Aufgabenblatt 02, Abgabe: 09.05.2011

Aufgabe 1: Eigenschaften von Matrizen (12 Punkte)

(a) Berechnen Sie A^{-1} für die $n \times n$-Matrix A mit Elementen $a_{ij} = \delta_{i,j} - \delta_{i,j+1}$. Hierbei ist das Kronecker-Delta $\delta_{i,j} = 1$ falls $1 \leq i = j \leq n$ und $\delta_{i,j} = 0$ sonst.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & a^2 & b & 5 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 7b^2 & a^2b^2 & 1+b^3 & 6b^2 \\ ab & 1 & 7a & ab \end{bmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie, dass für eine invertierbare $n \times n$-Matrix A und eine beliebige $n \times n$-Matrix B gilt: $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(A^{-1}BA)$.

(d) Eine Matrix O heißt orthogonal, wenn die Transponierte die Inverse ist: $O^{\mathrm{T}}O = \mathbf{1}$. Eine Matrix P heißt Projektor, wenn sie idempotent und hermitesch ist: $P^2 = P = P^\dagger$. Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal, welche sind idempotent und bei welchen handelt es sich um einen Projektor?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\varphi) & \frac{1}{2}\sin(2\varphi) \\ 0 & \frac{1}{2}\sin(2\varphi) & \sin^2(\varphi) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \mathbf{1}, E = \mathbf{0}.$$

Aufgabe 2: Eigenschaften der Determinante (8 Punkte)

Zeigen Sie explizit, dass die Determinante einer 2×2 Matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) Die Determinanten der Matrix A und ihrer Transponierten A^{T} sind gleich: $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$.

(b) Beim Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten ändert die Determinante ihr Vorzeichen.

(c) Werden die Elemente einer beliebigen Zeile oder Spalte mit einem Skalar λ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ.

(d) Die Determinante ist Null, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
   1. Alle Elemente einer Zeile oder Spalte sind Null.
   2. Zwei Zeilen oder Spalten sind linear abhängig.

(e) Der Wert der Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile (bzw. anderen Spalte) addiert.

(f) Für zwei Matrizen A und B gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.