Aufgabenblatt 04, Abgabe: 23.05.2011

Aufgabe 1: Darstellung der 3-dimensionalen Drehgruppe (7 Punkte)

Eine nützliche Darstellung der 3-dimensionalen Drehgruppe $\vec{r}\,' = D\vec{r}$ drückt die Matrixelemente D_{ij} durch den (normierten) Vektor $\vec{d}$ entlang der Drehachse und den Drehwinkel ϕ um diese Achse aus

$$D_{ij} = d_i d_j + (\delta_{ij} - d_i d_j)\cos(\phi) - \sum_k \epsilon_{ijk} d_k \sin(\phi)\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Drehachse $\vec{d}$ invariant unter der Drehung ist, d.h. $\vec{d}\,' = D\vec{d} = \vec{d}$.

(b) Zeigen Sie, dass ein Vektor $\vec{u}$, der senkrecht zur Drehachse steht, um den Winkel ϕ gedreht wird.

(c) Bestimmen sie den Drehwinkel aus der Spur von D.

(d) Finden Sie die zu vorgegebenen Matrixelementen D_{ij} gehörige Drehachse d_i.

(e) Nutzen Sie das Ergebnis (a) um den “Satz vom Fußball” zu beweisen: *In jedem Fußballspiel, in dem nur ein Ball benutzt wird, gibt es zu Anfang jeder Halbzeit (wenn der Ball auf dem Anstoßpunkt liegt) mindestens zwei Punkte auf dem Ball, die an der gleichen Stelle liegen.*

Aufgabe 2: Gradient, Rotation und der Laplace-Operator (7 Punkte)

Zeigen Sie, dass unter einer Drehung im $\mathbb{R}^3$

(a) der Gradient $\vec{\nabla} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right]$ einer Funktion, $\vec{\nabla} f$, wie ein Vektor transformiert.

(b) die Rotation eines Vektorfelds $\vec{v}$, $\mathrm{rot}\vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v}$, wie ein Vektor transformiert.

(c) der Laplaceoperator angewendet auf eine Funktion, $\Delta f \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) f$, invariant ist.

Aufgabe 3: Exponentialdarstellung der Drehgruppe (6 Punkte)

Berechnen Sie die Matrix $D(\varphi) = \exp(-iS\varphi)$ für

$$S = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Nutzen Sie das Ergebnis, um das Kompositionsgesetz

$$D(\varphi_1)D(\varphi_2) = D(\varphi_1 + \varphi_2)$$

für Drehungen in der Ebene zu zeigen. (Hinweis: Verwenden Sie die Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ für matrixwertige Argumente.)