Aufgabenblatt 08, Abgabe: 20.06.2011

Aufgabe 1: Der Gauß'sche Satz (12 Punkte)

Der Satz von Gauß lautet

$$\int_{\mathcal{V}} dV \, \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{S} \cdot \vec{A} \,, \tag{1}$$

wobei $\mathcal{V}$ ein Volumen mit dem orientierten Rand $\partial\mathcal{V}$ ist. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{x}) = \left[2x_1 + 3x_3 \,,\, -x_1x_3 - x_2 \,,\, x_2^2 + 2x_3\right]$$

und ein Integrationsvolumen

$$\mathcal{V} = \{\, \vec{x} \,|\, |\vec{x} - \vec{x}_0| \leq 3 \,\} \;, \qquad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit nach außen gerichtetem Normalvektor.

(a) Berechnen Sie die linke Seite von Gleichung (1) explizit.

(b) Berechnen Sie die rechte Seite von Gleichung (1) explizit und überprüfen Sie durch den Vergleich mit dem Ergebnis aus (a) die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für diesen Spezialfall.

Aufgabe 2: Der erste Green'sche Satz (8 Punkte)

Der erste Satz von Green lautet

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \left[(\vec{\nabla}\mu) \cdot (\vec{\nabla}\nu) + \mu\Delta\nu\right] = \int_{\partial\mathcal{V}} dS \, \mu \, \frac{\partial \nu}{\partial n} \,. \tag{2}$$

Dieser Satz findet seine Anwendung z.B. beim Nachweis der Eindeutigkeit von Lösungen elektrostatischer Probleme. Betrachten Sie z.B. die Gleichung $(\Delta\Phi)(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{x})$ für das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{x})$ mit $\vec{x} \in \mathcal{V}$, wobei sowohl die Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ in $\mathcal{V}$ als auch der Potentialwert $V(\vec{x})$ auf dem Rand $\partial\mathcal{V}$ vorgegeben sind: $\Phi(\vec{x}) = V(\vec{x})$ für $\vec{x} \in \partial\mathcal{V}$. Um nachzuweisen, dass $\Phi(\vec{x})$ durch diese Information eindeutig festgelegt ist, nimmt man zunächst an, es gäbe zwei unterschiedliche Lösungen, $\Phi_1 \neq \Phi_2$, und leitet dann folgenden Widerspruch her:

(a) Betrachten Sie die Differenzfunktion $w \equiv \Phi_1 - \Phi_2 \neq 0$. Zeigen Sie, dass w für alle $\vec{x} \in \mathcal{V}$ die Gleichung $(\Delta w)(\vec{x}) = 0$ und für alle $\vec{x} \in \partial\mathcal{V}$ die Gleichung $w(\vec{x}) = 0$ erfüllt.

(b) Leiten Sie aus (a) und Gleichung (2) mit der Wahl $\mu = \nu = w$ ab: $\int_{\mathcal{V}} d^3x \left[(\vec{\nabla}w)(\vec{x})\right]^2 = 0$, und konstruieren Sie einen Widerspruch. Was schließen Sie hieraus?