha \overline{V(\vec{X})} = \frac{\alpha}{2} \overline{E_{pot}}$$

Wichtige Beispiele:

$\alpha = -1$:	$\overline{E_{kin}} = -\frac{1}{2} \overline{E_{pot}}$	Kepler/Coulomb
$\alpha = 1$:	$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2} \overline{E_{pot}}$	"Quarks"
$\alpha = 2$:	$\overline{E_{kin}} = \overline{E_{pot}}$	harm. Oszillator

(42)

3.2 Galilei-Transformationen

Wir untersuchen nun die Wirkung von Koordinaten-Transformationen der Form $\vec{x}'(\vec{x}, t) = \sigma R(\vec{\alpha}) \vec{x} - \vec{v}t - \vec{\xi}$ auf Erhaltungsgrößen, dabei bleibt die Zeit unverändert: $t' = t$. Wir definieren zusätzlich „gedrehte“ Geschwindigkeiten $\vec{v}'_{\vec{\alpha}} \equiv \sigma R(\vec{\alpha}) \vec{v}$ und Verschiebungen $\vec{\xi}'_{\vec{\alpha}} \equiv \sigma R(\vec{\alpha}) \vec{\xi}$; damit können wir schreiben

$$\vec{x}'(\vec{x}, t) = \sigma R(\vec{\alpha}) (\vec{x} - \vec{v}'_{\vec{\alpha}} t - \vec{\xi}'_{\vec{\alpha}})$$

was sich manchmal als bequemer erweist.

Speziell betrachten wir auch orthogonale Galilei-Transformationen $\vec{x}'(\vec{x}, t) = \sigma R(\vec{\alpha}) \vec{x}$

(d.h. für $\vec{v} = \vec{v}'_{\vec{\alpha}} = \vec{0}$; $\vec{\xi} = \vec{\xi}'_{\vec{\alpha}} = \vec{0}$), die den

Tensorcharakter physikalischer Größen bestimmen:

echter Vektor: $\vec{V}' = \sigma R(\vec{\alpha}) \vec{V}$

Pseudovektor: $\vec{V}' = R(\vec{\alpha}) \vec{V}$

(43) echter Skalar: $W' = W$; Pseudoskalar: $W' = \sigma W$

1. Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ und Kräfte

$$\vec{p}_i' = m_i \sigma R'(\vec{\alpha}) (\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}}) = \sigma R'(\vec{\alpha}) (\vec{p}_i - m_i \dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}})$$

$$\Rightarrow \vec{P}' = \sigma R'(\vec{\alpha}) (\vec{P} - M \dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}})$$

$$\dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}} = 0 \rightsquigarrow \vec{P}' = \sigma R'(\vec{\alpha}) \vec{P}; \quad \vec{p}_i' = \sigma R'(\vec{\alpha}) \vec{p}_i \quad \text{echte Vektoren}$$

$$\vec{F}_i' = \dot{\vec{p}}_i' = \sigma R'(\vec{\alpha}) \dot{\vec{p}}_i = \sigma R'(\vec{\alpha}) \vec{F}_i \quad \text{'' ''}$$

2. Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L}' = \sum_i \vec{x}_i' \times \vec{p}_i'$$

$$= \sum_i [\sigma R'(\vec{\alpha}) (\vec{x}_i - \dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}} t - \vec{\xi}_{\vec{\alpha}})] \times [\sigma R'(\vec{\alpha}) (\vec{p}_i - m_i \dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}})]$$

$$= R'(\vec{\alpha}) \sum_i (\vec{x}_i - \dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}} t - \vec{\xi}_{\vec{\alpha}}) \times (\vec{p}_i - m_i \dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}})$$

$$(R'(\vec{\alpha}) \times (R'(\vec{\alpha}) \times \vec{b})) = R'(\vec{\alpha}) \times \vec{b}$$

$$= R'(\vec{\alpha}) \left[\sum_i \vec{x}_i \times \vec{p}_i - \sum_i m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}} - (\dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}} t + \vec{\xi}_{\vec{\alpha}}) \times (\vec{P} - M \dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}}) \right]$$

$$= R'(\vec{\alpha}) \left[\vec{L} - \dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}} t \times \vec{P} - \vec{\xi}_{\vec{\alpha}} \times (\vec{P} - M \dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}}) - M \vec{x}_m(t) \times \dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}} \right]$$

$$= R'(\vec{\alpha}) \left[\vec{L} - \vec{\xi}_{\vec{\alpha}} \times (\vec{P}_0 - M \dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}}) - M \vec{x}_{m0} \times \dot{\vec{v}}_{\vec{\alpha}} \right]$$

$$\vec{P} = \vec{P}_0; \quad \vec{x}_m(t) = \vec{x}_{m0} + \frac{1}{M} \vec{P}_0 t$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = 0 \Leftrightarrow \dot{\vec{L}}' = 0$$

orthogonale Trafo: $\vec{L}' = R^{-1}(\vec{\alpha}) \vec{L}$ Pseudovektor.

3. Arbeit und potentielle Energie

$$\dot{\vec{x}}_i' = \sigma R^{-1}(\vec{\alpha}) (\dot{\vec{x}}_i - \vec{v}_\alpha)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W_{1 \rightarrow 2}' &= \sum_i \int_{t_1'}^{t_2'} dt' \dot{\vec{x}}_i' \cdot \vec{F}_i' \\ &= \sum_i \int_{t_1'}^{t_2'} dt' [\sigma R^{-1}(\vec{\alpha}) (\dot{\vec{x}}_i - \vec{v}_\alpha)] \cdot [\sigma R^{-1}(\vec{\alpha}) \vec{F}_i] \\ &= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{\vec{x}}_i - \vec{v}_\alpha) \cdot \vec{F}_i = W_{1 \rightarrow 2} - \vec{v}_\alpha \cdot \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \vec{F}_i}_{=0} \\ &= W_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{für abgeschlossene Systeme!}) \end{aligned}$$

Die Arbeit ist also ein Skalar und sogar *invariant* unter allen Galilei-Transformationen. Gleiches gilt für die potentielle Energie:

$$\begin{aligned} V' = V(\vec{x}') &= \sum_{i < j} V_{ji} (|\vec{x}_{ji}'|) = \sum_{i < j} V_{ji} (|\sigma R^{-1}(\vec{\alpha}) \vec{x}_{ji}|) \\ &= \sum_{i < j} V_{ji} (|\vec{x}_{ji}|) = V(\vec{x}) = V \end{aligned}$$

4. Kinetische Energie

$$\begin{aligned} E_{kin}' &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{x}}_i')^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i [\sigma R^{-1}(\vec{\alpha}) (\dot{\vec{x}}_i - \vec{v}_\alpha)]^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{x}}_i - \vec{v}_\alpha|^2 = E_{kin} - M \dot{\vec{x}}_M \cdot \vec{v}_\alpha + \frac{1}{2} M \vec{v}_\alpha^2 \end{aligned}$$

(45)

$$= E_{\text{kin}} - \vec{P} \cdot \vec{v}_\alpha + \frac{1}{2} M \vec{v}_\alpha^2$$

$\vec{v} = \vec{v}_\alpha = \vec{0} \Rightarrow E_{\text{kin}}$ ist Skalar, aber keine allg. Invariante unter G-Ts.

5. Virial

Wir nehmen an, dass in K die Voraussetzungen des Virialsatzes erfüllt sind: $\overline{E_{\text{kin}}} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{F}_i}$

$$\leadsto \vec{P} = 0 \Rightarrow \overline{E_{\text{kin}}} = \overline{E_{\text{kin}}'} - \frac{1}{2} M \vec{v}_\alpha^2 = \overline{E_{\text{kin}}'} - \frac{1}{2} M \vec{v}^2$$

Wegen $\sum_i \vec{F}_i = 0$ gilt zudem:

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{x}_i' \cdot \vec{F}_i' &= \sum_i [\sigma R'(\vec{x}) (\vec{x}_i - \vec{v}_\alpha t - \vec{P}_\alpha)] \cdot [\sigma R(\vec{x}) \vec{F}_i] \\ &= \sum_i (\vec{x}_i - \vec{v}_\alpha t - \vec{P}_\alpha) \vec{F}_i = \sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{F}_i \end{aligned}$$

Das Virial ist also Skalar und invariant unter G-Ts.

Es folgt das verallgemeinerte Virialtheorem

$$\overline{E_{\text{kin}}'} = \frac{(\vec{P}')^2}{2M} - \frac{1}{2} \overline{\sum_i \vec{x}_i' \cdot \vec{F}_i'} \quad (\vec{P} = M\vec{v})$$

für Systeme mit endlichem Gesamtimpuls, die

(46) im Schwerpunktsystem die Voraussetzungen des

„normalen“ Virialtheorems erfüllen ($|\vec{x}_i(t)| \leq R_{\max}$).

6. Volumen

Für das durch die 3 Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ aufgespannte (orientierte) Volumen gilt

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\vec{x}_1', \vec{x}_2', \vec{x}_3') &= \vec{x}_1' \cdot (\vec{x}_2' + \vec{x}_3') \\ &= [\sigma R'(\vec{\alpha}) \vec{x}_1] \cdot \{ [\sigma R'(\vec{\alpha}) \vec{x}_2] + [\sigma R'(\vec{\alpha}) \vec{x}_3] \} \\ &= \sigma [R'(\vec{\alpha}) \vec{x}_1] \cdot [R'(\vec{\alpha}) (\vec{x}_2 + \vec{x}_3)] \\ &= \sigma \vec{x}_1 \cdot (\vec{x}_2 + \vec{x}_3) = \sigma \text{Vol}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3). \end{aligned}$$

Es handelt sich also um einen Pseudoskalar.

Das Schwerpunktsystem

Eine G-T mit den Parametern $\vec{v}_{\vec{\alpha}} = \frac{1}{m} \vec{P}_0$; $\vec{c}_{\vec{\alpha}} = \vec{x}_{m,0}$

führt für beliebige $\vec{\alpha}, \sigma$ ins Schwerpunktsystem:

$$\begin{aligned} \vec{x}_m^{(sl)}(t) &= \vec{x}'(\vec{x}_m(t), t) = \sigma R'(\vec{\alpha}) [\vec{x}_m(t) - \vec{v}_{\vec{\alpha}} t - \vec{c}_{\vec{\alpha}}] \\ &= \sigma R'(\vec{\alpha}) [\vec{x}_m(t) - \frac{1}{m} \vec{P}_0 t - \vec{x}_{m,0}] = \vec{0} \end{aligned}$$

Es gilt: $\vec{P}^{(sl)} = \vec{0}$; $\vec{L}^{(sl)} = \vec{R}^{-1}(\vec{\alpha}) (\vec{L} - \vec{x}_{m,0} \times \vec{P}_0)$

$$\Leftrightarrow \vec{L} = \vec{x}_{m,0} \times \vec{P}_0 + \vec{R}(\vec{\alpha}) \vec{L}^{(sl)}$$

Der Drehimpuls in einem beliebigen IS setzt sich also aus dem (gedrehten) Drehimpuls im Schwerpunkt-IS und dem im Massenschwerpunkt konzentrierten Beitrag zusammen.

Analoges gilt für die kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{\vec{p}_0^2}{2M} + E_{\text{kin}}^{(s)}$$

Bei der (einfacheren) Untersuchung im Schwerpunktsystem verliert man also keine Informationen.

3.3 Das Zweiteilchenproblem - allgemeine Eigenschaften

Beispiele für Systeme von 2 unv. Teilchen:

- Erde - Sonne und Erde - Mond
- 2-atomige Moleküle (Schwingungen und Rotation) - *eigentlich Quantenmechanik!*
- 2-Teilchen-Streuung " "

④ Annahme: 3. Newtonsches Gesetz erfüllt.

→ Bewegungsgleichungen

$$\vec{p}_1 = \vec{F}_1 = \vec{f}_{21} = f(|\vec{x}_{21}|) \vec{x}_{21}; \quad \vec{p}_1 = m \dot{\vec{x}}_1$$

$$\vec{p}_2 = \vec{F}_2 = \vec{f}_{12} = f(|\vec{x}_{21}|) \vec{x}_{12}; \quad \vec{p}_2 = m \dot{\vec{x}}_2$$

dabei lässt sich die Paarkraft aus einem Potential

ableiten: $f(x) = V'(x) \equiv \frac{d}{dx} V(x)$

Impuls $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P}_0$, Drehimpuls $\vec{L} = \vec{x}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{x}_2 \times \vec{p}_2$

und Gesamtenergie $E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{x}}_2^2 + V(|\vec{x}_{12}|)$

sind erhalten; für den Schwerpunkt gilt:

$$\vec{x}_m(t) = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} = \vec{x}_{m,0} + \frac{1}{m} \vec{P}_0 t$$

Außerdem: Virialsatz (bei räumlich beschränkten Teilchenbahnen).

Wir transformieren (mit $\sigma=1, \vec{\alpha}=\vec{0}$) auf ein SPS

und definieren den Relativvektor $\vec{x} \equiv \vec{x}_{21} = \vec{x}_{21}' (= -\vec{x}_{12})$

$$\vec{x}_1' = \vec{x}_1 - \vec{x}_m(t) = \vec{x}_1 - \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{x}$$

$$\vec{x}_2' = \vec{x}_2 - \vec{x}_m(t) = \vec{x}_2 - \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{x}$$

$$\left(\rightarrow \vec{x}_m^{(s)} = \frac{m_1 \vec{x}_1' + m_2 \vec{x}_2'}{m_1 + m_2} = \vec{0}, \quad \vec{P}^{(s)} = \vec{0} \right)$$

Der Gesamtdrehimpuls im SPS,

$$\begin{aligned} L^{(s)} &= \vec{x}_1' + \vec{p}_1' + \vec{x}_2' + \vec{p}_2' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (-\vec{x} + \dot{\vec{x}}_1' + \vec{x} + \dot{\vec{x}}_2') \\ &= \mu \vec{x} + \dot{\vec{x}}_2' = \mu \dot{\vec{x}} + \dot{\vec{x}} \end{aligned}$$

ist natürlich Erhaltungsgröße und hat die Form des Drehimpulses eines einzelnen Teilchens mit Koordinate \vec{x} und reduzierter Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1}$$

23.5.11

Auch die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem lässt sich durch μ und Relativkoordinaten ausdrücken:

$$\begin{aligned} E^{(s)} &= \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{x}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\vec{x}}_2|^2 + V(|\vec{x}_{1,2}|) \\ &= \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{2 (m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{x}}^2 + V(|\vec{x}|) \\ &= \frac{m_1 m_2 (m_2 + m_1)}{2 (m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{x}}^2 + V(|\vec{x}|) = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{x}}^2 + V(|\vec{x}|) \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung im SPS lautet

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}} &= \ddot{\vec{x}}_2 - \ddot{\vec{x}}_1 = \ddot{\vec{x}}_2 - \ddot{\vec{x}}_1 = -\frac{1}{m_2} f(x) \hat{e}_x - \frac{1}{m_1} f(x) \hat{e}_x = -\frac{1}{\mu} f(x) \hat{e}_x \\ \Leftrightarrow \mu \ddot{\vec{x}} &= -f(x) \hat{e}_x = -V'(x) \hat{e}_x \quad (*) \end{aligned}$$

Mit (*) können wir leicht überprüfen, dass $\vec{L}^{(s)}$ und $E^{(s)}$ erhalten sind:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}^{(s)} &= \mu (\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} + \vec{x} \times \ddot{\ddot{\vec{x}}}) = -V'(x) \dot{\vec{x}} \times \hat{e}_x = \vec{0} \\ \frac{d}{dt} E^{(s)} &= \mu \dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} + V'(x) \hat{e}_x \cdot \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}} \cdot (\mu \ddot{\vec{x}} + V'(x) \hat{e}_x) = 0 \end{aligned}$$

Das Virialtheorem im SPS folgt aus dem allg.

(51) Ausdruck (siehe 3.1.1) als:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu \overline{\dot{\vec{x}}^2} &= \overline{E_{\text{kin}}^{(S)}} = -\frac{1}{2} \overline{(\vec{x}_1' \cdot \vec{f}_{21} + \vec{x}_2' \cdot \vec{f}_{12})} \\ &= \frac{1}{2} \overline{\vec{x}_{21}' \cdot \vec{f}_{21}} = \frac{1}{2} \overline{\vec{x} \cdot f(x) \hat{e}_x} = \frac{1}{2} \overline{x f(x)} = \frac{1}{2} \overline{x V'(x)} \end{aligned}$$

Für homogene Potentiale $V(x) = V_0 x^\alpha$ gilt also die einfache Beziehung $\frac{1}{2} \mu \overline{\dot{\vec{x}}^2} = \frac{1}{2} \alpha \overline{V(x)}$.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass ein 2-Teilchen-System (mit 3. Newton) vollständig äquivalent zu einem einzelnen Teilchen mit Masse μ im Zentralpotential plus der Schwerpunkt-Bewegung ist.

Jetzt wollen wir die Lösung von (*) diskutieren.

$\vec{L}^{(S)}$ erhalten \rightarrow Bahn $\vec{x}(t)$ für alle Zeiten in Ebene senkrecht zu $\vec{L}^{(S)}$

wähle $\vec{L}^{(S)} = L \vec{e}_3$ mit $L > 0 \rightarrow$ Bewegung in \vec{e}_1, \vec{e}_2 -Ebene, z.B. mit $\vec{e}_1 \equiv \hat{e}_x(0)$; $\vec{e}_2 \equiv \hat{e}_3 \times \vec{e}_1$ fest

Falls $L = 0$ (d.h. für $\dot{\vec{x}}(0) \parallel \vec{x}(0)$) \rightarrow eindim. Problem

Sonst führen wir Polarkoordinaten ein:

$$\vec{x} = x \hat{e}_x = x [\cos(\varphi) \hat{e}_1 + \sin(\varphi) \hat{e}_2]$$

nochmal mit expliziten Zeitabhängigkeiten:

$$\underline{\vec{x}}(t) = x(t) \underline{\hat{e}}_x(t) = x(t) [\cos(\varphi(t)) \underline{\hat{e}}_1 + \sin(\varphi(t)) \underline{\hat{e}}_2]$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}} = \dot{x} \underline{\hat{e}}_x + x \dot{\varphi} \underbrace{[-\sin(\varphi) \underline{\hat{e}}_1 + \cos(\varphi) \underline{\hat{e}}_2]}_{\underline{\hat{e}}_3 \times \underline{\hat{e}}_x(t)} \quad (\Delta)$$

Damit folgt der Gesamtdrehimpuls im SPS als

$$\begin{aligned} L_{\underline{\hat{e}}_3} &= \vec{L}^{(s)} = \mu \vec{x} \times \dot{\vec{x}} \\ &= \mu x^2 \dot{\varphi} [\cos(\varphi) \underline{\hat{e}}_1 + \sin(\varphi) \underline{\hat{e}}_2] \times [-\sin(\varphi) \underline{\hat{e}}_1 + \cos(\varphi) \underline{\hat{e}}_2] \\ &= \mu x^2 \dot{\varphi} (\underline{\hat{e}}_1 \times \underline{\hat{e}}_2) [\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)] = \mu x^2 \dot{\varphi} \underline{\hat{e}}_3 \end{aligned}$$

Für seinen konstanten Betrag gilt also:

$$L = \mu x^2(t) \dot{\varphi}(t) \quad \text{bzw.} \quad \dot{\varphi}(L, x) = \frac{L}{\mu x^2} \quad (\square) \quad \underline{\underline{27.5.11}}$$

Die Gesamtenergie im SPS folgt aus (A) als

$$\begin{aligned} E^{(s)} &= \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{x}}^2 + V(x) \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{+ V(x)} \\ &= \frac{1}{2} \mu \left[\dot{x}^2 \underbrace{|\underline{\hat{e}}_x|^2}_{=1} + (x \dot{\varphi})^2 \underbrace{|\underline{\hat{e}}_3 \times \underline{\hat{e}}_x(t)|^2}_{=1} + 2 x \dot{x} \dot{\varphi} \underbrace{\underline{\hat{e}}_x \cdot (\underline{\hat{e}}_3 \times \underline{\hat{e}}_x)}_{=0} \right] \\ &= \frac{1}{2} \mu (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\varphi}^2) + V(x) \\ &= \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \mu x^2 \left(\frac{L}{\mu x^2} \right)^2 + V(x) \\ &= \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 + V_{\text{eff}}(x) \end{aligned}$$

mit dem effektiven Potential (von L abhängig!)

(53)

$$V_{\text{eff}}(x) \equiv V(x) + \frac{L^2}{2\mu x^2}$$

(**)

Da $E^{(s)}$ (wie auch L) konstant ist, erhält man aus

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{\mu} [E^{(s)} - V_f(x)] \quad \text{bzw.} \quad \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E^{(s)} - V_f(x))}$$

keine explizite t -Abhängigkeit!

eine separable Differentialgleichung für die Zeit $t(x)$ als Funktion des (Relativ)abstands:

$$\frac{dt}{dx}(x) = \pm \left\{ \frac{2}{\mu} [E^{(s)} - V_f(x)] \right\}^{-1/2}$$

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E^{(s)} - V_f(x))}}$$

mit der allgemeinen Lösung (z.B. für $t_0=0$; $x_0=x(0)$):

$$t - t_0 = \int_{t_0}^t dt = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E^{(s)} - V_f(x))}}$$

Nach Invertierung $t(x) \rightarrow x(t)$ und mit (□) folgt auch die Winkelabhängigkeit:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t dt' \frac{L}{\mu [x(t')]^2}$$

(54) Hiermit ist das 2-Teilchen-Problem vollständig gelöst.

Beachte: $E^{(s)} = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 + V_f(x)$ konstant

$$\rightarrow \mu \ddot{x} + V_f'(x) \dot{x} = 0$$

$$\mu \ddot{x} = -V_f'(x)$$

Die radiale Dynamik folgt also aus einer eindimensionalen Bewegungsgleichung für ein Teilchen der Masse μ im effektiven Potential $V_f(x)$.

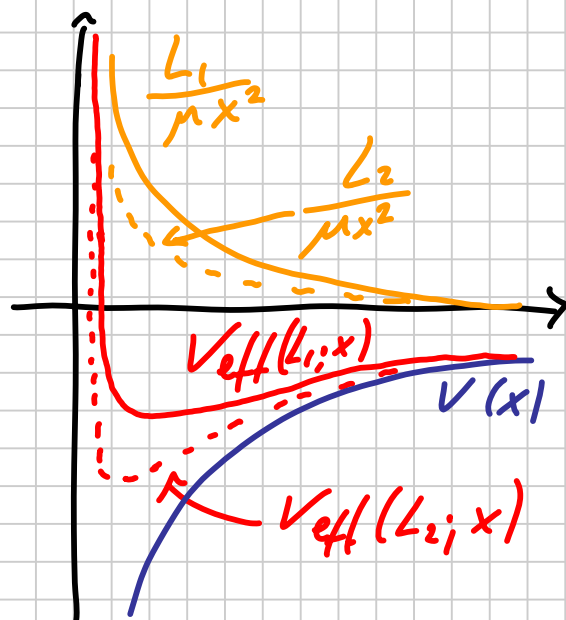
Letzteres enthält 2 Beiträge:

das Zentralpotential $V(x)$ und

den Term $\frac{L^2}{2\mu x^2}$, der als Zentrifugalbarriere oder

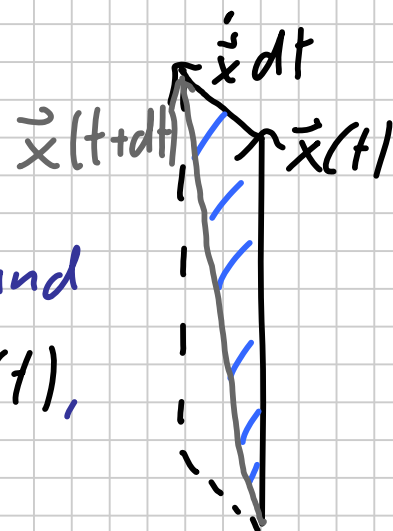
Z-potential bezeichnet wird.

Beispiel: $V(x) \sim \frac{1}{x}$; $L_1 \approx 2L_2$



Flächensatz: definieren wir die vom Relativvektor $\vec{x}(t)$ zwischen $t=0$ und der Zeit t überstrichene Fläche als $A(t)$,

so gilt: $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{x} \times \dot{\vec{x}}| = \frac{L}{2\mu}$, die



(55) Flächengeschwindigkeit ist also konstant.

(verallg. 2. Keplersches Gesetz).

3.4 Das Zweiteilchenproblem - Beispiele

3.4.1 Kreisbahnen

Bei attraktiver Paarwechselwirkung ($V'(x) > 0$) und endlichem Drehimpuls $L > 0$ (\leadsto stark abstoßende Zentrifugalbarriere für $x \rightarrow 0$) weist das effektive Potential i. A. mindestens ein Minimum auf:

$$0 = V_f'(x_{\min}) = V'(x_{\min}) - \frac{L^2}{\mu x_{\min}^3} \quad (*)$$

Dies entspricht einer Gleichgewichtslage der radialen Bewegung: für $x = x_{\min}$ gilt: $\ddot{x} = V_f'(x_{\min}) = 0$;

In diesem Abstand sind also Kreisbahnen möglich (falls $\dot{x}(0) = 0$ gewählt wurde). Für die Winkelvariable gilt dann: $\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{L t}{\mu x_{\min}^2}$

Andererseits können wir bei gegebenem $V(x)$ für jedes x_0 mit $V'(x_0) > 0$ eine Gleichgewichtslage bei

(56) $x_0 \equiv x_{\min}$ erzeugen, indem wir den Drehimpuls

entsprechend einstellen: $L = \sqrt{\mu x_{\min}^3 V'(x_{\min})}$

Dann gilt also: $\varphi(t) = \varphi(0) + t \sqrt{\frac{V'(x_{\min})}{\mu x_{\min}}}$,

woraus für die Umlaufzeit T auf der Kreisbahn

folgt: $T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu x_{\min}}{V'(x_{\min})}}$

Speziell für homogene Potentiale $V(x) = V_0 x^\alpha$

erhält man: $T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha V_0}} x_{\min}^{1-\frac{\alpha}{2}}$

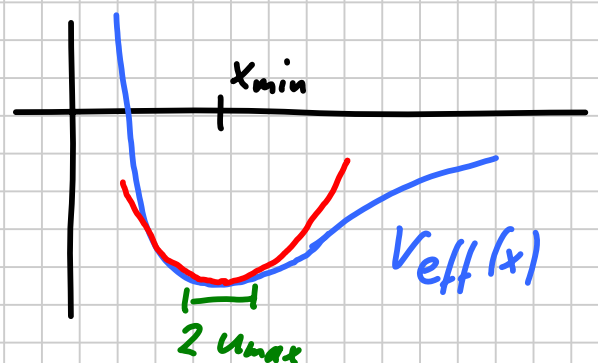
Bsp: $\alpha = 2$ (harmon. Oszillator): $T \propto x_{\min}^0$ konstant

$\alpha = -1$ (Kepler-Problem): $T \propto x_{\min}^{-3/2}$

Letzteres ist ein Spezialfall des 3. Keplerschen Gesetzes.

3.4.2 Kleine Schwingungen

Wir betrachten nun kleine Auslenkungen um stabile Kreisbahnen (mit $x = x_{\min}$).



Dabei bedeutet „klein“, dass für $|x - x_{\min}| \leq U_{\max}$ (D) das Potential durch eine Parabel genähert werden

kann (Taylor-Entwicklung 2. Ordnung):

$$V_f(x) \approx V_f(x_{\min}) + \frac{1}{2} V_f''(x_{\min}) (x - x_{\min})^2$$

Innerhalb dieser harmonischen Näherung lautet die Bewegungsgleichung $\ddot{x} = -\frac{1}{\mu} V_f''(x_{\min}) (x - x_{\min})$.

Mit den Definitionen $\omega^2 \equiv \frac{1}{\mu} V_f''(x_{\min})$; $u \equiv x - x_{\min}$ erhalten wir:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

Diese Gleichung hat für die gegebene Anfangsbedingung $u(0), \dot{u}(0)$ die allgemeine Lösung:

$$u(t) = u(0) \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \dot{u}(0) \sin(\omega t)$$

$\bar{x}(t)$ oszilliert also harmonisch mit der Frequenz $\omega = 2\pi f$ um den Mittelwert x_{\min} . Die

Bedingung (□) erfordert $u^2(0) + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega}\right)^2 \leq U_{\max}^2$

Falls $U_{\max} \ll x_{\min}$, können wir auch bei der Berechnung von $\varphi(t)$ entwickeln:

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \frac{L}{\mu x_{\min}^2} \int_0^t dt' \left[1 + \frac{u(t')}{x_{\min}} \right]^{-2}$$

$$\approx \frac{L}{\mu x_{\min}^2} \int_0^t dt \left[1 - 2 \frac{u(t')}{x_{\min}} \right]$$

(58)

$$\approx \frac{2L}{\mu \omega x_{\min}^2} \left\{ \frac{1}{2} \omega t - \frac{u(0)}{x_{\min}} \sin(\omega t) - \frac{\dot{u}(0)}{\omega x_{\min}} [1 - \cos(\omega t)] \right\}$$

Die Winkelvariable steigt also im Wesentlichen linear an, führt aber zusätzlich kleine Oszillationen mit der Frequenz ω aus.

3.4.3 Der harmonische Oszillator

Der isotrope dreidimensionale harmonische Oszillator ist durch das Potential $V(|\vec{x}|) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \vec{x}^2$ definiert. Daraus folgt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{x}$$

Mit der Wahl $\vec{L}^{(s)} = L \hat{e}_3$ gilt: $x_3(t) = 0 \forall t$. Für die anderen beiden Komponenten können wir die Lösung aus 3.4.2 übernehmen (da $\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$), wobei wir die Anfangsbed. jedoch durch **Amplituden** a_i und **Phasen** φ_i ausdrücken:

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1); \quad x_2(t) = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Klar: die möglichen Bahnen des harm. Oszillators **(59)** sind alle $T = \frac{2\pi}{\omega}$ -periodisch und somit geschlossen.

Bemerkenswert: T hängt weder von der Form noch von der Amplitude der Bahn ab. Dagegen hängt die Energie (natürlich) von den Amplituden ab:

$$E^{(s)} = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{x}}^2 + \frac{1}{2} \mu \omega^2 \vec{x}^2 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 (a_1^2 + a_2^2)$$

und der Drehimpuls zusätzlich von der Phasendifferenz: $\vec{L}^{(s)} = \mu \vec{x} \times \dot{\vec{x}} = \mu \omega a_1 a_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \hat{e}_3$

Um die Form der Bahnen zu bestimmen,

definieren wir $\varphi(t) \equiv \omega t + \varphi_1$; $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$

$$\vec{x}_1(t) = a_1 \cos[\varphi(t)]$$

$$x_2(t) = a_2 \cos[\varphi(t) + \delta] = a_2 [\cos(\varphi(t)) \cos(\delta) - \sin(\varphi(t)) \sin(\delta)]$$

$$\Rightarrow \underline{\cos(\varphi)} = \frac{x_1}{a_1}; \sin(\delta) \underline{\sin(\varphi)} = \frac{x_1}{a_1} \cos(\delta) - \frac{x_2}{a_2}$$

$$\Rightarrow \sin^2(\delta) = \sin^2(\delta) [\underline{\cos^2(\varphi)} + \underline{\sin^2(\varphi)}]$$

$$= \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 [\underline{\sin^2(\delta)} + \cos^2(\varphi)] + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - 2 \frac{x_1 x_2}{a_1 a_2} \cos(\delta)$$

$$= \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - 2 \frac{x_1 x_2}{a_1 a_2} \cos(\delta) \quad (\Delta)$$

Abgesehen von dem Mischterm (d. h. für $\cos(\delta) = 0$)

entspricht dies schon einer Ellipsengleichung

(60)

($\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$). Um eine solche *Normalform* zu erreichen, schreiben wir (A) als

$$\sin^2(\delta) = (x_1, x_2) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^2} & -\frac{\cos(\delta)}{a_1 a_2} \\ -\frac{\cos(\delta)}{a_1 a_2} & \frac{1}{a_2^2} \end{pmatrix},$$

wobei A eine reelle symmetrische Matrix ist, die also mit einer orthogonalen Transformation \mathcal{O} diagonalisiert werden kann:

$$A = \mathcal{O}^T A_D \mathcal{O}; \quad A_D = \begin{pmatrix} \lambda_+ & \\ & \lambda_- \end{pmatrix}$$

Hierbei sind λ_+, λ_- die *Eigenwerte* von A :

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right)^2 - \frac{4 \sin^2(\delta)}{(a_1 a_2)^2}} \right\}$$

Mit der Definition $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ erhält man:

$$\begin{aligned} \sin^2(\delta) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \mathcal{O}^T A_D \mathcal{O} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_+ \xi_1^2 + \lambda_- \xi_2^2 \end{aligned}$$

Somit folgt in der Tat die *Ellipsen-Normalform*

$$1 = \left(\frac{\xi_1}{\alpha_1} \right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{\alpha_2} \right)^2 \quad \text{mit} \quad \alpha_1 = \frac{|\sin(\delta)|}{\sqrt{\lambda_+}}; \quad \alpha_2 = \frac{|\sin(\delta)|}{\sqrt{\lambda_-}}$$

(61)

Falls in (1) der Parameter δ den Wert 0 oder π hat, vereinfacht sich diese zur Geradengleichung $\frac{x_1}{a_1} \mp \frac{x_2}{a_2} = 0$, was bei der Diagonalisierung zu $\lambda_- = 0$ und somit zu $\mathcal{E}_1 = 0$ führt.

Das Virialtheorem lässt sich leicht überprüfen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu \overline{\dot{x}^2} &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 \left\{ a_1^2 \overline{\sin^2(\varphi(t))} + a_2^2 \overline{\sin^2(\varphi(t) + \delta)} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \mu \omega^2 (a_1^2 + a_2^2) \\ &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 \left\{ a_1^2 \overline{\cos^2(\varphi(t))} + a_2^2 \overline{\cos^2(\varphi(t) + \delta)} \right\} \\ &= \overline{V(x)} = \frac{1}{2} x \overline{V'(x)} \end{aligned}$$

Hier wurde benutzt, dass der Mittelwert von $\sin^2(\varphi)$ oder $\cos^2(\varphi)$ über volle Perioden gleich $\frac{1}{2}$ ist.

3.4.4 Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln

Bisher haben wir die Normalform der Ellipse

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1 \quad (\text{Halbachsen } a_1 \text{ und } a_2)$$

benutzt. Wir nehmen nun (o.B.d.A) $a_2 \leq a_1$ an

und definieren die Exzentrizität ϵ als

$$\epsilon \equiv \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{a_1^2}} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_2}{a_1} = \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

sowie das semilatus rectum (\equiv „Parameter“) p

$$\text{durch} \quad p \equiv \frac{a_2^2}{a_1} = a_1(1 - \epsilon^2) < a_1$$

Die Parametrisierung

$$x_1(\varphi) = a_1 \frac{\epsilon + \cos(\varphi)}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} \quad | \quad x_2(\varphi) = a_2 \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin(\varphi)}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} \quad (*)$$

liefert für $\varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$: $x_1 = \pm a_1$; $x_2 = 0$

$$\cos(\varphi) = -\epsilon: \quad x_1 = 0; \quad x_2 = a_2 \frac{\sin^2(\varphi) \operatorname{sign}(\varphi)}{1 - \cos^2(\varphi)} = \pm a_2$$

und erfüllt die Ellipsengleichung

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 &= \frac{\epsilon^2 + 2\epsilon \cos(\varphi) + \cos^2(\varphi) + (1 - \epsilon^2)(1 - \cos^2(\varphi))}{(1 + \epsilon \cos(\varphi))^2} \\ &= \frac{1 + 2\epsilon \cos(\varphi) + \epsilon^2 \cos^2(\varphi)}{(1 + \epsilon \cos(\varphi))^2} = 1, \end{aligned}$$

parametrisiert also eine Ellipse (wobei φ allerdings nicht den Winkel vom Zentrum angibt). Die Rolle

von φ wird klarer, wenn man umformt:

$$x_1 = a_1 \epsilon + a_1 \frac{\epsilon + \cos(\varphi) - \epsilon(1 + \epsilon \cos(\varphi))}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} = a_1 \epsilon + \frac{a_1(1 - \epsilon^2) \cos(\varphi)}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$$

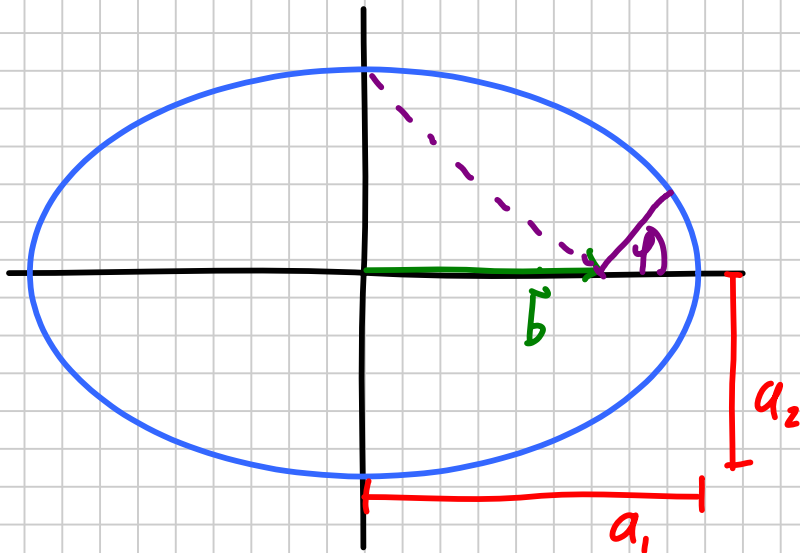
$$= a_1 \epsilon + \frac{p \cos(\varphi)}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$$

(63)

$$x_2 = \frac{a_1(1-\epsilon^2)\sin(\varphi)}{1+\epsilon\cos(\varphi)} = \frac{p \sin(\varphi)}{1+\epsilon\cos(\varphi)}$$

Mit $\vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$ können wir schreiben:

$$\vec{x} - \vec{b} = r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}; \quad r(\varphi) \equiv \frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}$$



Der Referenzpunkt \vec{b} ist einer der beiden Brennpunkte der Ellipse; $r(\varphi)$ sind die Polarkoordinaten der Ellipsenpunkte bezüglich dieses Brennpunkts.

Die Standardform einer Hyperbel-Gleichung lautet $\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1$ mit $a_1 > 0, a_2 > 0$.

Wir definieren nun

$$\epsilon \equiv \sqrt{1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2} > 1; \quad p \equiv \frac{a_2^2}{a_1} = a_1(\epsilon^2 - 1)$$

und erhalten die Parametrisierung

$$\textcircled{64} \quad x_1(\varphi) = \pm a_1 \frac{\epsilon + \cos(\varphi)}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}; \quad x_2(\varphi) = a_2 \frac{\sqrt{\epsilon^2 - 1} \sin(\varphi)}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$$

der beiden Zweige der Hyperbel. Jeder von diesen hat einen eigenen Brennpunkt:

$$\vec{x} - \vec{b}_{\pm}^i = r(\varphi) \begin{pmatrix} \mp \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}; \quad \vec{b}_{\pm}^i = \begin{pmatrix} \pm a, \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$$

Beachte: die Polardarstellung $r(\varphi)$ der Hyperbel ist identisch zu der der Ellipse; der Unterschied ist der Wert der Exzentrizität: $\left\{ \begin{matrix} \epsilon > 1 \\ \epsilon < 1 \end{matrix} \right\}$ für die $\left\{ \begin{matrix} \text{Hyperbel} \\ \text{Ellipse} \end{matrix} \right\}$.

Die **Parabel** erhält man im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 1$ mit $p = a, (1 - \epsilon^2)$ fest (also $a, \rightarrow \infty$) aus der Ellipse:

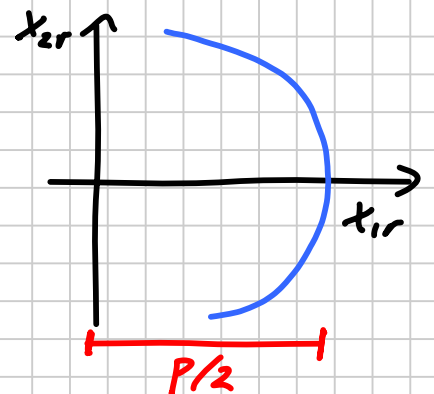
$$\vec{x}_r \equiv \vec{x} - \vec{b} = r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}; \quad r(\varphi) = \frac{p}{1 + \cos(\varphi)}$$

Mit $\frac{x_{1r}}{p} = \frac{\cos(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\cos(\varphi) - 1}{1 + \cos(\varphi)} \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]$

$$\frac{x_{2r}}{p} = \frac{\sin(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)} = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

gilt nämlich: $x_{1r} = \frac{1}{2} p \left[1 - \left(\frac{x_{2r}}{p}\right)^2 \right]$

(dabei ist formal $b_1 = \infty$)



Für alle 3 Kegelschnitte gilt also die Polardarstellung $r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$, wobei $\epsilon > 1$ der Hyperbel,

⑥⑤ $\epsilon = 1$ der Parabel und $0 \leq \epsilon < 1$ der Ellipse entspricht.

3.4.5 Das Kepler-Problem

Kepler-Problem: Zweiteilchen-Problem mit Paar-

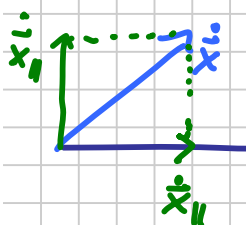
potential $V(x) = -\frac{Gm_1 m_2}{x} = -\frac{G\mu M}{x}$

- besonders wichtig wegen Astronomie-Anwendung
- speziell in der Klasse der Zentralpotentiale: neben $E^{(s)}$ und $\vec{L}^{(s)}$ zusätzliche Erhaltungsgröße, den

Runge-Lenz-Vektor $\vec{a} = \dot{\vec{x}} \times \vec{L}^{(s)} + V(x) \vec{x}$

Beweis: $\frac{d}{dt} \vec{a} = \ddot{\vec{x}} \times \vec{L}^{(s)} + \dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{L}}^{(s)} + V'(x) (\dot{\vec{x}} \cdot \hat{e}_x) \vec{x} + V(x) \dot{\vec{x}}$

$\stackrel{\text{rotationsinvarianz}}{=} -\frac{1}{\mu} V'(x) \hat{e}_x \quad \stackrel{\text{rotationsinvarianz}}{=} \vec{0}$



$$= -x V'(x) \underbrace{\hat{e}_x \times (\hat{e}_x \times \dot{\vec{x}})}_{-\dot{\vec{x}}_{\perp}} + x V'(x) \underbrace{\hat{e}_x \cdot (\hat{e}_x \cdot \dot{\vec{x}})}_{\dot{x}_{\parallel}} + V(x) \dot{\vec{x}}$$

$$= [x V'(x) + V(x)] \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}} \underbrace{\frac{d}{dx} [x V(x)]}_{=0} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \text{BAC-CAB-Regel}$$

$$\hat{e}_x \times (\hat{e}_x \times \dot{\vec{x}}) = \hat{e}_x (\hat{e}_x \cdot \dot{\vec{x}}) - \dot{\vec{x}} (\underbrace{\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x}_{=1})$$

Die Erhaltung des Runge-Lenz-Vektors deutet auf eine besondere Symmetrie des Kepler-Problems hin.

Kepler-Bahnen Um die Bahnen $x(\varphi)$ zu berechnen, kombinieren wir die bekannten Ausdrücke für die Zeitableitungen so, dass die Zeitdifferentiale sich kürzen:

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{\mu} [E^{(s)} - V_f(x)]; \quad V_f(x) = V(x) + \frac{L^2}{2\mu x^2}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu x^2} \Leftrightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{L^2}{\mu^2 x^4} \Leftrightarrow x^{-4} \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\mu^2}{L^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{d(x^{-1})}{d\varphi} \right)^2 &= x^{-4} \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 = x^{-4} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\varphi} \right)^2 \\ &= \frac{2\mu}{L^2} \left[E^{(s)} + \frac{\varphi \mu M}{x} - \frac{L^2}{2\mu x^2} \right] \\ &= \frac{2\mu E^{(s)}}{L^2} + 2 \underbrace{\frac{\mu^2 \varphi M}{L^2}}_{= p^{-1}} x^{-1} - x^{-2} \\ &= \left(\frac{2\mu E^{(s)}}{L^2} + p^{-2} \right) - \underbrace{\left(x^{-1} - p^{-1} \right)^2}_{= u} \end{aligned}$$

Hier wurde der Parameter $p = \frac{L^2}{\mu^2 \varphi M}$ definiert. Jetzt transformieren wir die Variable $x(\varphi) \rightarrow u(\varphi) = x^{-1}(\varphi) - p^{-1}$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \left(\frac{d(x^{-1})}{d\varphi} \right)^2 = \left(\frac{2\mu E^{(s)}}{L^2} + p^{-2} \right) - u^2 \quad (*)$$

Nochmaliges Ableiten nach φ liefert:

$$2 \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -2u \frac{du}{d\varphi} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -u}$$

(67) Die allgemeine Lösung dieser harmonischen DGL

lautet offensichtlich $u(\varphi) = A \cos(\varphi + \varphi_0)$, d.h. der inverse Abstand vollführt harmonische Schwingungen um den Mittelwert p^{-1} (nicht Zeitmittel!)

$$x^{-1}(\varphi) = p^{-1} + A \cos(\varphi + \varphi_0)$$

Mit der Definition $\varepsilon \equiv Ap$ (o.B.d.A. $A > 0$) folgt:

$$x(\varphi) = [u(\varphi) + p^{-1}]^{-1} = \frac{p}{1 + pu(\varphi)} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi + \varphi_0)} \quad (\Delta)$$

Die möglichen Bahnen sind also gerade die Kegelschnitte: Ellipsen für $0 \leq \varepsilon < 1$; Parabeln für $\varepsilon = 1$; Hyperbeln für $\varepsilon > 1$.

Zur Berechnung der Energie setzen wir die Lösung (Δ) in die DGL $(*)$ ein:

$$\begin{aligned} \frac{2\mu p^2}{L^2} E^{(s)} &= p^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] - 1 \\ &= (Ap)^2 [\sin^2(\varphi + \varphi_0) + \cos^2(\varphi + \varphi_0)] - 1 = \varepsilon^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E^{(s)} = \frac{L^2}{2\mu} \frac{\mu^2 \mathcal{G} M}{L^2} \frac{\varepsilon^2 - 1}{p} = -\frac{\mu \mathcal{G} M}{2} \frac{1 - \varepsilon^2}{p} \quad (\square)$$

$$\left(= -\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\mathcal{G} \mu M}{L} \right)^2 (1 - \varepsilon^2) \right)$$

68

Man sieht:
$$\left. \begin{array}{l} E^{(sl)} < 0 \\ E^{(sl)} = 0 \\ E^{(sl)} > 0 \end{array} \right\} \text{ für } \left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq \varepsilon < 1 & \text{Ellipse} \\ \varepsilon = 1 & \text{Parabel} \\ \varepsilon > 1 & \text{Hyperbel} \end{array} \right.$$

Also: alle gebundenen Zustände ($E^{(sl)} < 0$) sind Ellipsen (1. Keplersches Gesetz); ihre Bahnen sind somit geschlossen. Die ungebundenen Zustände ($E^{(sl)} \geq 0$) sind dagegen zwangsläufig offen (∞ Abstand möglich). Ersteres gilt auch für den harmonischen Oszillator; hier sind allerdings alle Zustände gebunden (Artefakt).

Für konkrete Bahnformen können wir \square noch weiter vereinfachen. Mit $p = a_1 |1 - \varepsilon^2|$ gilt nämlich:

$$E^{(sl)} = - \frac{\mathcal{G} \mu M}{2 a_1} = \frac{1}{2} V(a_1) \quad \text{für Ellipsen}$$

$$E^{(sl)} = \frac{\mathcal{G} \mu M}{2 a_1} = - \frac{1}{2} V(a_1) \quad \text{für Hyperbeln}$$

Beide Formeln gelten (mit $a_1 = \infty$) auch für Parabeln.

Beachte: in allen Fällen hängt die Energie nur von der großen Halbachse a_1 ab, jedoch nicht von a_2 (oder äquivalent: von ε , p oder $L^{(sl)}$).

In Kombination mit dem Virialtheorem können wir für Ellipsen außerdem schließen

$$E^{(s)} = \overline{E_{kin}} + \overline{E_{pot}} = \frac{1}{2} \overline{E_{pot}} = \frac{1}{2} \overline{V(x(t))}$$
$$\Rightarrow \overline{V(x(t))} = V(a_1).$$

Potentielle und kinetische Energie sind also auch einzeln nur durch a_1 bestimmt. Insgesamt liegt eine hohe Energieentartung vor.

Die Zeitabhängigkeit

Zur Berechnung der Zeitabhängigkeit legen wir

$\varphi_0 = 0$ fest, d.h. messen Winkel relativ zur

\hat{e}_1 -Achse, und setzen $t(0) = 0$, messen Zeiten also

ab dem Durchlaufen des Perizentrums, d.h. des

Punktes mit dem geringsten Abstand

Nomenklatur: Apozentrum Perizentrum

Aphel

Perihel

Sonne

Apogäum

Perigäum

Erde

-galaktikum

Milchstraße

max. Abstand

min. Abstand

Integration von $L = \mu x^2 \dot{\varphi}$ liefert dann:

$$T(\varphi) = \frac{\mu}{2} \int_0^\varphi d\varphi' [x(\varphi')]^2 = \frac{\mu p^2}{2} \tau(\varphi)$$

$$\text{mit } \tau(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{1}{[1 + \epsilon \cos(\varphi')]^2} d\varphi'$$

Dieses Integral kann nun mithilfe von Handbüchern, z.B. Gradshteyn, Ryzhik, Formeln 2.554.3 und 2.553.3 berechnet werden. Das Ergebnis lautet

(i) für eine Ellipse ($0 \leq \epsilon < 1$)

$$\tau(\varphi) = \frac{-1}{1-\epsilon^2} \left\{ \frac{\epsilon \sin(\varphi)}{1+\epsilon \cos(\varphi)} - \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \arctan \left[\frac{\sqrt{1-\epsilon^2} \tan(\varphi/2)}{1+\epsilon} \right] \right\}$$

Beachte: $\arctan(z)$ ist nur bis auf ganzzahlige Vielfache von π festgelegt; diese Konstante ist so zu wählen, dass $\tau(\varphi)$ kontinuierlich ist mit $\tau(0)=0$.

Die Korrektheit überprüft man durch Differentiation (\leadsto Aufgabe 19).

(ii) für eine Hyperbel ($\epsilon > 1$):

$$\tau(\varphi) = \frac{1}{\epsilon^2-1} \left\{ \frac{\epsilon \sin(\varphi)}{1+\epsilon \cos(\varphi)} - \frac{2}{\sqrt{\epsilon^2-1}} \operatorname{artanh} \left[\frac{\sqrt{\epsilon^2-1} \tan(\varphi/2)}{1+\epsilon} \right] \right\}$$

(71)

Dieses Ergebnis kann man aus dem der Ellipse mit $\sqrt{1-\epsilon^2} = i\sqrt{\epsilon^2-1}$ und $\arctan(iz) = i \operatorname{arctanh}(z)$ erhalten. Da im ersten Term kein Poldurchgang auftreten darf, gilt hier:

$$1 + \epsilon \cos(\varphi) > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\varphi) > -\frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow |\varphi| < \varphi_\infty \equiv \pi - \arccos\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

Limiten:

$$\tau(\varphi) \xrightarrow{\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2-1} \left\{ \frac{\epsilon \varphi}{1+\epsilon} - \frac{2}{\sqrt{\epsilon^2-1}} \left[\frac{\sqrt{\epsilon^2-1} \varphi/2}{1+\epsilon} \right] \right\}$$

$$= \frac{\varphi}{(\epsilon-1)(\epsilon+1)} \frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} = \frac{\varphi}{(\epsilon+1)^2} \quad (\rightarrow 0)$$

$$\tau(\varphi) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \varphi_\infty} \frac{1}{\epsilon^2-1} (\varphi_\infty - \varphi)^{-1} \quad \text{6.6.11}$$

Für lange Zeiten gilt also:

$$\varphi(t) \sim \varphi_\infty - \frac{1}{\epsilon^2-1} \frac{1}{\tau} \quad \left(t = \frac{\mu p^2}{L} \tau \rightarrow \infty \right)$$

(iii) für Parabeln vereinfacht sich das Integral wegen $\epsilon=1$; eine elementare Berechnung liefert:

$$\tau(\varphi) = \frac{1}{2} \tan(\varphi/2) \left[1 + \frac{1}{3} \tan^2(\varphi/2) \right]$$

$$\rightarrow \tau(\varphi) \xrightarrow{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{4} \quad (\varphi \rightarrow 0)$$

$$\tau(\varphi) \xrightarrow{\varphi \rightarrow \pi} \frac{4}{3} (\pi - \varphi)^{-3} \Leftrightarrow \varphi(t) \sim \pi - \left(\frac{4}{3\tau} \right)^{1/3}$$

(72)