Aufgabenblatt 07, Abgabe: **Di**, 14. 06. 2011

Aufgabe 1: Identität für den Levi-Civita-Tensor (6 Punkte)

Zeigen Sie für alle $i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3\}$ die Identität:

$$\epsilon_{ikl}\delta_{jm} + \epsilon_{ilj}\delta_{km} + \epsilon_{ijk}\delta_{lm} = \epsilon_{jkl}\delta_{im} \, .$$

Hinweis: Betrachten Sie sukzessive Fallunterscheidungen, $i = m$ vs. $i \neq m$, usw.

Aufgabe 2: Der Gauß'sche Satz (14 Punkte)

Der Satz von Gauß lautet

$$\int_{\mathcal{V}} dV \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \int_{\partial \mathcal{V}} d\vec{S} \cdot \vec{A} \, , \qquad (1)$$

wobei $\mathcal{V}$ ein Volumen mit dem orientierten Rand $\partial\mathcal{V}$ ist. Als erste Anwendung betrachten wir das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{x}) = [x_1, x_2, x_3]$ und das Integrationsvolumen

$$\mathcal{V} = \left\{ \vec{x} \,|\, 0 \leq x_3 \leq 3 \, , \, x_1^2 + x_2^2 \leq 9 \right\}$$

mit nach außen gerichteten Normalvektor.

(a) Berechnen Sie die linke Seite von Gleichung (1) explizit.

(b) Berechnen Sie die rechte Seite von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (a) die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für diesen Spezialfall.

Als zweiten Fall betrachten wir das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{x}) = \left[2x_1x_2 + x_3 \, , \, x_2^2 \, , \, -x_1 - 3x_2 \right]$ und das Integrationsvolumen

$$\mathcal{V} = \{ \vec{x} \,|\, x_1 \geq 0 \, , \, x_2 \geq 0 \, , \, x_3 \geq 0 \, , \, 2(x_1 + x_2) + x_3 \leq 6 \}$$

mit nach außen gerichtetem Normalvektor.

(c) Berechnen Sie die linke Seite von Gleichung (1) explizit.

(d) Konstruieren Sie eine Parametrisierung des orientierten Dreiecks

$$\{ \vec{x} \in \partial\mathcal{V} \,|\, 2(x_1 + x_2) + x_3 = 6 \}$$

und berechnen Sie die zugehörigen Tangential- sowie den Normalvektor.

(e) Berechnen Sie die rechte Seite von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (c) die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für diesen Spezialfall.