Aufgabenblatt 06, Abgabe: 06.06.2011

Aufgabe 1: Satz von Stokes (10 Punkte)

Der Stokes'sche Satz lautet in der üblichen Notation:

$$\int_{\mathcal{F}} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g})(\vec{x}) = \oint_{\partial\mathcal{F}} d\vec{x} \cdot \vec{g}(\vec{x}) \,. \tag{1}$$

Betrachten Sie als Spezialfall für die orientierte Fläche $\mathcal{F}$ ein Segment eines (elliptischen) Paraboloids mit dem kreisförmigen Rand $\partial\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \left\{ \vec{x} \,|\, x_3 = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \leq 2 \right\} , \quad \partial\mathcal{F} = \left\{ \vec{x} \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 4, x_3 = 2 \right\} .$$

Das Vektorfeld $\vec{g}$ hat die Form $\vec{g}(\vec{x}) = \left\{x_1, 2x_3, x_2^2\right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{x}(u,v) = \left\{u\cos(v), u\sin(v), \frac{1}{2}u^2\right\}$ mit $0 \leq u \leq 2$ und $0 \leq v \leq 2\pi$ eine Parametrisierung der orientierten Fläche $\mathcal{F}$ darstellt.

(b) Bestimmen Sie die Tangentialvektoren $\vec{t}_u, \vec{t}_v$ und den Normalenvektor $\vec{n} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v$. Wählen Sie die Orientierung der Fläche so, dass $\vec{n} \cdot \hat{e}_3 \geq 0$.

(c) Berechnen Sie die *rechte* Seite von Gleichung (1) explizit.

(d) Berechnen Sie die *linke* Seite von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (c) die Gültigkeit des Stokes'schen Satzes für diesen Spezialfall.

Aufgabe 2: Satz von Stokes in der Ebene (10 Punkte)

Betrachten Sie eine orientierte Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ in der x_1-x_2-Ebene mit der mittels der Bogenlänge parametrisierten geschlossenen Kurve $\partial\mathcal{F} = \{x_1(s), x_2(s), 0\}$ als orientiertem Rand. Neben dem Tangentialvektor $\vec{x}\,'(s) \equiv \left\{\frac{dx_1}{ds}\,, \frac{dx_2}{ds}\,, 0\right\}$ an die Kurve definieren wir den Vektor $\vec{n} \equiv \{x_2'\,, -x_1'\,, 0\}$.

(a) Zeigen Sie: $|\vec{x}\,'(s)| = 1$, $|\vec{n}(s)| = 1$, $\vec{x}\,' \cdot \vec{n} = 0$ und $\det(\vec{n}, \vec{x}\,', \hat{e}_3) = 1$.

(b) Zeigen Sie für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{B}(\vec{x})$ mit Hilfe des Stokes'sches Satzes:

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} ds\, (\vec{n} \cdot \vec{B}) = \int_{\mathcal{F}} dx_1 dx_2\, (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2) \,.$$

Falls Sie eine Analogie zum Gauß'schen Satz sehen, erklären Sie diese!