

Aufgabe 1: Bogenlänge und skalare Kurvenintegrale (8 Punkte)

Die Bogenlänge s ist über die Beziehung $ds = [(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2]^{1/2}$ mit der infinitesimalen Änderung $d\vec{x}$ des Ortsvektors verknüpft.

- (a) Betrachten Sie eine beliebige (glatte) Bahnbewegung $\vec{x}(t)$ eines Massepunktes. Zeigen Sie zuerst allgemein:

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad |\dot{\vec{x}}| = \left| \frac{ds}{dt} \right|, \quad \ddot{\vec{x}} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel,$$

mit der Normalbeschleunigung $\vec{a}_\perp \equiv \frac{d^2\vec{x}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ und der Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_\parallel \equiv \frac{d\vec{x}}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}$. Zeigen Sie nun speziell für eine Pendelbewegung $\vec{x} = l(\sin(\varphi), 0, -\cos(\varphi))$ im homogenen Schwerfeld $\vec{F} = -mg\hat{e}_3$ die Beziehungen $ds = l|d\varphi|$ und $\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin(\varphi) \operatorname{sgn}(\dot{\varphi})$.

- (b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\{\vec{x} \mid x_2 = x_3 = \sqrt{2x_1}, 3 \leq x_1 \leq 24\}$.
- (c) Berechnen Sie allgemein die Bogenlänge der Kurve $\vec{x}(\varphi) = \rho(\varphi)[\cos(\varphi), \sin(\varphi)]$ mit $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \leq 2\pi$ für differenzierbares $\rho(\varphi) \geq 0$.

Aufgabe 2: Vektorielle Kurvenintegrale (8 Punkte)

Bestimmen Sie die an einen Massepunkt, der unter der Einwirkung der Kraft $\vec{F}(\vec{x})$ die Bahn $\vec{x}(t)$ durchläuft, verrichtete Arbeit für die Fälle (mit $0 \leq t \leq 2\pi$):

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \vec{F}(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ 1 \\ x_2 x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix} & \text{(ii)} \quad \vec{F}(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_1 x_2^2 \\ x_2 x_3^2 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{(iii)} \quad \vec{F}(\vec{x}) &= \hat{e}_3 \times \vec{x}, \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix} & \text{(iv)} \quad \vec{F}(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3^2 \\ 2x_1 x_3 - 4x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 4 \cos(t) \\ 0 \\ 3 \sin(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Doppelte Rotation (4 Punkte)

Als „doppelte Rotation“ eines Vektorfelds $\vec{a}(\vec{x})$ bezeichnen wir $[\nabla \times (\nabla \times \vec{a})](\vec{x})$. Zeigen Sie durch die Berechnung der doppelten Rotation

- (a) eines Vektorfelds $\vec{B}(\vec{x})$, das für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ die Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j}(\vec{x})$ erfüllt, dass $\Delta \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{j}$ gilt.
- (b) eines Vektorfelds $\vec{E}(\vec{x})$, das für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ die Gleichungen $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho(\vec{x})$ und $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ erfüllt, dass $\Delta \vec{E} = \vec{\nabla} \rho$ gilt.

Hierbei sind $\rho(\vec{x})$ und $\vec{j}(\vec{x})$ differenzierbar und ansonsten beliebig.