Aufgabenblatt 03, Abgabe: 16.05.2011

Aufgabe 1: Eigenwerte und Eigenvektoren (8 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Verifizieren Sie, dass die Determinaten (die Spur) von A und B durch das Produkt (die Summe) der Eigenwerte gegeben sind.

(b) Zeigen Sie, *ohne* das charakteristische Polynom zu berechnen, dass die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 6 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

den 6-fachen Eigenwert $\lambda_1 = 7$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 0$ hat, in dem Sie zu jedem der Eigenwerte die Maximalzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren konstruieren.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und normierten Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ der symmetrischen (2×2)-Matrix $S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Verwenden Sie die Transformation $S' = D^{-1} S D$, mit $D = [\vec{x}_1, \vec{x}_2]$, um S zu diagonalisieren.

Aufgabe 2: Torsionsschwingungen einer elastischen Welle (8 Punkte)

Ein Torsionsschwinger besteht aus einer masselosen elastischen Welle mit zwei gleichen starren Zylinderscheiben mit Massenträgheitsmoment J. In dem man die Scheiben gegeneinander verdreht, läßt sich das System zu Torsionsschwingungen anregen. Die Drehwinkel φ_1 und φ_2 erfüllen das folgende System gekoppelter linearer Differentialgleichungen

$$J \ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \,, \quad J \ddot{\varphi}_2 - c(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \,.$$

(a) Benutzen Sie den Lösungsansatz $\varphi_1(t) = A_1 \sin(\omega t), \varphi_2(t) = A_2 \sin(\omega t)$, ($A_1, A_2$: maximale Drehwinkel), um das Differentialgleichungssystem auf eine Matrizengleichung zurückzuführen.

(b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω aus den entsprechenden Eigenwerten.

(c) Berechnen Sie den zur nicht-trivialen Lösung gehörenden Eigenvektor. Wie sieht entsprechende die Lösung $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ aus und welchem Schwingungstyp entspricht sie?

Aufgabe 3: Drehungen im $\mathbb{R}^2$ (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der 2-dimensionalen Drehmatrix $D(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$. Für welchen Drehwinkel sind die Eigenwerte reell? Welche Relation besteht in diesem Fall zwischen den Urbild- und Bildvektoren?