Auch die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem lässt sich durch μ und Relativkoordinaten ausdrücken:

$$E^{(s)} = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{x}}_1'|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\vec{x}}_1'|^2 + V(|x_{12}|)$$

$$= \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{2\,(m_1+m_2)^2}\,\dot{\vec{x}}^2 + V(|\vec{x}|)$$

$$= \frac{m_1 m_2 \cancel{(m_2+m_1)}}{2\,(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}\,\dot{\vec{x}}^2 + V(|\vec{x}|) = \frac{1}{2}\mu\,\dot{\vec{x}}^2 + V(|\vec{x}|)$$

Die Bewegungsgleichung im SPS lautet

$$\ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}_{21}' = \ddot{\vec{x}}_2 - \ddot{\vec{x}}_1 = -\frac{1}{m_2} f(x)\,\hat{e}_x - \frac{1}{m_2} f(x)\,\hat{e}_x = -\frac{1}{\mu} f(x)\,\hat{e}_x$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mu\,\ddot{\vec{x}} = -f(x)\,\hat{e}_x = -V'(x)\,\hat{e}_x} \qquad (*)$$

Mit (*) können wir leicht überprüfen, dass $\vec{L}^{(s)}$ und $E^{(s)}$ erhalten sind:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}^{(s)} = \mu\,(\dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{x}} + \vec{x} \times \ddot{\vec{x}}) = -V'(x)\,\vec{x} \times \hat{e}_x = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dt}E^{(s)} = \mu\,\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} + V'(x)\underbrace{\hat{e}_x \cdot \dot{\vec{x}}}_{\frac{d}{dt}|\vec{x}|} = \dot{\vec{x}} \cdot (\mu\,\ddot{\vec{x}} + V'(x)\,\hat{e}_x) = 0$$

Das Virialtheorem im SPS folgt aus dem allg. Ausdruck (siehe 3.1.1) als:

$$\frac{1}{2}\mu\overline{\dot{\vec{x}}^2} = \overline{E_{kin}^{(S)}} = -\frac{1}{2}\overline{(\vec{x}_1'\cdot\vec{f}_{21} + \vec{x}_2'\cdot\vec{f}_{12})}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{\vec{x}_{21}'\cdot\vec{f}_{21}} = \frac{1}{2}\overline{\vec{x}\cdot f(x)\hat{e}_x} = \frac{1}{2}\overline{x f(x)} = \frac{1}{2}\overline{x V'(x)}$$

Für homogene Potentiale $V(x) = V_0 x^\alpha$ gilt also die einfache Beziehung $\frac{1}{2}\mu\overline{\dot{\vec{x}}^2} = \frac{1}{2}\alpha\overline{V(x)}$.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass ein 2-Teilchen-System (mit 3. Newton) vollständig äquivalent zu einem einzelnen Teilchen mit Masse μ im Zentralpotential plus der Schwerpunkt-Bewegung ist.

Jetzt wollen wir die Lösung von (*) diskutieren.

$\vec{L}^{(S)}$ erhalten $\rightsquigarrow$ Bahn $\vec{x}(t)$ für alle Zeiten in Ebene senkrecht zu $\vec{L}^{(S)}$

wähle $\vec{L}^{(S)} = L\hat{e}_3$ mit $L>0 \rightsquigarrow$ Bewegung in $\hat{e}_1$-$\hat{e}_2$-Ebene, z.B. mit $\hat{e}_1 \equiv \hat{e}_x(0)$; $\hat{e}_2 \equiv \hat{e}_3 \times \hat{e}_1$ fest

Falls $L=0$ (d.h. für $\dot{\vec{x}}(0) \parallel \vec{x}(0)$) $\rightsquigarrow$ eindim. Problem

Sonst führen wir Polarkoordinaten ein:

$$\vec{x} = x\hat{e}_x = x\left[\cos(\varphi)\hat{e}_1 + \sin(\varphi)\hat{e}_2\right]$$

nochmal mit expliziten Zeitabhängigkeiten:

$$\vec{x}(t) = x(t)\,\hat{e}_x(t) = x(t)\,[\cos(\varphi(t))\,\hat{e}_1 + \sin(\varphi(t))\,\hat{e}_2]$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{x}} = \dot{x}\,\hat{e}_x + x\,\dot{\varphi}\,\overbrace{[-\sin(\varphi)\,\hat{e}_1 + \cos(\varphi)\,\hat{e}_2]}^{\hat{e}_3 \times \hat{e}_x(t)} \qquad (\Delta)$$

Damit folgt der Gesamtdrehimpuls im SPS als

$$L\,\hat{e}_3 = \vec{L}^{(S)} = \mu\,\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$$

$$= \mu x^2 \dot{\varphi}\,[\cos(\varphi)\,\hat{e}_1 + \sin(\varphi)\,\hat{e}_2] \times [-\sin(\varphi)\,\hat{e}_1 + \cos(\varphi)\,\hat{e}_2]$$

$$= \mu x^2 \dot{\varphi}\,(\hat{e}_1 \times \hat{e}_2)\,[\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)] = \mu x^2 \dot{\varphi}\,\hat{e}_3$$

Für seinen konstanten Betrag gilt also:

$$L = \mu\, x^2(t)\,\dot{\varphi}(t) \quad \text{bzw.} \quad \dot{\varphi}(L,x) = \frac{L}{\mu x^2} \qquad (\square)$$

27.5.11

Die Gesamtenergie im SPS folgt aus (Δ) als

$$E^{(S)} = \frac{1}{2}\mu\,\dot{\vec{x}}^2 + V(x)$$

$$= \frac{1}{2}\mu\Big[\dot{x}^2 \underbrace{|\hat{e}_x|^2}_{=1} + (x\dot{\varphi})^2 \underbrace{|\hat{e}_3 \times \hat{e}_x(t)|^2}_{=1} + 2\dot{x}x\dot{\varphi}\,\underbrace{\hat{e}_x \cdot (\hat{e}_3 \times \hat{e}_x)}_{=0}\Big] + V(x)$$

$$= \frac{1}{2}\mu\,(\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2) + V(x)$$

$$= \frac{1}{2}\mu\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\mu x^2 \left(\frac{L}{\mu x^2}\right)^2 + V(x)$$

$$= \frac{1}{2}\mu\,\dot{x}^2 + V_\ell(x)$$

mit dem effektiven Potential (von L abhängig!)

$$\boxed{V_\ell(x) \equiv V(x) + \frac{L^2}{2\mu x^2}} \qquad (**)$$