

**Aufgabe 1: Dreidimensionale Integrale** (4 Bonuspunkte)

Berechnen Sie das Volumen von

(i)  $\left\{ \mathbf{x} \mid 0 \leq x_3 \leq \sqrt{16 - \rho^2}, 0 \leq \rho \leq 4 \cos(\varphi) \right\}$  (Zylinderkoordinaten)

(ii)  $\left\{ \mathbf{x} \mid r \leq 3^{2/3}, 1 \leq \tan(\theta) \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$  (Kugelkoordinaten)

und beschreiben sie die Form der Integrationsbereiche in Worten oder machen Sie eine Skizze.

**Aufgabe 2: Differentialgleichungen erster Ordnung** (10 Bonuspunkte)

Die folgenden Differentialgleichungen weisen alle die allgemeine Struktur  $\frac{du}{dt} = -a(t)u + b(t)$  auf oder können durch eine geeignete Substitution auf diese Struktur zurückgeführt werden. Lösen Sie die Differentialgleichungen mittels der Methode der Variation der Konstanten

1.  $u' + t^2 u = t^2$                       2.  $u' + u \tan(t) = \sin(t)$

3.  $u' + u = \frac{2}{3} e^t u^4$                       4.  $e^{-3u}(u' - 1) = t$

5.  $t^2 u' - u = 1$                       6.  $tu'' - u' = 2t^3$  .

**Aufgabe 3: Funktionen mehrerer Veränderlicher** (6 Bonuspunkte)(a) Betrachten Sie die Funktion zweier Variablen  $f(x_1, x_2) = x_1(x_2)^2 / ((x_1)^2 + (x_2)^4)$  und berechnen Sie

(i)  $\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, 0)$                       (ii)  $\lim_{x_2 \rightarrow 0} f(0, x_2)$                       (iii)  $\lim_{y \rightarrow 0} f(\lambda y^2, y)$

mit  $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ . Bestimmen Sie, ob  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} f(\mathbf{x})$  existiert.(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der folgenden Funktionen im Punkt  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ 

(i)  $\sin((x_1)^2 + (x_2)^2)$                       (ii)  $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$                       (iii)  $\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$  .

(c) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen  $\partial_{x_i} f$  und  $\Delta f = \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2 f$  im Punkt  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $i = 1, 2, 3$  für die folgenden Funktionen  $f(\mathbf{x})$ :

(i)  $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}$                       (ii)  $\arctan\left(\frac{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}}{x_3}\right)$                       (iii)  $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$  .